Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad/Batxilergaaren Ebaluaziaa Unibertsitatean Sartzeka

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CURSO: 2016/2017 ***IKASTURTEA***

OPCIÓN A

EJERCICIO 1:
Una empresa fabrica y vende dos tipos de productos (A y B). El precio de venta de una tonelada del producto A en el mercado es de 200 euros y el de una tonelada de B es de 500 euros. Para su elaboración utilizan dos materias primas (M1 y M2), de la que disponen diariamente de 184 y 100 unidades, respectivamente. Para fabricar una tonelada de A se necesitan 8 unidades de M1 y 2 unidades de M2. Para elaborar una tonelada de B se necesitan 4 unidades de M1 y 3 unidades de M2. El coste unitario asociado a la fabricación del producto A es de 25 euros y el de B es de 275 euros. Determine cuántas toneladas de cada producto deberá fabricar diariamente esta empresa si desea maximizar el beneficio, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 15 unidades.

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Una nueva normativa en el sector de esta empresa exige que las emisiones contaminantes derivadas del proceso de fabricación no supere el nivel de 150 unidades de emisiones diarias. La fabricación de una tonelada de A genera 2,5 unidades de emisiones contaminantes y la de una tonelada de B genera 6 unidades. Analice gráficamente cómo afectaría a la política de fabricación el cumplimiento de la nueva normativa. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:
a) Calcule las siguientes integrales:

i) $\int sen(3x)\left(\cos(3x)\right)^2 dx$ (1 punto)

ii) $\int \left(5+3x^2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)dx$ (1 punto)

b) Calcule dos funciones distintas cuya derivada sea $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x+2)}}+e^{2x}$ (1.5 puntos)

EJERCICIO 3:
Una caja contiene doce bolígrafos, de los cuales cuatro son defectuosos. Se extraen tres bolígrafos de forma sucesiva y sin devolverlos a la caja.

i) Calcule la probabilidad de que los tres bolígrafos extraídos no tengan defectos. (1 punto)
ii) Calcule la probabilidad de que al menos un bolígrafo de entre los tres extraídos sea defectuoso. (1 punto)
iii) Calcule la probabilidad de que solamente un bolígrafo sea defectuoso. (1 punto)

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad/Batxilergaaren Ebaluaziaa Unibertsitatean Sartzeka

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CURSO: 2016/2017 ***IKASTURTEA***

OPCIÓN B

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $X=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

i) Resuelva el sistema siguiente y compruebe si su solución coincide con las matrices anteriores X e Y:

$$\begin{cases} 2A-3B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix} \\ 3A-2B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\end{cases}$$

(2.5 puntos)

ii) Razone si la matriz X+Y es invertible. (1 punto)

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x)=\dfrac{3}{x^2-4}$, calcule:

i) Dominio y puntos de corte con los ejes. (0.25 puntos)
ii) Asíntotas. (0.75 puntos)
iii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. (0.75 puntos)
iv) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. (0.75 puntos)
v) Con los datos que ha obtenido, dibuje su gráfica. (1 punto)

EJERCICIO 3:

En una región se selecciona una muestra de 650 jóvenes y se observa que 500 de ellos son lectores habituales.

i) Construya un intervalo de confianza para la proporción poblacional de jóvenes no lectores habituales, con un nivel de confianza del 99%. (2 puntos)
ii) Analice el efecto que tiene en el intervalo la disminución del nivel de confianza. (1 punto)
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1:
Una empresa fabrica y vende dos tipos de productos (A y B). El precio de venta de una tonelada del producto A en el mercado es de 200 euros y el de una tonelada de B es de 500 euros. Para su elaboración utilizan dos materias primas (M1 y M2), de la que disponen diariamente de 184 y 100 unidades, respectivamente. Para fabricar una tonelada de A se necesitan 8 unidades de M1 y 2 unidades de M2. Para elaborar una tonelada de B se necesitan 4 unidades de M1 y 3 unidades de M2. El coste unitario asociado a la fabricación del producto A es de 25 euros y el de B es de 275 euros. Determine cuántas toneladas de cada producto deberá fabricar diariamente esta empresa si desea maximizar el beneficio, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 15 unidades.

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Una nueva normativa en el sector de esta empresa exige que las emisiones contaminantes derivadas del proceso de fabricación no supere el nivel de 150 unidades de emisiones diarias. La fabricación de una tonelada de A genera 2,5 unidades de emisiones contaminantes y la de una tonelada de B genera 6 unidades. Analice gráficamente cómo afectaría a la política de fabricación el cumplimiento de la nueva normativa. (0.5 puntos)

i) Llamemos x al número de toneladas del producto A e y al número de toneladas del producto B.

La función a maximizar es el beneficio y sabemos que el beneficio es la diferencia entre ingresos y coste.

$$B(x,y)=200x+500y-\left(25x+275y\right)$$
$$B(x,y)=200x+500y-25x-275y$$
$$B(x,y)=175x+225y$$

Las restricciones son:

Para M2 fabricar una tonelada de A se necesitan 8 unidades de M1 y 2 unidades de M2. Para elaborar una tonelada de B se necesitan 4 unidades de M1 y 3 unidades de M2 →Las unidades de M1 necesarias son 8x + 4y, de M2 son necesarias 2x + 3y. *Como solo disponen de 184 de M1 y 100 de M2* → $8x+4y\le 184 \qquad 2x+3y\le 100$

Garantizando un nivel de fabricación total de al menos 15 unidades → $x+y\ge 15$

Además deben ser cantidades positivas → $x\ge 0 \quad y\ge 0$

Reuniendo todas las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 8x+4y\le 184 \\ 2x+3y\le 100 \\ x+y\ge 15 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y\le 46 \\ 2x+3y\le 100 \\ x+y\ge 15 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

$2x + y = 46 \Rightarrow y = 46 - 2x$

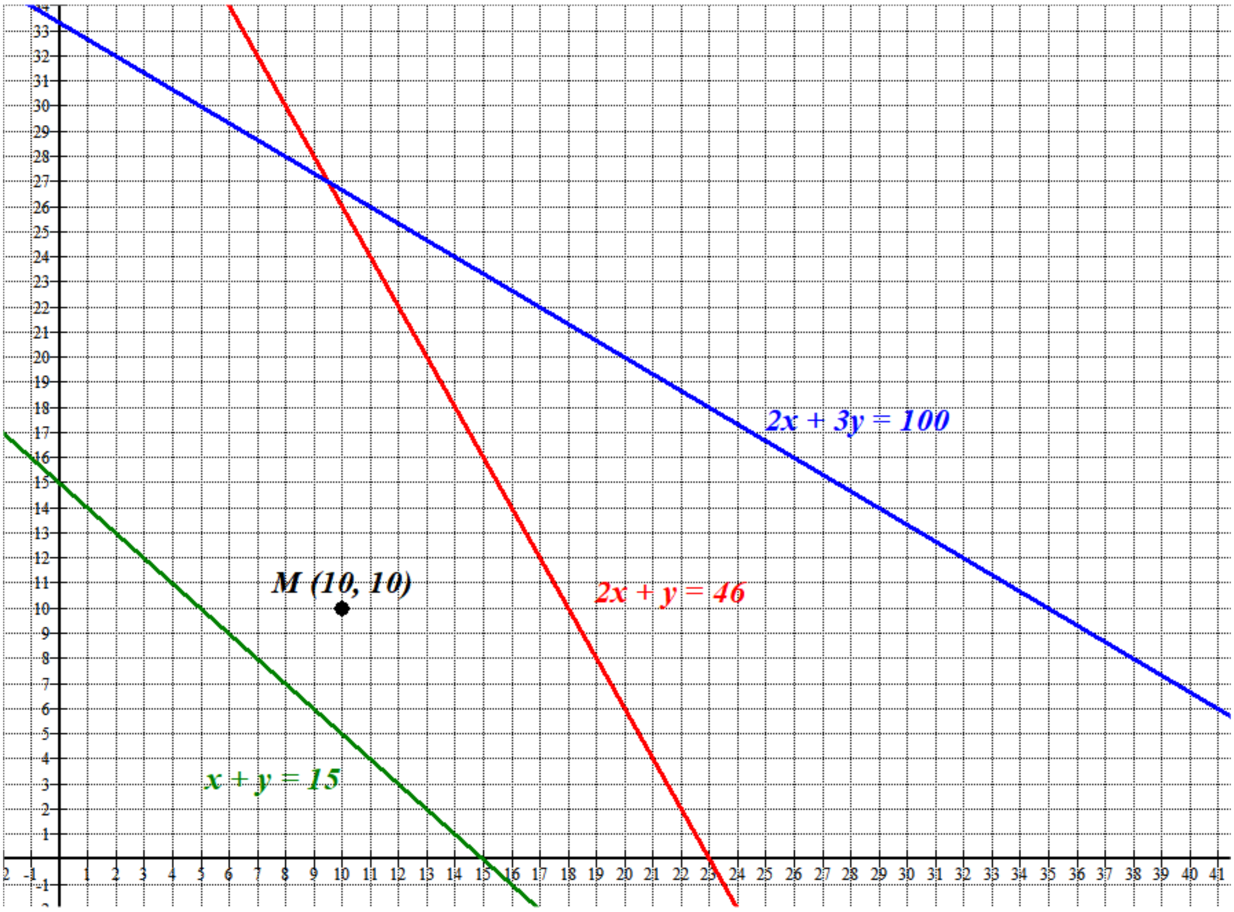
x	$y = 46 - 2x$
0	46
20	6

$2x + 3y = 100 \Rightarrow y = \frac{100-2x}{3}$

x	$y = \frac{100-2x}{3}$
50	0
35	10
11	26

$x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$

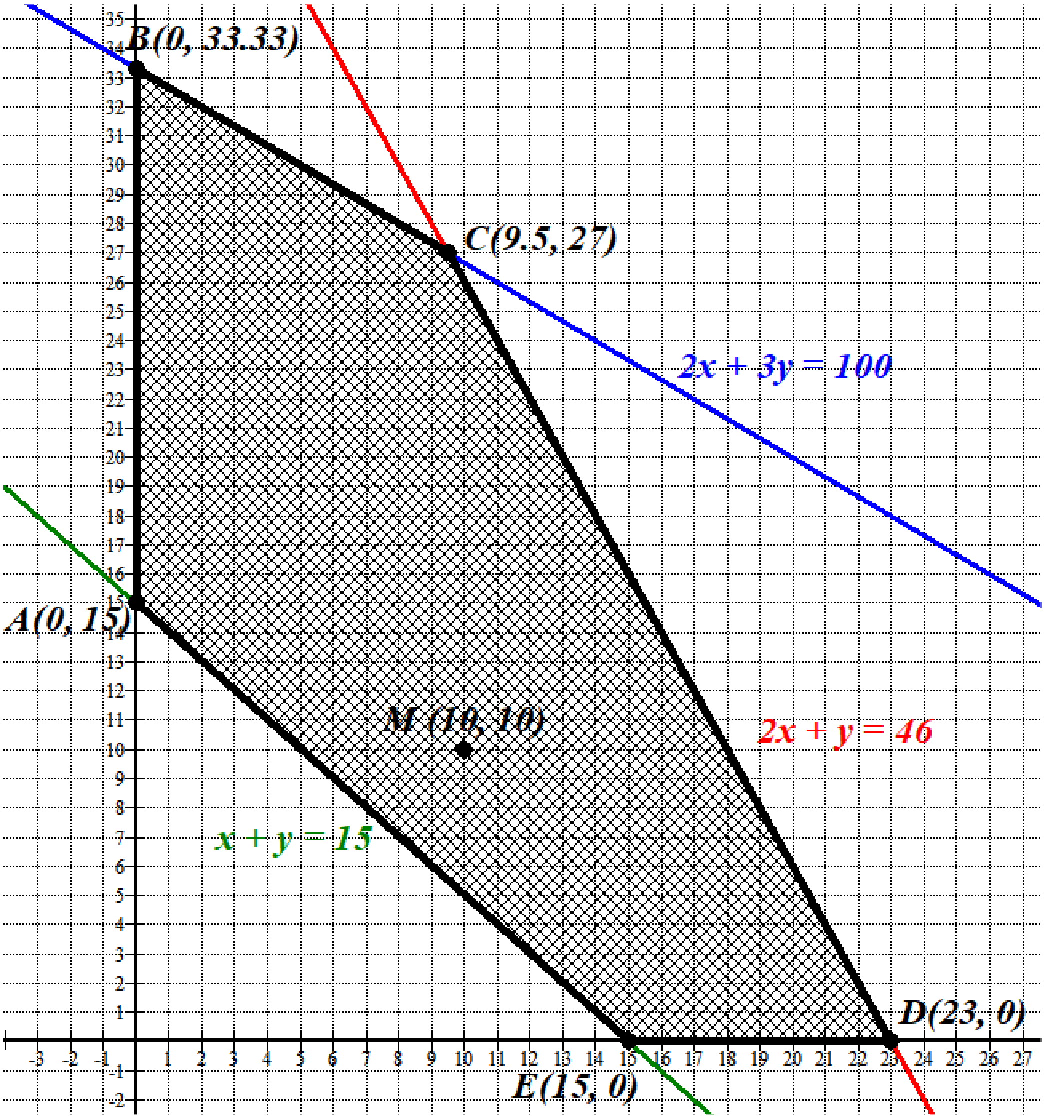
x	$y = 15 - x$
0	15
10	5
15	0



Comprobamos que el punto M (10, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 20+10 \leq 46 \\ 20+30 \leq 100 \\ 10+10 \geq 15 \\ 10 \geq 0 \\ 10 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Cumple las restricciones y por tanto la región factible es la que contiene a M(10, 10) y está limitada por las tres rectas y los ejes de coordenadas X e Y.



Averiguamos los puntos de corte de las rectas resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=15 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=15 \text{ Tenemos el vértice A(0,15)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=100 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=100 \Rightarrow y=\frac{100}{3}=33,33 \text{ Tenemos B(0, 100/3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=100 \\ 2x+y=46 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=100 \\ -2x-y=-46 \end{array}\right\}$$

$$2y=54 \Rightarrow y=27$$

$$2x+27=46 \Rightarrow 2x=19 \Rightarrow x=9,5 \qquad \text{Tenemos C(9.5, 27)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=46 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=46 \Rightarrow x=23 \text{ Tenemos D(23,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=15 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=15 \text{ Tenemos E(15,0)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=175x+225y$ en cada uno de los vértices de la región factible y vemos cual proporciona mayor beneficio.

A(0, 15) → $B(0,15)=0+3475=3475$

B(0, 100/3) → $B(0,100/3)=0+7500=7500$

C(9.5, 27) → $B(9.5,27)=7737.5$

D(23, 0) → $B(23,0)=4025$

E(15, 0) → $B(15,0)=2625$

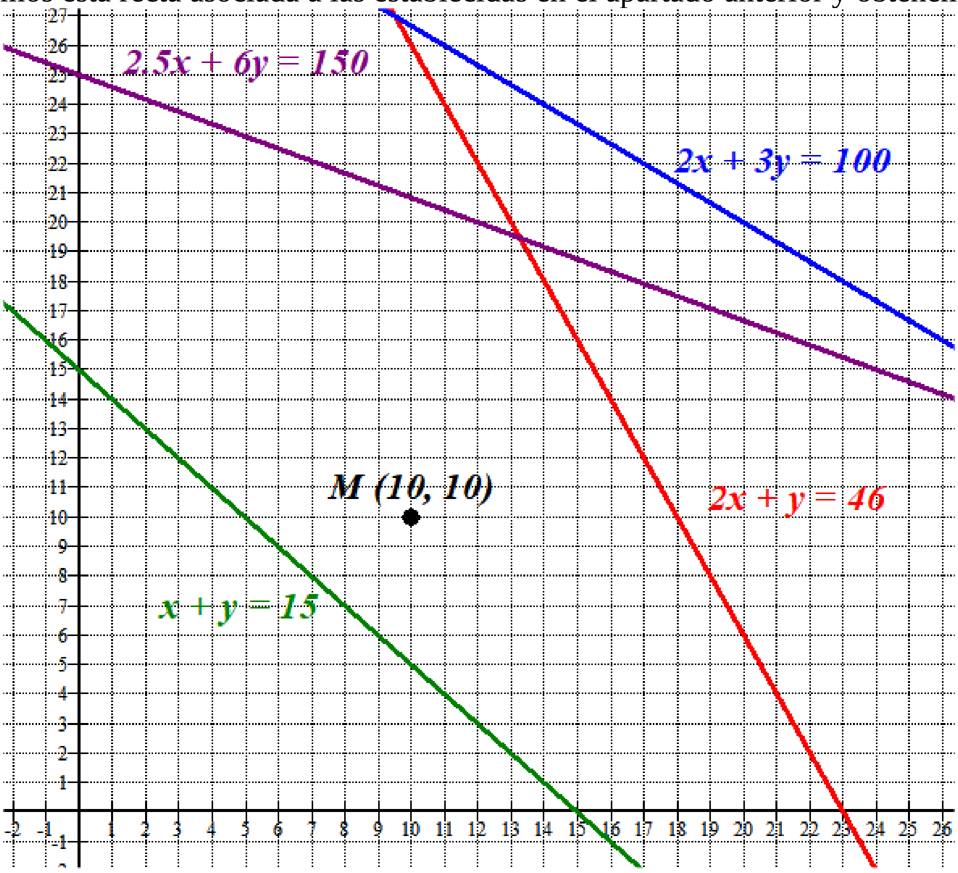
El máximo beneficio se obtiene en el punto C(9.5, 27). Hay que producir 9,5 toneladas del producto A y 27 del producto B para maximizar el beneficio.

iii)

Hay que añadir una nueva restricción.

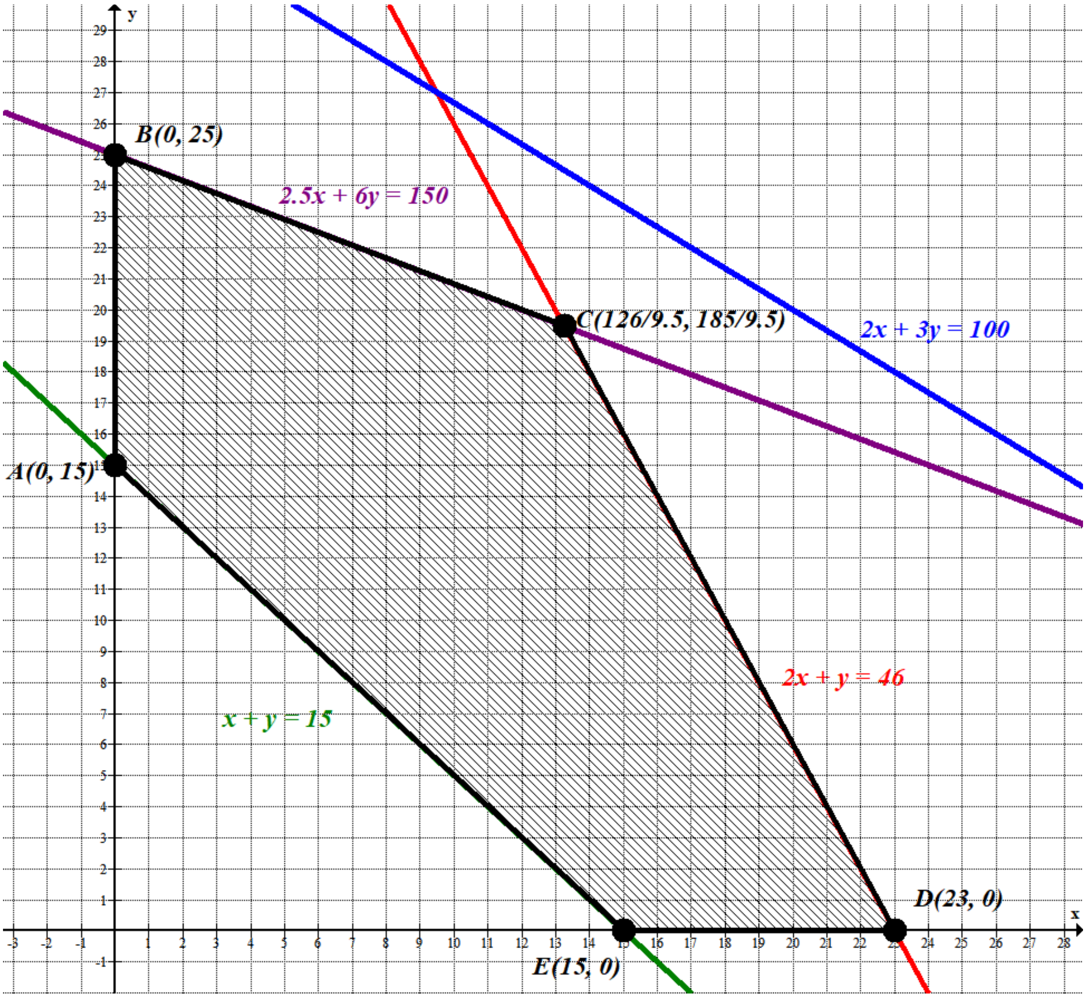
La fabricación de una tonelada de A genera 2,5 unidades de emisiones contaminantes y la de una tonelada de B genera 6 unidades y no se puede superar el nivel de 150 unidades de emisiones diarias → $2,5x+6y\le 150$

Añadimos esta recta asociada a las establecidas en el apartado anterior y obtenemos:



El punto M(10, 10) cumple las restricciones anteriores y también la nueva restricción $25+60\le 150$

La región factible se reduce a la siguiente:



Los vértices B y C cambian de valor, se mantienen los vértices A, D y E.

$$\left.\begin{array}{l} 2,5x+6y=150 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6y=150 \Rightarrow y=\frac{150}{6}=25 \text{ Tenemos el vértice B(0,25)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2,5x+6y=150 \\ 2x+y=46 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2,5x+6y=150 \\ y=46-2x \end{array}\right\} \Rightarrow 2,5x+6(46-2x)=150 \Rightarrow 2,5x+276-12x=150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9,5x=-126 \Rightarrow x=\frac{126}{9,5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=46-2\cdot\frac{126}{9,5}=\frac{185}{9,5} \text{ Tenemos el vértice C(126/9.5, 185/9.5)}$$

Valoramos el beneficio $B(x,y)=175x+225y$ en los nuevos vértices y obtenemos el nuevo valor máximo.

A(0, 15) → $B(0,15)=0+3475=3475$

B(0, 25) → $B(0,25)=5625$

C(126/9.5, 185/9.5) → $B(126/9.5,\ 185/9.5)=6702.6$

D(23, 0) → $B(23,0)=4025$

E(15, 0) → $B(15,0)=2625$

El nuevo valor máximo se alcanza en el punto C(13.26, 19.47). Deben producirse 13.26 toneladas de A y 19.47 de B.

EJERCICIO 2:

a) Calcule las siguientes integrales:

i) $\int sen(3x)(\cos(3x))^2 dx$ (1 punto)

ii) $\int \left(5+3x^2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)dx$ (1 punto)

b) Calcule dos funciones distintas cuya derivada sea $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x+2)}}+e^{2x}$ (1.5 puntos)

a)

i)

$$\int sen(3x)(\cos(3x))^2 dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \cos(3x)=t \Rightarrow -3sen(3x)dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{-3sen(3x)}\end{array}\right\} =$$

$$= \int \cancel{sen(3x)}t^2 \frac{dt}{-3\,\cancel{sen(3x)}} = \frac{-1}{3}\int t^2 dt = \frac{-1}{3}\cdot\frac{t^3}{3} = \frac{-t^3}{9} = \left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos}\\ \text{cambio de variable}\\ \cos(3x)=t\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{-(\cos(3x))^3}{9} = \boxed{-\frac{\cos^3(3x)}{9}+K}$$

ii)

$$\int\left(5+3x^2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)dx = \int 5dx+3\int x^2dx+\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{x^3}dx = \int 5dx+3\int x^2dx+\int\frac{1}{x}dx+2\int x^{-3}dx =$$

$$= 5x+3\frac{x^3}{3}+\ln x+2\frac{x^{-2}}{-2} = \boxed{5x+x^3+\ln x-\frac{1}{x^2}+K}$$

b) Debo calcular la integral de la función dada y luego darle dos valores distintos a K.

$$F(x)=\int\frac{1}{\sqrt{(x+2)}}+e^{2x}dx = \int\frac{1}{\sqrt{x+2}}dx+\int e^{2x}dx = \int(x+2)^{-1/2}dx+\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{(x+2)^{1/2}}{1/2}+\frac{1}{2}e^{2x} = \boxed{2\sqrt{x+2}+\frac{e^{2x}}{2}+K}$$

Doy a K el valor 0 y obtengo la función $F_0(x)=2\sqrt{x+2}+\frac{e^{2x}}{2}$

Doy a K el valor 1 y obtengo la función $F_1(x)=2\sqrt{x+2}+\frac{e^{2x}}{2}+1$

EJERCICIO 3:
Una caja contiene doce bolígrafos, de los cuales cuatro son defectuosos. Se extraen tres bolígrafos de forma sucesiva y sin devolverlos a la caja.

i) Calcule la probabilidad de que los tres bolígrafos extraídos no tengan defectos. (1 punto)
ii) Calcule la probabilidad de que al menos un bolígrafo de entre los tres extraídos sea defectuoso. (1 punto)
iii) Calcule la probabilidad de que solamente un bolígrafo sea defectuoso. (1 punto)

Son 3 extracciones sucesivas dependientes una de lo que haya ocurrido en la o las anteriores extracciones. Se puede hacer con diagrama de árbol.

i)

$$P(\text{Los 3 boligrafos estan bien}) =$$
$$= P(\text{El bolígrafo 1 esté bien})P(\text{El bolígrafo 2 esté bien})P(\text{El bolígrafo 3 esté bien}) =$$
$$= \frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10} = \boxed{\frac{14}{55} = 0,255}$$

ii) Esta probabilidad es laboriosa si la calculamos con el suceso directo. Vamos a utilizar el suceso contrario que es más sencillo el cálculo de su probabilidad.

$$P(\text{Al menos 1 de los boligrafos sea defectuoso}) =$$
$$= 1 - P(\text{Los 3 boligrafos estan bien}) = 1 - \frac{14}{55} = \boxed{\frac{41}{55} = 0,745}$$

iii)

$$P(\text{Sólo 1 boígrafo sea defectuoso}) =$$
$$= P(\text{El bolígrafo 1 sea defectuoso})P(\text{El 2 esté bien})P(\text{El 3 esté bien}) +$$
$$+ P(\text{El bolígrafo 1 está bien})P(\text{El 2 sea defectuoso})P(\text{El 3 esté bien}) +$$
$$+ P(\text{El bolígrafo 1 esté bien})P(\text{El 2 esté bien})P(\text{El 3 sea defectuoso}) =$$
$$= \frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10} + \frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10} + \frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10} = 3\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10} =$$
$$= \boxed{\frac{28}{55} = 0,509}$$

OPCIÓN B

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $X=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,

i) Resuelva el sistema siguiente y compruebe si su solución coincide con las matrices anteriores X e Y:

$$\begin{array}{l}2A-3B=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&-3&1\end{pmatrix}\\3A-2B=\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-2&4\end{pmatrix}\end{array}$$

(2.5 puntos)

ii) Razone si la matriz X+Y es invertible. (1 punto)

i)

$$\left.\begin{array}{l}2A-3B=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&-3&1\end{pmatrix}\\3A-2B=\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-2&4\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\{3\cdot\text{ Ecuación }1^{\text{a}}\text{ - }2\cdot\text{ Ecuación }2^{\text{a}}\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{6A}-9B-\cancel{6A}+4B=3\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&-3&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-2&4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5B=\begin{pmatrix}-10&0&-5\\-5&-5&-5\end{pmatrix}\Rightarrow B=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}-10&0&-5\\-5&-5&-5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}}\text{ Sustituyendo en la }1^{\text{a}}\text{ Ecuación}$$

$$2A-3\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&-3&1\end{pmatrix}\Rightarrow 2A=\begin{pmatrix}6&0&3\\3&3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&-3&1\end{pmatrix}$$

$$2A=\begin{pmatrix}6&2&2\\2&0&4\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}}$$

Las matrices solución son A = X y B = Y.

OTRA FORMA DE HACERLO

Sustituimos en el sistema A por X y B por Y comprobando si se cumplen las dos igualdades.

ii)

$$X+Y=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}$$

Esta matriz no es cuadrada por lo que no podemos hablar de su inversa.

Si ampliamos el concepto de inversa a matrices no cuadradas, sería buscar una matriz Z de dimensión 3x2 tal que:

$$\left(X+Y\right)Z=I_2$$
$$Z\left(X+Y\right)=I_3$$

Busquemos esa matriz (si fuese posible).

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}5&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}5a+c+2e&5b+d+2f\\2a+c+3e&2b+d+3f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ \Rightarrow\begin{pmatrix}5a+2b&a+b&2a+3b\\5c+2d&c+d&2c+3d\\5e+2f&e+f&2e+3f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5a+c+2e=1\\5b+d+2f=0\\2a+c+3e=0\\2b+d+3f=1\\5a+2b=1\\a+b=0\\2a+3b=0\\5c+2d=0\\c+d=1\\2c+3d=0\\5e+2f=0\\e+f=0\\2e+3f=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5a+c+2e=1\\5b+d+2f=0\\2a+c+3e=0\\2b+d+3f=1\\5a+2b=1\\a=-b\\2a+3b=0\\5c+2d=0\\c=1-d\\2c+3d=0\\5e+2f=0\\e=-f\\2e+3f=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-5b+1-d+2e=1\\5b+d+2f=0\\-2b+1-d-3f=0\\2b+d+3f=1\\-5b+2b=1\\-2b+3b=0\\5-5d+2d=0\\2-2d+3d=0\\-5f+2f=0\\-2f+3f=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-5b-d+2e=0\\5b+d+2f=0\\-2b+1-d-3f=0\\2b+d+3f=1\\-3b=1\\b=0\\5-5d+2d=0\\2-2d+3d=0\\-3f=0\\f=1\end{array}\right\}$$

Esto no es posible, pues nos sale b y f igual a dos valores distintos y no existe la inversa.

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x)=\dfrac{3}{x^2-4}$, calcule:

i) Dominio y puntos de corte con los ejes. (0.25 puntos)
ii) Asíntotas. (0.75 puntos)
iii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. (0.75 puntos)
iv) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. (0.75 puntos)
v) Con los datos que ha obtenido, dibuje su gráfica. (1 punto)

i) El dominio de la función son todos los valores reales salvo los que anulen el denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Punto de corte con eje OX →y = 0

$$0=\frac{3}{x^2-4} \Rightarrow 0=3$$

No es posible. No existen puntos de corte con eje OX.

Punto de corte con eje OY →x = 0

$$f(0)=\frac{3}{0^2-4}=\frac{-3}{4}$$

El punto de corte con eje OY es $\left(0,\dfrac{-3}{4}\right)$

ii)

Asíntota vertical. $x=a$

Existen dos: $x=2 \quad y \quad x=-2$

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2-4}=\frac{3}{\infty}=0$$

La asíntota horizontal es $y=0$

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No existe, pues la función ya tiene una asíntota horizontal

iii) Calculamos la derivada e igualamos a cero.

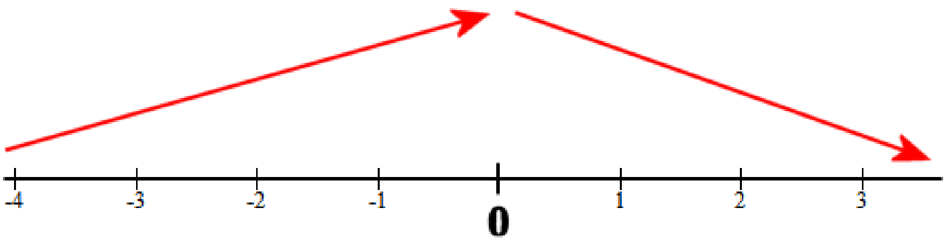
$$f(x)=\frac{3}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{0-2x\cdot 3}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-6x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-6x}{\left(x^2-4\right)^2}=0 \Rightarrow -6x=0 \Rightarrow x=0$$

En x = 0 existe un punto crítico de la función. Averiguamos cómo se comporta la función antes y después de dicho valor. No consideramos x = 2 ni x = –2, pues el denominador de la derivada está elevado al cuadrado y no cambia de signo.

En $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ tomamos x = –1 y la derivada es $f\,´(-1)=\dfrac{6}{\left((-1)^2-4\right)^2}>0$. La función crece.

En $(0,2)\cup(2,+\infty)$ tomamos x = 1 y la derivada es $f\,´(1)=\dfrac{-6}{(1-4)^2}<0$. La función decrece.



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.
Tiene un máximo en $x=0$

iv) Para estudiar la curvatura calculamos la derivada segunda e igualamos a cero.

$$f\,´(x)=\frac{-6x}{\left(x^2-4\right)^2}\Rightarrow f\,´´(x)=\frac{-6\left(x^2-4\right)^2-2\left(x^2-4\right)2x(-6x)}{\left(x^2-4\right)^4}$$

$$f\,´´(x)=\frac{-6\left(x^2-4\right)^{\cancel{2}}+24x^2\cancel{\left(x^2-4\right)}}{\left(x^2-4\right)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f\,´´(x)=\frac{-6\left(x^2-4\right)+24x^2}{\left(x^2-4\right)^3}=\frac{-6x^2+24+24x^2}{\left(x^2-4\right)^3}=\frac{24+18x^2}{\left(x^2-4\right)^3}$$

$$f\,´´(x)=0\Rightarrow\frac{24+18x^2}{\left(x^2-4\right)^3}=0$$

$$24+18x^2=0\Rightarrow 4+3x^2=0\Rightarrow 3x^2=-4\Rightarrow x^2=\frac{-4}{3}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{-4}{3}}=\text{No existe}$$

No hay puntos de inflexión.

Estudiemos la curvatura antes de –2, entre –2 y 2 y después de 2.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos x = –3 y la derivada segunda vale $f\,´´(-3)=\dfrac{24+18(-3)^2}{\left((-3)^2-4\right)^3}=\dfrac{+}{125}>0$. La función es convexa ($\cup$).

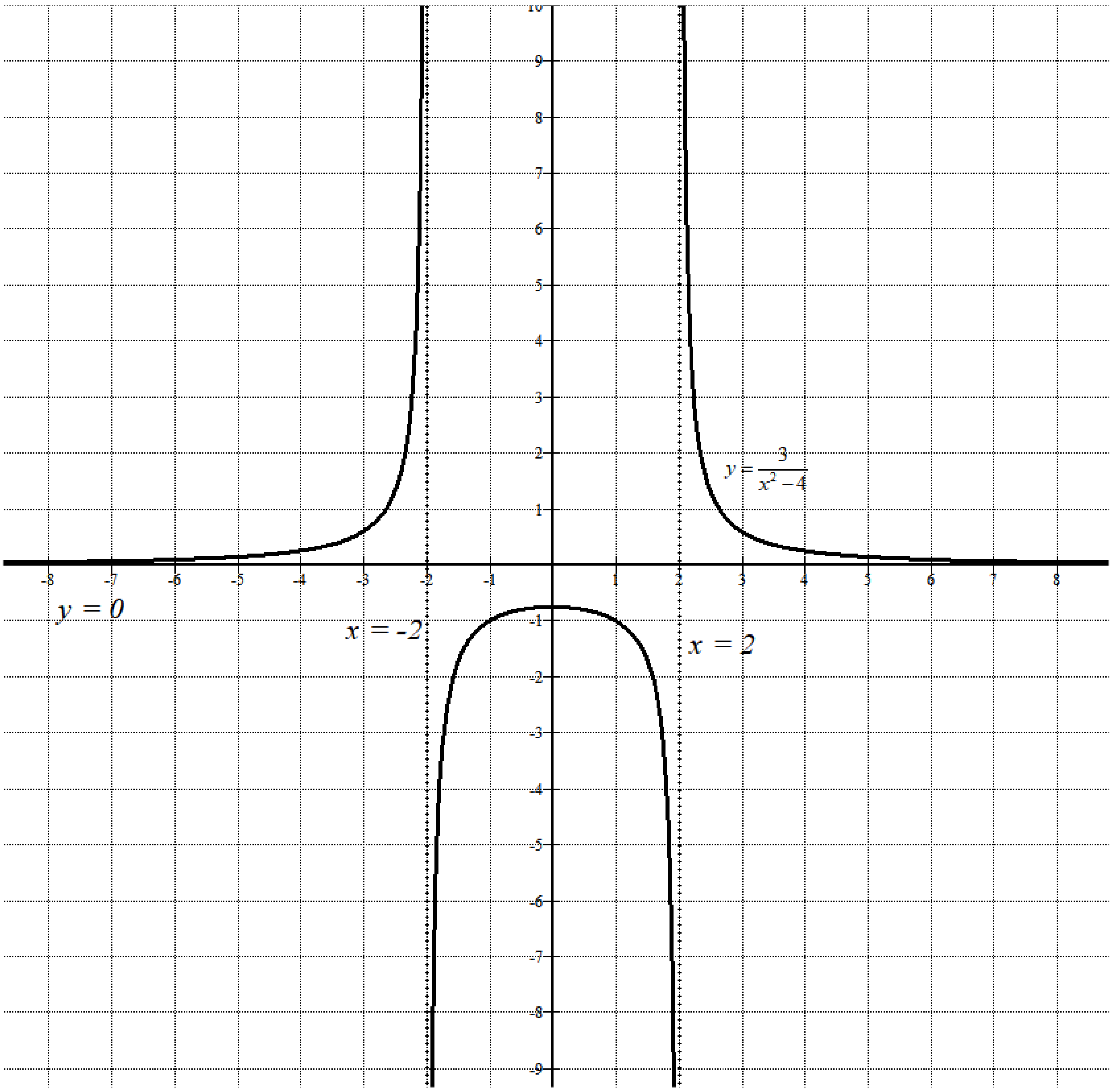
- En $(-2,2)$ tomamos x = 0 y la derivada segunda vale $f\,´´(0)=\dfrac{24}{(0-4)^3}=\dfrac{+}{-}<0$. La función es cóncava ($\cap$).

- En $(2,+\infty)$ tomamos x = 3 y la derivada segunda vale $f''(3)=\frac{24+18\cdot 9}{(9-4)^3}=\frac{+}{+}>0$. La función es convexa ($\cup$).

Resumiendo: La función no presenta puntos de inflexión, cambia de curvatura en las asíntotas verticales.
La función es convexa ($\cup$) en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y cóncava ($\cap$) en $(-2,2)$.

v) Añadimos a lo obtenido una tabla de valores y dibujamos la función.

x	$y=\frac{3}{x^2-4}$	x	$y=\frac{3}{x^2-4}$
-3	$3/5=0.6$	2	No existe
-2	No existe	3	0.6
-1	-1		
0	$-3/4=-0.75$		
1	-1		



EJERCICIO 3:
En una región se selecciona una muestra de 650 jóvenes y se observa que 500 de ellos son lectores habituales.
i) Construya un intervalo de confianza para la proporción poblacional de jóvenes no lectores habituales, con un nivel de confianza del 99%. (2 puntos)
ii) Analice el efecto que tiene en el intervalo la disminución del nivel de confianza. (1 punto)
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

i) La proporción de jóvenes no lectores habituales obtenida es $p=\frac{150}{650}=\frac{3}{13}=0,231; \quad n=650$.

Para un nivel de confianza del 99% obtenemos $1-\alpha=0,99 \rightarrow \alpha=0,01 \rightarrow \alpha/2=0,005 \rightarrow$
$1-\alpha/2=0,995 \rightarrow z_{\alpha/2}=2,575$

El intervalo de confianza para la proporción de jóvenes no lectores habituales es:

$$\left(p-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}},\ p+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{13}-2,575\cdot\sqrt{\frac{3/13\cdot 10/13}{650}},\frac{3}{13}+2,575\cdot\sqrt{\frac{3/13\cdot 10/13}{650}}\right)=(0.188,\ 0.273)$$

El intervalo de confianza para la proporción es $(0.188, 0.273)$

(a) Si el nivel de confianza disminuyese el intervalo sería de menos amplitud.
Por ejemplo con un nivel de confianza del 90%.

$1-\alpha=0,90 \rightarrow \alpha=0,1 \rightarrow \alpha/2=0,05 \rightarrow 1-\alpha/2=0,95 \rightarrow z_{\alpha/2}=1,645$

$$\left(p-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}},\ p+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{13}-1,645\cdot\sqrt{\frac{3/13\cdot 10/13}{650}},\frac{3}{13}+1,645\cdot\sqrt{\frac{3/13\cdot 10/13}{650}}\right)=(0.203,\ 0.258)$$