Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

## Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

**1** Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio, las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales. (5 puntos)

b) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones de cada empresa. (5 puntos)

**2** En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0.9 $m^2$ de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan 1.2 $m^2$ de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 $m^2$ de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.

a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)

c) Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

**3** Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x-ay+2z&=0\\ ax-4y-4z&=0\\ 4x+3y-2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

en función del parámetro *a*.

a) Discuta para qué valores de *a* el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (6 puntos)

b) Encuentre la solución para *a* = –2. (4 puntos)

**4** Consideremos la función a trozos siguiente

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si \quad x<0 \\ x^3+ax+2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule los valores de *a* para que *f(x)* sea continua y derivable. (5 puntos)

b) Para *a = 4* calcule el área comprendida entre la gráfica de *f(x)* y las rectas *x = 0, x = 1* e *y = 0.* (5 puntos)

**5** El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función:

$$f(x)=\frac{100x}{b+x^2},$$

en la que $x \geq 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.

a) Encuentre el valor de $b$ para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2 mil euros. (3 puntos)

b) Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto? (4 puntos)

c) Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros? (3 puntos)

6 Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1.5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Encuentre:

a) La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada. (3 puntos)

b) La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada. (2 puntos)

c) El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos. (3 puntos)

d) El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y estos ingresos máximos. (2 puntos)

**7** La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.

a) Calcule el tamaño de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1.5 kg. (5 puntos)

b) Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con producciones en kilogramos:

30 25 4 70 45 60 21 32 9 47

Calcule el intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol. . (5 puntos)

**8** En cierta empresa de exportación, el 62.5 % de los empleados hablan inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán

a) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas? (4 puntos)

b) ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán? (3 puntos)

c) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad que hable inglés? (3 puntos)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.1 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Taula de la distribució normal N(0, 1)

# SOLUCIONES

**1** Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio, las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.
a) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales. (5 puntos)
b) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones de cada empresa. (5 puntos)

a) Llamamos $a$ = Dinero (en miles de euros) invertido en la empresa A, $b$ = Dinero (en miles de euros) invertido en la empresa B y $c$ = Dinero (en miles de euros) invertido en la empresa C.

"*Una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 euros en acciones de tres empresas*" → $a+b+c=100$

*"Las acciones de A valen ahora un 150 %, las de B un 110 % y las de C un 85 %. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 euros"* → $1.50a+1.10b+0.85c=102$

*"Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas*" → $c=a+b$.

Juntamos las tres ecuaciones y nos queda un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=100 \\ 1.50a+1.10b+0.85c=102 \\ c=a+b \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=100 \\ 1.50a+1.10b+0.85c=102 \\ c=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+a+b=100 \\ 1.50a+1.10b+0.85(a+b)=102 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+2b=100 \\ 1.50a+1.10b+0.85a+0.85b=102 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=50 \\ 2.35a+1.95b=102 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=50-a \\ 2.35a+1.95b=102 \end{array}\right\} \Rightarrow 2.35a+1.95(50-a)=102 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.35a+97.5-1.95a=102 \Rightarrow 0.4a=4.5 \Rightarrow \boxed{a=11.25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=50-11.25=38.75} \Rightarrow \boxed{c=11.25+38.75=50}$$

Se han invertido 11250 € en acciones de A, 38750 € en acciones de B y 50000 € en acciones de C.

**2** En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0.9 m$^2$ de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan 1.2 m$^2$ de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m$^2$ de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.
a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)
b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
c) Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

a) Llamamos x = número de bolsas del primer modelo, y = número de bolsas del segundo modelo.

Realizamos una tabla.

| | m$^2$ de cuero | Horas de trabajo | Beneficio |
|---|---|---|---|
| Nº bolsas de primer modelo (x) | **0.9x** | **8x** | **30x** |
| Nº bolsas de segundo modelo (y) | **1.2y** | **4y** | **25y** |
| TOTAL | $0.9x+1.2y$ | $8x+4y$ | $30x+25y$ |

La función a maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión:

$$B(x,y)=30x+25y$$

Las restricciones son:

"*Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m$^2$ de cuero*" → $0.9x+1.2y\le 60$

"*Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo*" → $8x+4y\le 400$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l}0.9x+1.2y\le 60\\ 8x+4y\le 400\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}9x+12y\le 600\\ 2x+y\le 100\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+4y\le 200\\ 2x+y\le 100\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$3x+4y=200$

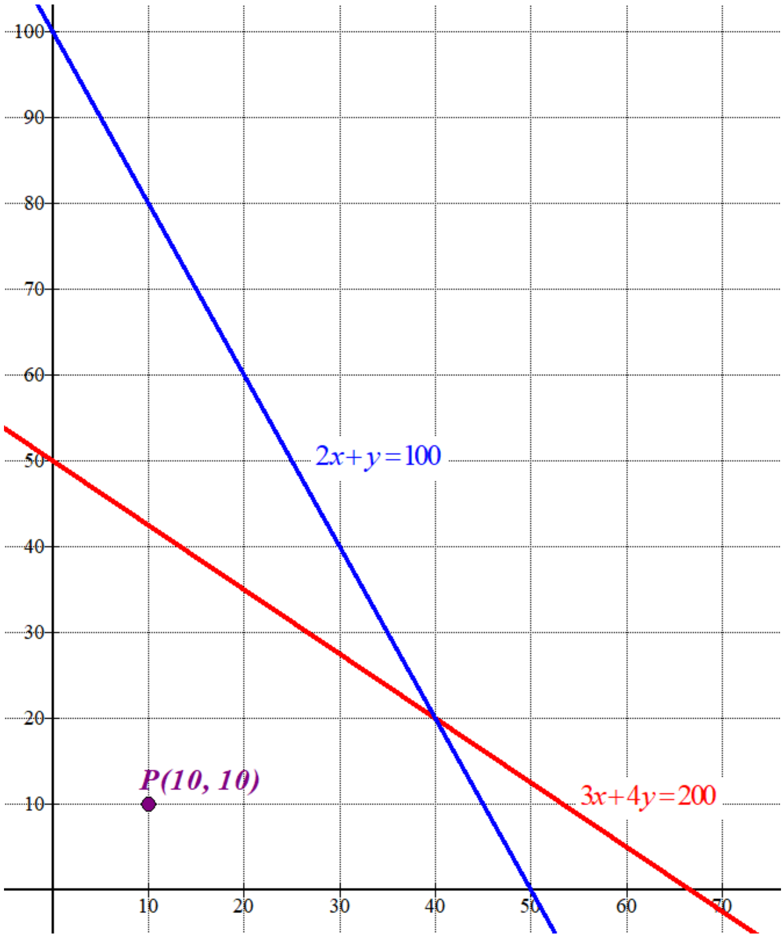
| $x$ | $y=\dfrac{200-3x}{4}$ |
|---|---|
| 0 | 120 |
| 40 | 20 |
| 60 | 5 |

$2x+y=100$

| $x$ | $y=100-2x$ |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 40 | 20 |
| 50 | 0 |

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

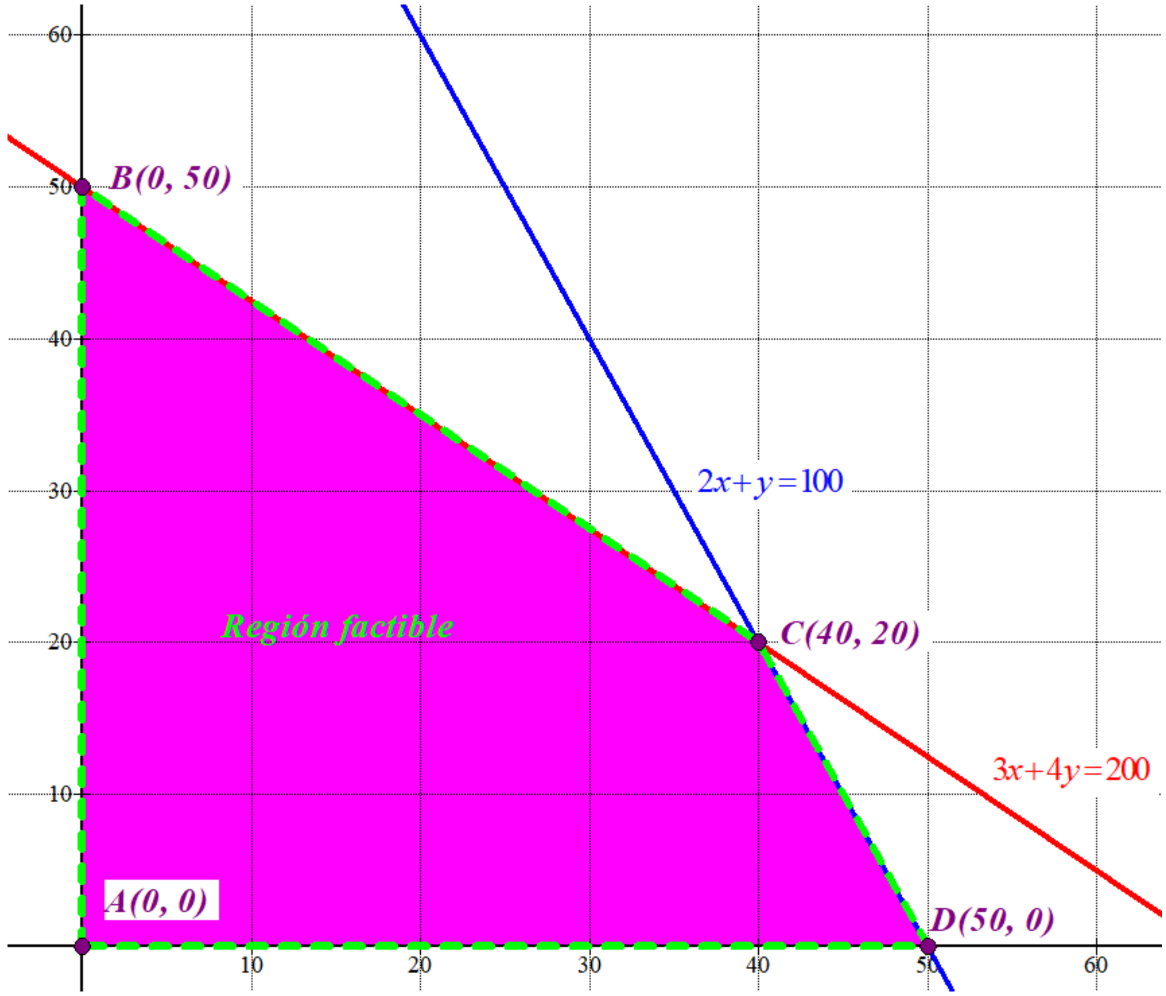



La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones $\left.\begin{array}{l} 3x+4y \leq 200 \\ 2x+y \leq 100 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$, por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30+40 \leq 200 \\ 20+10 \leq 100 \\ 10 \geq 0;\ 10 \geq 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.




c) Para obtener el máximo beneficio valoramos la función $B(x,y)=30x+25y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 50) → $B(0,50)=0+1250=1250$

C(40, 20) → $B(40,20)=1200+500=1700$ ¡Máximo!

D(50, 0) → $B(50,0)=1500+0=1500$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(40, 20). Significa que fabricando 40 bolsas del primer tipo y 20 del segundo se consiguen unos beneficios máximos de 1700 €.

**3** Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x-ay+2z=0 \\ ax-4y-4z=0 \\ 4x+3y-2z=0 \end{array}\right\}$$

en función del parámetro *a*.

a) Discuta para qué valores de *a* el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (6 puntos)

b) Encuentre la solución para *a* = –2. (4 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=8+16a+6a+32-2a^2+12=-2a^2+22a+52$$

$$|A|=0 \Rightarrow -2a^2+22a+52=0 \Rightarrow a^2-11a-26=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{11\pm\sqrt{(-11)^2-4(-26)}}{2}=\frac{11\pm 15}{2}=\begin{cases} \dfrac{11+15}{2}=13=a \\ \dfrac{11-15}{2}=-2=a \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

**CASO 1.** $a\neq 13$ y $a\neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas (3).

El sistema tiene una única solución.

**CASO 2.** $a=13$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -13 & 2 & 0 \\ 13 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^{a} - 13 \cdot \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 13 & -4 & -4 & 0 \\ -13 & +169 & -26 & 0 \\ \hline 0 & 165 & -30 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^{a} - 4 \cdot \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 4 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & 52 & -8 & 0 \\ \hline 0 & 55 & -10 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -13 & 2 & 0 \\ 0 & 165 & -30 & 0 \\ 0 & 55 & -10 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 165 & -30 & 0 \\ 0 & -165 & +30 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -13 & 2 & 0 \\ 0 & 165 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B y es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema tiene infinitas soluciones.

**CASO 3.** $a = -2$
En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -2 & -4 & -4 & 0 \\ +2 & +4 & +4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 4 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 4 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -8 & -8 & 0 \\ \hline 0 & -5 & -10 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Intercambiamos Fila } 2^a \text{ y Fila } 3^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B y es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema tiene infinitas soluciones.

b) Para $a = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones (CASO 3).
Resolvemos el sistema partiendo del sistema equivalente obtenido por Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+2z=0 \\ -5y-10z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+2z=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+2z=0 \\ y=-2z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-4z+2z=0 \Rightarrow x=2z \Rightarrow \boxed{Solución: \begin{cases} x=2t \\ y=-2t, t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}}$$

**4** Consideremos la función a trozos siguiente

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si \quad x<0 \\ x^3+ax+2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule los valores de *a* para que *f(x)* sea continua y derivable. (5 puntos)
b) Para *a* = *4* calcule el área comprendida entre la gráfica de *f(x)* y las rectas *x* = *0*, *x* = *1* e *y* = *0*. (5 puntos)

a) Basta comprobar que es continua en *x* = *0*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2-3x+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^3+ax+2=2 \\ f(0)=0^3+a\cdot 0+2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=2$$

La función es continua independientemente del valor de “a”.

La derivada en $\mathbb{R}-\{0\}$ es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad x<0 \\ 3x^2+a & si \quad x>0 \end{cases}$$

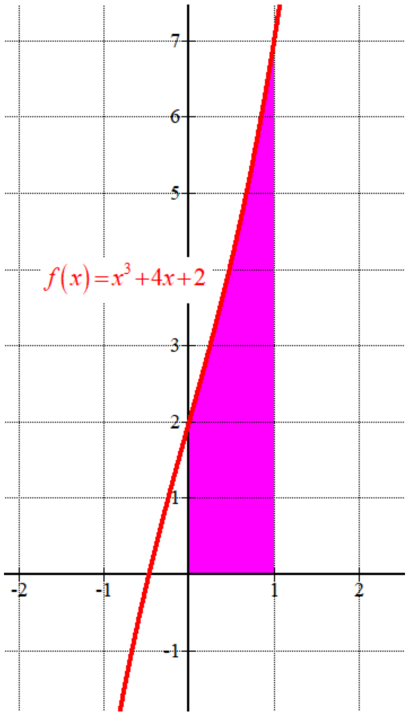
Para que sea derivable en *x* = *0* debe cumplirse que las derivadas laterales coincidan.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x-3=-3 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2+a=a \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=-3}$$

Para que la función sea continua y derivable debe ser *a* = *–3*.

b) Para *a* = *4* la función es $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si \quad x<0 \\ x^3+4x+2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$.

Como el área está comprendida entre las rectas *x* = *0*, *x* = *1* la función es $f(x)=x^3+4x+2$.




$$Área=\int_0^1 x^3+4x+2\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+2x^2+2x\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^4}{4}+2\cdot 1^2+2\cdot 1\right]-\left[\frac{0^4}{4}+2\cdot 0^2+2\cdot 0\right]$$

$$\boxed{Área=\frac{1}{4}+2+2=\frac{17}{4}=4.25u^2}$$

**5** El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función:

$$f(x)=\frac{100x}{b+x^2},$$

en la que $x \geq 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.
a) Encuentre el valor de $b$ para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2 mil euros. (3 puntos)
b) Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto? (4 puntos)
c) Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros? (3 puntos)

a) En $x = 2$ hay un máximo. La derivada se anula para $x = 2$.

$$f'(x)=\frac{100(b+x^2)-(2x)100x}{(b+x^2)^2}=\frac{100b+100x^2-200x^2}{(b+x^2)^2}=\frac{100b-100x^2}{(b+x^2)^2}$$

$$f'(2)=0 \Rightarrow \frac{100b-100\cdot 2^2}{(b+2^2)^2}=0 \Rightarrow 100b-400=0 \Rightarrow 100b=400 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

Comprobamos que para $b = 4$ la derivada es positiva antes de $x = 2$ y negativa después.

- En el intervalo $[0,2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{400-100\cdot 1^2}{(4+1^2)^2}=12>0$. La función crece en $[0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\frac{400-100\cdot 3^2}{(4+3^2)^2}=-\frac{500}{169}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

En $x = 2$ hay un máximo de la función $f(x)=\frac{100x}{4+x^2}$

b) Para $b = 9$ la función queda $f(x)=\frac{100x}{9+x^2}$.

$$f'(x)=\frac{100(9+x^2)-(2x)100x}{(9+x^2)^2}=\frac{900+100x^2-200x^2}{(9+x^2)^2}=\frac{900-100x^2}{(9+x^2)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{900-100x^2}{(9+x^2)^2}=0 \Rightarrow 900-100x^2=0 \Rightarrow 100x^2=900 \Rightarrow x^2=\frac{900}{100}=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{9}=\pm 3}$$

Solo nos interesa el valor positivo ($x = 3$). Estudiamos el signo de la derivada entre 0 y 3, y después de 3.

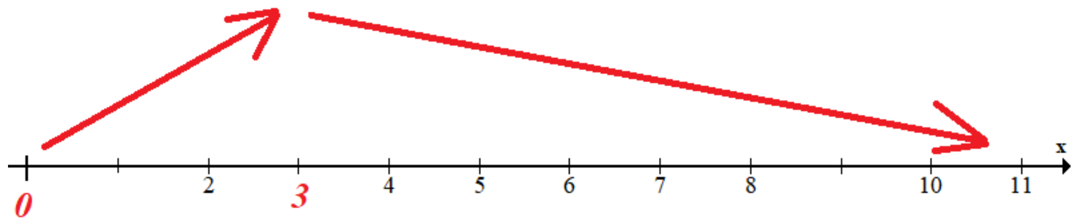
- En el intervalo $[0,3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{900-100\cdot 1^2}{\left(9+1^2\right)^2}=8>0$.

  La función crece en $[0,3)$.

- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

  $f'(4)=\frac{900-100\cdot 4^2}{\left(9+4^2\right)^2}=-\frac{28}{25}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



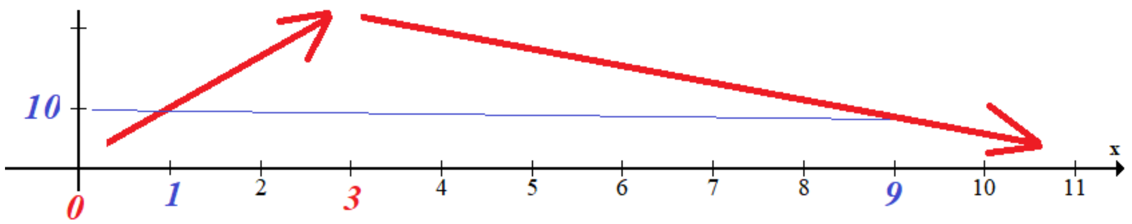

En $x = 3$ hay un máximo de la función $f(x)=\frac{100x}{9+x^2}$.

Como $f(3)=\frac{300}{9+3^2}=\frac{50}{3}\simeq 16.67$ tenemos que el gasto máximo es de 16.67 € y se produce con un salario de 3000 € mensuales.

c) Para $b = 9$ la función queda $f(x)=\frac{100x}{9+x^2}$.

$$f(x)=10\Rightarrow \frac{100x}{9+x^2}=10\Rightarrow \frac{10x}{9+x^2}=1\Rightarrow 10x=9+x^2\Rightarrow x^2-10x+9=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{cases}\frac{10+8}{2}=9=x\\ \frac{10-8}{2}=1=x\end{cases}$$




El gasto es de 10 € con un salario de 1000 o de 9000 €. Y entre 1000 y 9000 € el gasto es superior a 10 € como se aprecia en el esquema superior.

6 Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1.5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Encuentre:

a) La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada. (3 puntos)

b) La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada. (2 puntos)

c) El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos. (3 puntos)

d) El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y estos ingresos máximos. (2 puntos)

a) Llamamos *x* al precio de la entrada y *f(x)* al número de espectadores. El número de espectadores depende del precio de la entrada.

Sabemos que *f(8) = 500* y que si cuesta 9.5 euros hay 500 –30 = 470 espectadores.

La función es lineal y su expresión es $f(x) = mx + n$.

$$\left.\begin{array}{l} f(8) = 500 = 8m + n \\ f(9.5) = 470 = 9.5m + n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 500 = 8m + n \\ -470 = -9.5m - n \end{array}\right\}$$

$$\overline{\quad 30 = -1.5m \quad}$$

$$\Rightarrow m = \frac{30}{-1.5} = -20 \Rightarrow 500 = -160 + n \Rightarrow n = 660 \Rightarrow \boxed{f(x) = -20x + 660}$$

b) Los ingresos *I(x)* es el producto del número de entradas (*f(x)*) y el precio de la entrada (*x*).

$$I(x) = x \cdot f(x) = x(-20x + 660)$$

$$\boxed{I(x) = -20x^2 + 660x}$$

c) Derivamos e igualamos a cero la función ingresos.

$$I'(x) = -40x + 660$$

$$I'(x) = 0 \Rightarrow -40x + 660 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{660}{40} = 16.5}$$

Sustituimos *x = 16.5* en la segunda derivada

$$I''(x) = -40 \Rightarrow I''(16.5) = -40 < 0$$

La función ingresos presenta un máximo en *x = 16.5*.

Los ingresos son máximos con un precio de la entrada de 16.5 €.

d) Para *x = 16.5* tenemos ingresos máximos por valor de

$I(16.5) = -20 \cdot 16.5^2 + 660 \cdot 16.5 = \boxed{5445\ €}$.

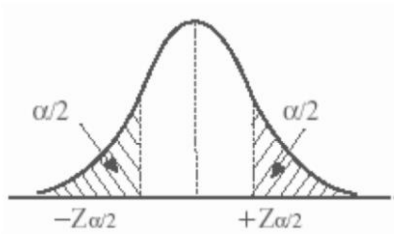
El número de espectadores para *x = 16.5* es de $f(16.5) = -20 \cdot 16.5 + 660 = \boxed{330}$.

**7** La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.
a) Calcule el tamaño de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1.5 kg. (5 puntos)
b) Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con producciones en kilogramos:
30 25 4 70 45 60 21 32 9 47
Calcule el intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol.
. (5 puntos)

X = Producción de naranjas por naranjo (en kilogramos).
X = N(**μ**, 2)

a) Con un nivel de confianza del 94 %

$$1-\alpha = 0{,}94 \rightarrow \alpha = 0{,}06 \rightarrow \alpha/2 = 0'03 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.88}$$




| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.53 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.57 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.61 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.65 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.68 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.72 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.75 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.78 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.81 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.83 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.86 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.88 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.90 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.91 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.93 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.94 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.95 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | [illegible] | 0.96 |
| 1.8 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.97 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.97 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.98 |

Igualamos el error a 1.5 kilogramos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5 = 1.88 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5\sqrt{n} = 1.88 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.88 \cdot 2}{1.5} \Rightarrow n = \left(\frac{1.88 \cdot 2}{1.5}\right)^2 = 6.2834$$

Como *n* debe ser entero y superior al "*n*" hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 7 naranjos.

b) Tamaño de muestra = $n$ = $10$. $\overline{x}=\dfrac{30+25+4+70+45+60+21+32+9+47}{10}=34.3\,kg$

Con un nivel de confianza del 97%

1 – α = 0,97 → α = 0,03 → α /2 = 0’015 →1 – α /2 = 0,985 → $z_{\alpha/2}$ **= 2,17**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.531 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.571 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.610 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.648 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.684 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.719 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.751 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.782 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.810 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.836 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.859 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.881 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.899 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.916 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.930 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.942 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.953 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.962 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.969 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.976 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.981 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.985 |

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.17\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}\simeq 1.372\,kg$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x}-Error,\ \overline{x}+Error\right)=\left(34.3-1.372,\ 34.3+1.372\right)=\left(32.928,\ 35.672\right)$$

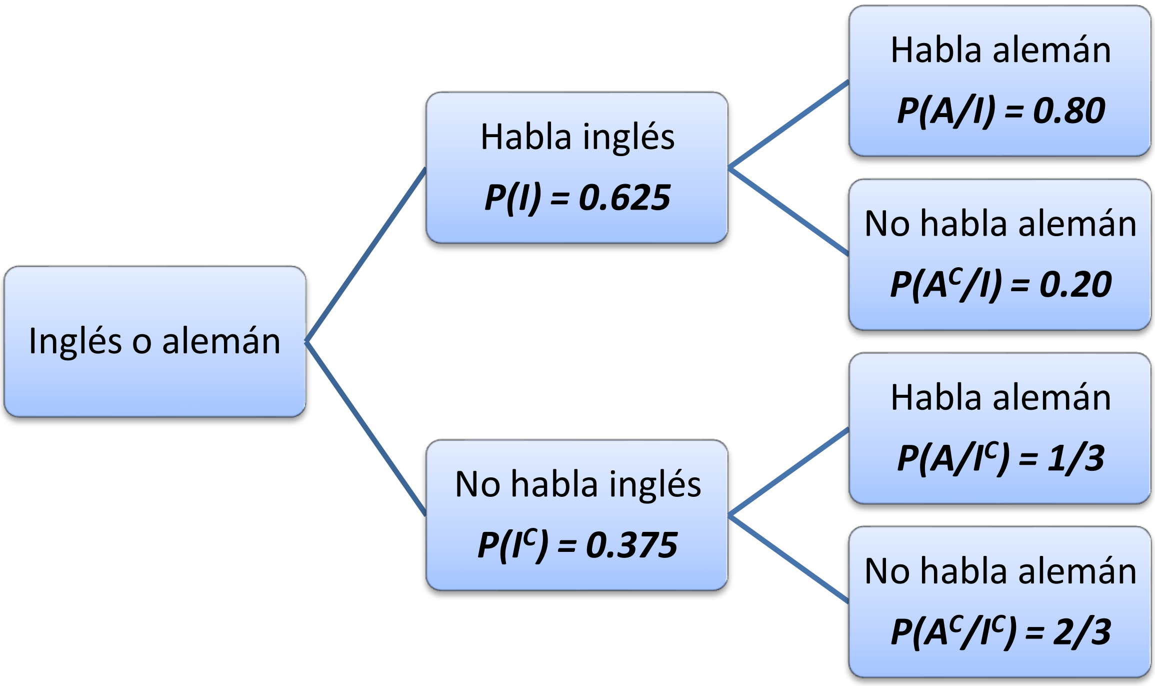
**8** En cierta empresa de exportación, el 62.5 % de los empleados hablan inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán

a) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas? (4 puntos)

b) ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán? (3 puntos)

c) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad que hable inglés? (3 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.




Hemos llamado I = Hablar inglés, A = Hablar alemán.

a) $P(I \cap A) = P(I)P(A/I) = 0.625 \cdot 0.8 = \boxed{0.5}$

Hablan los dos idiomas el 50 % de los empleados.

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(I)P(A/I) + P(I^C)P(A/I^C) = 0.625 \cdot 0.8 + 0.375 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{8} = 0.625$$

El 62.5 % de los empleados habla alemán.

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(I/A^C) = \frac{P(I \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{P(I)P(A^C/I)}{1 - P(A)} = \frac{0.625 \cdot 0.2}{1 - 0.625} = \boxed{\frac{1}{3} \simeq 0.333}$$