	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	**EXAMEN** **Nº Páginas: 2 (tabla adicional)**

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y **UNA** CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN
Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Una parcela produce tres cereales diferentes: maíz, trigo y centeno. En la parcela trabajan tres agricultores durante exactamente 8 horas diarias cada uno, y se utiliza el sistema de riego durante exactamente 60 minutos diarios. Para cuidar el maíz se emplean 2 horas de mano de obra y se necesitan 6 minutos de riego; para cuidar el trigo se emplean 4 horas de mano de obra y 4 minutos de riego; y para el centeno se emplea 1 hora de mano de obra y 4 minutos de riego. Si se deben producir exactamente 12 kilogramos en total de cereal al día por limitaciones en la producción, calcular los kilogramos de cada tipo de cereal que se producen en la parcela.

P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

a) Sea A^T la matriz traspuesta de A, indicar razonadamente cuáles de los producto de matrices $A \cdot B$, $B \cdot A^T$, $C \cdot D$ y $D \cdot A$ se pueden calcular. Determinar las dimensiones de las matrices resultantes en aquellos casos en los que sea posible realizar dichos productos.

b) Hallar la matriz X que es solución de la ecuación $X \cdot B = D$.

P3. (Análisis)

Un estudio realizado por el Centro Nacional de Ciberseguridad español ha revelado que el número de dispositivos móviles hackeados en España viene determinado, en millones de aparatos, por la función $f(t)=\dfrac{t^2+15}{(t+1)^2}$, donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo que corresponde al año 2005.

a) ¿Cuál es el número inicial de dispositivos hackeados?
b) Calcular el número mínimo de dispositivos hackeados, ¿En qué año se alcanza ese mínimo?
c) Calcular el número de dispositivos que habrá hackeados en España a largo plazo.

P4. (Análisis)

Sabiendo que la gráfica de la función $f(x)=ax^2+bx+c$, si $0\le x\le 60$ pasa por el punto (0, 20) y que alcanza un máximo de 36 en el punto de abscisa $x = 40$, se pide

a) Determinar a, b y c. Justificar la respuesta.

b) Calcular el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 60$.

P5. (Estadística y probabilidad)

Un estudio realizado sobre los estudiantes de las universidades de Castilla y León determina que el 40 % de los estudiantes procede de la misma provincia en la que está situada la universidad, el 20 % procede de otras provincias de Castilla y León y el resto procede de otras comunidades autónomas. Además, cursan el grado elegido en primera opción el 50 % de los estudiantes que proceden de la misma provincia que la universidad, el 25 % de los procedentes de otras provincias de Castilla y León y el 65 % de los procedentes de otras comunidades autónomas. Se elige al azar un estudiante de las universidades de Castilla y León.

a) Calcular la probabilidad de que esté cursando el grado elegido en primera opción.

b) Si se ha elegido un estudiante que no está cursando el grado elegido en primera opción, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de otra comunidad autónoma diferente a Castilla y León?

P6. (Estadística y probabilidad)

El peso de los huevos de una granja sigue una distribución normal de media 67 gramos y desviación típica 15 gramos. En función del peso, los huevos se clasifican en 4 tamaños.

a) Teniendo en cuenta que se consideran de tamaño XL los huevos que pesan más de 73 gramos, ¿cuál es la probabilidad de encontrar huevos de tamaño XL?

b) Si se elige al azar una muestra de 6 huevos, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra se encuentre entre 53 y 63 gramos (tamaño M).

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Hallar a y b para que la matriz A conmute con B.

C2. (Análisis)

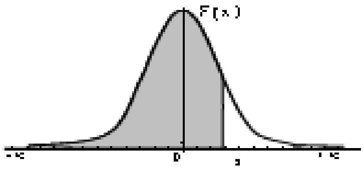
Justificar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: la función $f(x)=-x^3$ tiene un máximo relativo en el punto $x = 0$.

C3. (Estadística y probabilidad)

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral con $P(B)=\frac{3}{5}$; $P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{3}{4}$. Calcular $P(A\cap B)$

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

P1. (Números y álgebra)
Una parcela produce tres cereales diferentes: maíz, trigo y centeno. En la parcela trabajan tres agricultores durante exactamente 8 horas diarias cada uno, y se utiliza el sistema de riego durante exactamente 60 minutos diarios. Para cuidar el maíz se emplean 2 horas de mano de obra y se necesitan 6 minutos de riego; para cuidar el trigo se emplean 4 horas de mano de obra y 4 minutos de riego; y para el centeno se emplea 1 hora de mano de obra y 4 minutos de riego. Si se deben producir exactamente 12 kilogramos en total de cereal al día por limitaciones en la producción, calcular los kilogramos de cada tipo de cereal que se producen en la parcela.

Es un problema resoluble con sistema de ecuaciones.
Llamamos "x" a los kilos de maíz, "y" a los kilos de trigo, "z" a los kilos de centeno.
Realizamos una tabla para ordenar los datos.

	Horas de trabajo	Minutos de riego
Kilos de maíz (x)	2x	6x
Kilos de trigo (y)	4y	4y
Kilos de centeno (z)	z	4z
TOTAL	$2x+4y+z$	$6x+4y+4z$

Como deben producirse 12 kilos en total → $x+y+z=12$
Trabajan tres agricultores durante exactamente 8 horas diarias cada uno → $2x+4y+z=3\cdot 8$
Se utiliza el sistema de riego durante exactamente 60 minutos diarios → $6x+4y+4z=60$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 6x+4y+4z=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 3x+2y+2z=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ecuación\,2^{a}-2\cdot Ecuación\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 2x & +4y & +z & =24 \\ -2x & -2y & -2z & =-24 \\ \hline 0 & 2y & -z & =0 \end{array} \to Nueva\,ecuación\,2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Ecuación\,3^{a}-3\cdot Ecuación\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 3x & +2y & +2z & =30 \\ -3x & -3y & -3z & =-36 \\ \hline 0 & -y & -z & =-6 \end{array} \to Nueva\,ecuación\,3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ -y-z=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cdot Ecuación\,3^{a}+Ecuación\,2^{a} \\ \begin{array}{ccc} -2y & -2z & = & -12 \\ 2y & -z & = & 0 \\ \hline 0 & -3z & = & -12 \end{array} \to Nueva\,ecuación\,3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ -3z=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ \boxed{z=\frac{-12}{-3}=4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+4=12 \\ 2y-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+4=12 \\ 2y=4 \to \boxed{y=2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+2+4=12 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

Se producen 6 kilos de maíz, 2 de trigo y 4 de centeno.

P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

a) Sea A^T la matriz traspuesta de A, indicar razonadamente cuáles de los producto de matrices $A\cdot B$, $B\cdot A^T$, $C\cdot D$ y $D\cdot A$ se pueden calcular. Determinar las dimensiones de las matrices resultantes en aquellos casos en los que sea posible realizar dichos productos.
b) Hallar la matriz X que es solución de la ecuación $X\cdot B=D$.

a) ¿$A\cdot B$?

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{2 \quad \cdot \; 2}\times 2\rightarrow 3\times 2$$

Si es posible este producto y el resultado es una matriz con 3 filas y 2 columnas.

¿$B\cdot A^T$?

$$B\cdot A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{2 \quad \cdot \quad 2}\times 3\longrightarrow 2\times 3$$

Si es posible este producto y el resultado es una matriz con 2 filas y 3 columnas.

¿C · D?

$$\mathrm{C}\cdot\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \; & \; \end{pmatrix}$$

$$1\times\boxed{2 \;\cdot\; 2}\times 2\longrightarrow 1\times 2$$

Si es posible este producto y el resultado es una matriz con 1 fila y 2 columnas.

¿D · A?

$$\mathrm{D}\cdot\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$2\times\boxed{2 \;\cdot\; 3}\times 2$$

No es posible

b) La matriz B tiene inversa pues su determinante es no nulo.
La hallamos y la usamos para resolver la ecuación matricial

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3+4 = 7 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa de B}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}^{-1} = \frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{7} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{7} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la ecuación matricial.

$$X \cdot B = D \Rightarrow X \cdot B \cdot B^{-1} = D \cdot B^{-1} \Rightarrow X = D \cdot B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3+10 & 2+5 \\ 18-4 & -12-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 14 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

P3. (Análisis)
Un estudio realizado por el Centro Nacional de Ciberseguridad español ha revelado que el número de dispositivos móviles hackeados en España viene determinado, en millones de aparatos, por la función $f(t)=\frac{t^2+15}{(t+1)^2}$, donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo que corresponde al año 2005.

a) ¿Cuál es el número inicial de dispositivos hackeados?
b) Calcular el número mínimo de dispositivos hackeados, ¿En qué año se alcanza ese mínimo?
c) Calcular el número de dispositivos que habrá hackeados en España a largo plazo.

a) Nos piden *f(0)*.

$$f(0)=\frac{0^2+15}{(0+1)^2}=15$$

En el año 2005 había 15 millones de aparatos móviles hackeados.

b) Usamos la derivada.

$$f(t)=\frac{t^2+15}{(t+1)^2}\Rightarrow f'(t)=\frac{2t(t+1)^2-2(t+1)(t^2+15)}{(t+1)^4}=\frac{(t+1)\left[2t(t+1)-2(t^2+15)\right]}{(t+1)^4}=$$

$$=\frac{(t+1)\left[\cancel{2t^2}+2t-\cancel{2t^2}-30\right]}{(t+1)^4}=\frac{2t-30}{(t+1)^3}$$

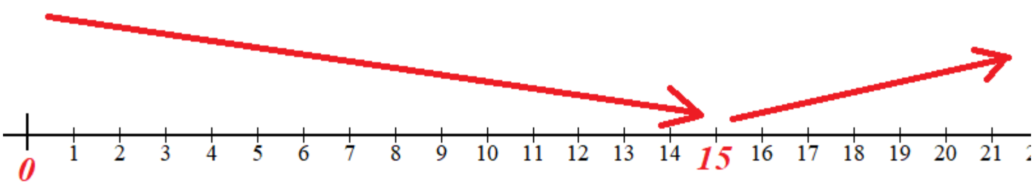
$$f'(t)=0\Rightarrow\frac{2t-30}{(t+1)^3}=0\Rightarrow 2t-30=0\Rightarrow\boxed{t=\frac{30}{2}=15}$$

Como el dominio de la función es $(0,+\infty)$ comprobamos el cambio de signo de la derivada entre 0 y 15 y después de 15.

En el intervalo $(0,15)$ tomamos $t = 5$ y la derivada es $f'(5)=\frac{10-30}{(5+1)^3}=-\frac{20}{6^3}<0$. La función decrece en $(0,15)$.

En el intervalo $(15,+\infty)$ tomamos $t = 20$ y la derivada es $f'(20)=\frac{40-30}{(20+1)^3}=\frac{10}{21^3}>0$. La función crece en $(15,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente



Por lo que la función presenta un mínimo en $t = 15$, siendo el valor de la función $f(15)=\frac{15^2+15}{(15+1)^2}=0.9375$.

El número mínimo de dispositivos hackeados es de 937500 y se produce en el año 2020.

c) Nos piden calcular el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(t)=\lim_{x\to+\infty}\frac{t^2+15}{(t+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{t^2+15}{t^2+1+2t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{t^2}{t^2}+\frac{15}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2}+\frac{1}{t^2}+\frac{2t}{t^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{15}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}}=\frac{1+0}{1+0+0}=1$$

A largo plazo el número de dispositivos hackeados será de un millón.

P4. (Análisis)

Sabiendo que la gráfica de la función $f(x)=ax^2+bx+c$, si $0\leq x\leq 60$ pasa por el punto (0, 20) y que alcanza un máximo de 36 en el punto de abscisa *x = 40*, se pide

a) Determinar *a*, *b* y *c*. Justificar la respuesta.

b) Calcular el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función *f(x)*, el eje de abscisas y las rectas *x = 0* y *x = 60.*

a) La función $f(x)=ax^2+bx+c$, si $0\leq x\leq 60$ pasa por el punto (0, 20) significa que $f(0)=20 \Rightarrow a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=20 \Rightarrow \boxed{c=20}$.

Alcanza un máximo de 36 en el punto de abscisa *x = 40* significa dos cosas, la primera que $f(40)=36$ y la segunda que $f'(40)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(40)=36 \\ f(x)=ax^2+bx+20 \end{array}\right\} \Rightarrow 36=a\cdot 40^2+b\cdot 40+20 \Rightarrow 1600a+40b=16 \Rightarrow 200a+5b=2$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(40)=0 \\ f'(x)=2ax+b \end{array}\right\} \Rightarrow 0=2a\cdot 40+b \Rightarrow 80a+b=0 \Rightarrow b=-80a$$

Unimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 200a+5b=2 \\ b=-80a \end{array}\right\} \Rightarrow 200a+5(-80a)=2 \Rightarrow 200a-400a=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -200a=2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{2}{-200}=-\frac{1}{100}} \Rightarrow \boxed{b=-80\left(-\frac{1}{100}\right)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}}$$

Los valores son $a=-\frac{1}{100};\ v=\frac{4}{5};\ c=20$

b) La función queda $f(x)=\frac{-1}{100}x^2+\frac{4}{5}x+20$.

Vemos si la gráfica corta el eje de abscisas (*y = 0*).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{-1}{100}x^2+\frac{4}{5}x+20 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{100}x^2+\frac{4}{5}x+20=0 \Rightarrow -x^2+80x+2000=0 \Rightarrow$$

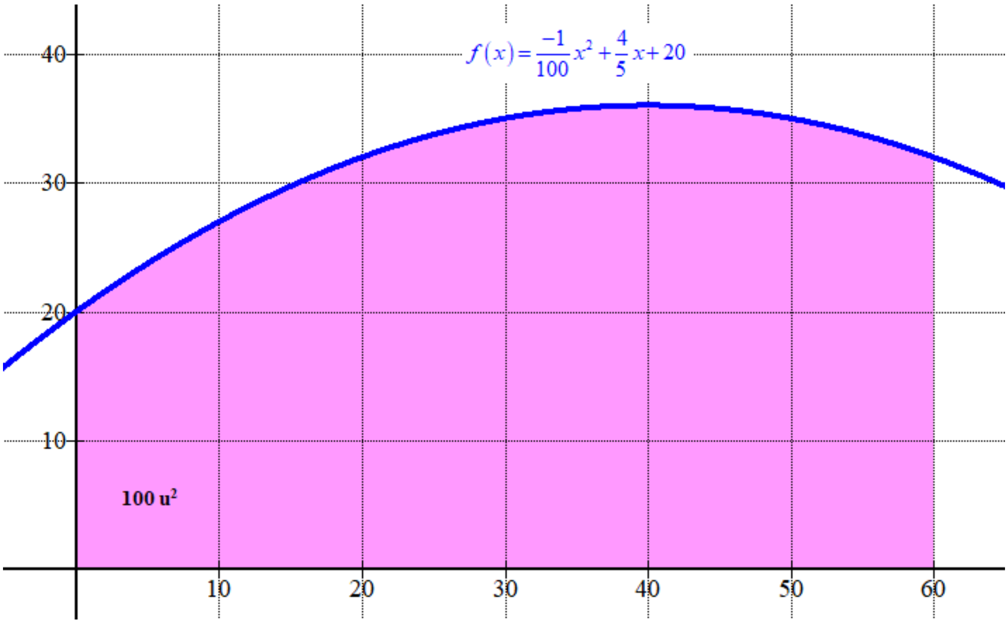
$$\Rightarrow x=\frac{-80\pm\sqrt{80^2-4(-1)2000}}{-2}=\frac{-80\pm 120}{-2}=\begin{cases} \frac{-80+120}{-2}=-20 \notin (0,60) \\ \frac{-80-120}{-2}=100 \notin (0,60) \end{cases}$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 60.

$$Área = \int_0^{60} f(x)\,dx = \int_0^{60} \frac{-1}{100}x^2 + \frac{4}{5}x + 20dx = \left[-\frac{1}{100}\frac{x^3}{3} + \frac{4}{5}\frac{x^2}{2} + 20x \right]_0^{60} =$$

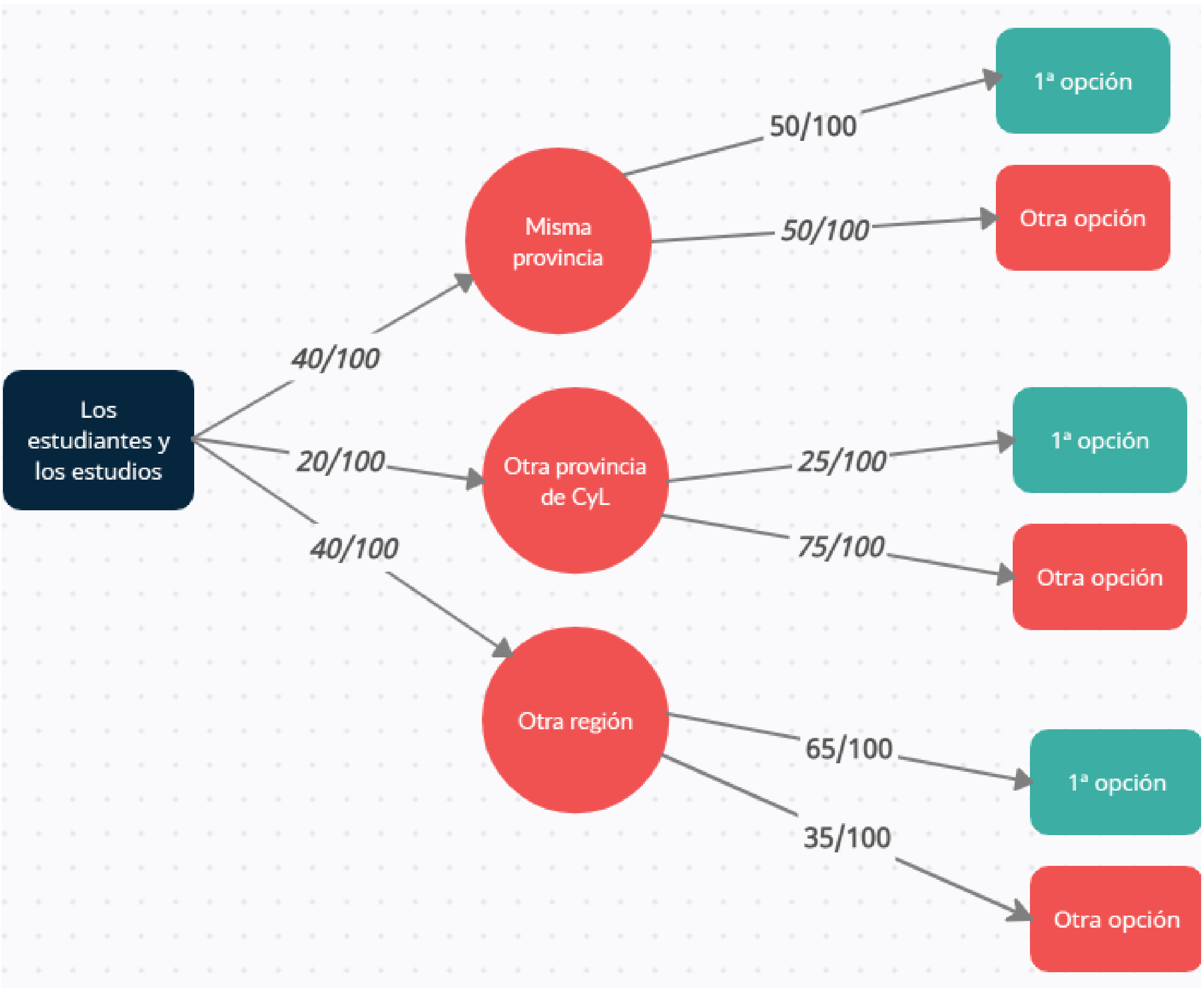
$$= \left[-\frac{x^3}{300} + \frac{2x^2}{5} + 20x \right]_0^{60} = \left[-\frac{60^3}{300} + \frac{2\cdot 60^2}{5} + 20\cdot 60 \right] - \left[-\frac{0^3}{300} + \frac{2\cdot 0^2}{5} + 20\cdot 0 \right] = \boxed{1920\,u^2}$$

No lo pide, pero dibujamos la gráfica y la región para comprobar la bondad de la solución.



P5. (Estadística y probabilidad)
Un estudio realizado sobre los estudiantes de las universidades de Castilla y León determina que el 40 % de los estudiantes procede de la misma provincia en la que está situada la universidad, el 20 % procede de otras provincias de Castilla y León y el resto procede de otras comunidades autónomas. Además, cursan el grado elegido en primera opción el 50 % de los estudiantes que proceden de la misma provincia que la universidad, el 25 % de los procedentes de otras provincias de Castilla y León y el 65 % de los procedentes de otras comunidades autónomas. Se elige al azar un estudiante de las universidades de Castilla y León.
a) Calcular la probabilidad de que esté cursando el grado elegido en primera opción.
b) Si se ha elegido un estudiante que no está cursando el grado elegido en primera opción, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de otra comunidad autónoma diferente a Castilla y León?

Realizamos un diagrama de árbol para organizar la información.



Para simplificar la notación de los sucesos llamaremos M a "estudiar en la Misma provincia", O a "estudiar en Otra provincia de Castilla y León", F a "estudiar en Castilla y León viniendo de Fuera de la región", A a "estudiar lo elegido en 1ª opción" y $\overline{A}$ a "estudiar lo no elegido en 1ª opción".

a) Nos piden calcular el valor de $P(A)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A)=P(M)P(A/M)+P(O)P(A/O)+P(F)P(A/F)=$$

$$=\frac{40}{100}\cdot\frac{50}{100}+\frac{20}{100}\cdot\frac{25}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{65}{100}=\frac{5100}{10000}=\frac{51}{100}=\boxed{0.51}$$

b) Nos piden $P\left(F/\overline{A}\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizaremos el teorema de Bayes.

$$P\left(F/\overline{A}\right)=\frac{P\left(F\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{P(F)P\left(\overline{A}/F\right)}{1-P(A)}=\frac{\frac{40}{100}\cdot\frac{35}{100}}{1-\frac{51}{100}}=\frac{\frac{14}{100}}{\frac{49}{100}}=\frac{14}{49}=\boxed{\frac{2}{7}\simeq 0.29}$$

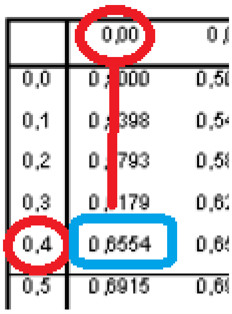
P6. (Estadística y probabilidad)
El peso de los huevos de una granja sigue una distribución normal de media 67 gramos y desviación típica 15 gramos. En función del peso, los huevos se clasifican en 4 tamaños.
a) Teniendo en cuenta que se consideran de tamaño XL los huevos que pesan más de 73 gramos, ¿cuál es la probabilidad de encontrar huevos de tamaño XL?
b) Si se elige al azar una muestra de 6 huevos, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra se encuentre entre 53 y 63 gramos (tamaño M).

X = Peso de un huevo en gramos
X = N(67, 15)

a) Nos piden $P(X \geq 73)$.

$$P(X \geq 73) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ \dfrac{X-67}{15} = Z \text{ es N}(0,1) \end{array} \right\} = P\left(\frac{X-67}{15} \geq \frac{73-67}{15}\right) = P(Z \geq 0.4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.4) = \{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\} = 1 - 0.6554 = \boxed{0.3446}$$



	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915

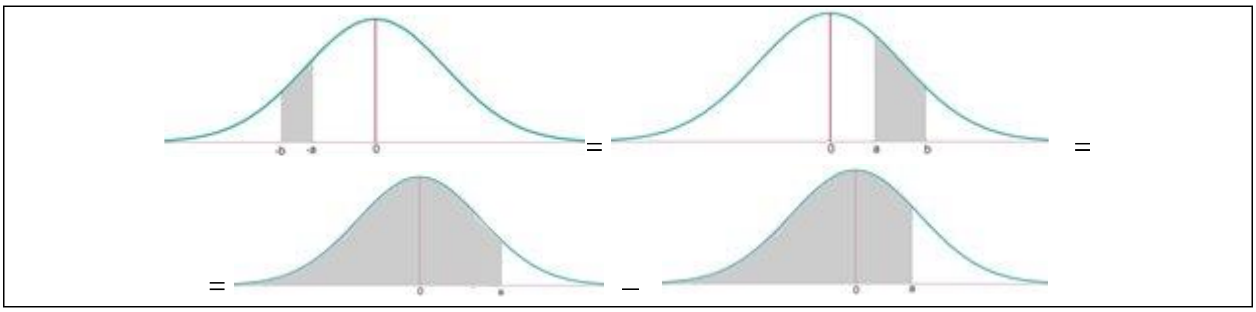
b) Si X = N(67, 15) la distribución de la media de una muestra de 6 huevos es $\overline{X_6} = N\left(67, \frac{15}{\sqrt{6}}\right)$.

Nos piden calcular $P\left(53 \leq \overline{X_6} \leq 63\right)$

$$P\left(53 \leq \overline{X_6} \leq 63\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{53-67}{15/\sqrt{6}} \leq \frac{\overline{X_6}-67}{15/\sqrt{6}} \leq \frac{63-67}{15/\sqrt{6}}\right) =$$

$$= P(-2.29 \leq Z \leq -0.65) = P(0.65 \leq Z \leq 2.29) = P(Z \leq 2.29) - P(Z \leq 0.65) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla}\} = 0.9890 - 0.7422 = \boxed{0.2468}$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	[illegible]	0,5239	0,5279	0,5319	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	[illegible]	0,5636	0,5675	0,5714	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	[illegible]	0,6026	0,6064	0,6103	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	[illegible]	0,6406	0,6443	0,6480	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	[illegible]	0,6772	0,6808	0,6844	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	[illegible]	0,7123	0,7157	0,7190	[illegible]
0,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	[illegible]
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	[illegible]
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	[illegible]
2,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936

C1. (Números y álgebra)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Hallar *a* y *b* para que la matriz *A* conmute con *B*.

$$A\cdot B=B\cdot A\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+1 & b+1\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & a\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cancel{a}+1=\cancel{a}+b\\ b+1=a\\ a=2\\ b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=b\\ 1+1=2\\ a=2\\ b=1\end{cases}\text{ Se cumplen todas las igualdades}$$

Los valores buscados son *a = 2* y *b = 1*.

C2. (Análisis)

Justificar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: la función $f(x)=-x^3$ tiene un máximo relativo en el punto *x = 0*.

Obtenemos la derivada primera y segunda de la función y comprobamos si la derivada primera se anula en *x = 0* y la derivada segunda es negativa en *x = 0*.

$$f(x)=-x^3\Rightarrow f'(x)=-3x^2\Rightarrow f''(x)=-6x$$

$f'(0)=-3\cdot 0^2=0$ ¡¡Se cumple!!

$f''(0)=-6\cdot 0=0$ ¡¡No se cumple!!

La afirmación es **falsa**.

Si obtenemos la tercera derivada $f'''(x)=-6$ observamos que $f'''(0)=-6\neq 0$, por lo que es un punto de inflexión.

C3. (Estadística y probabilidad)

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral con $P(B)=\frac{3}{5}$; $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\frac{3}{4}$. Calcular $P(A\cap B)$

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\frac{3}{4}\Rightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=\frac{3}{4}\Rightarrow 1-P(A\cap B)=\frac{3}{4}\Rightarrow\boxed{P(A\cap B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}}$$