 <b>COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA</b>	<b>Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade Convocatoria ordinaria 2022</b>	<b>Código: 40</b>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------

## MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

**EJERCICIO 1. Álgebra.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Calcule las matrices  $A^2 - B$  y  $A - I$ , en donde  $I$  representa la matriz identidad de orden 3.
- Calcule, si es posible, la inversa de la matriz  $A - I$ .
- Despeje  $X$  en la ecuación matricial  $X \cdot A + B = A^2 + X$  y calcule su valor.

**EJERCICIO 2. Álgebra.** Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A<sup>+</sup> carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad A<sup>+</sup>. Los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase A<sup>+</sup>. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio

- Plantee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.
- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

**EJERCICIO 3. Análisis.** En una zona protegida de un parque natural el número de aves  $N(t)$ , en cientos, en función del tiempo  $t$  (años transcurridos desde que se contabilizan las aves) viene dado por

$$\text{la función: } N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

- Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $N(t)$ ; ¿Entre que años crece la función? ¿Entre que años decrece?
- ¿Cuándo se alcanza el número mínimo de aves en el parque? ¿Cuántas aves hay en ese momento?
- Calcule el intervalo de tiempo en el que la población de aves se mantiene entre 5000 y 7500 aves. ¿A qué valor tiende la población de aves con el paso del tiempo?

**EJERCICIO 4. Análisis.** Dada la función  $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$

- Calcule el valor del parámetro "a" teniendo en cuenta que la función  $f(x)$  presenta un punto de inflexión en  $x = 2$ .
- Para  $a = 6$ , calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función  $f(x)$  y el eje OX.

**EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad.** Un estudio revela que 2 de cada 5 habitantes de una determinada población son menores de 30 años, el 70% de los habitantes realizan ejercicio físico con regularidad y el 30% de los habitantes son menores de 30 años y realizan ejercicio físico con regularidad.

- ¿Qué porcentaje de la población ni es menor de 30 años ni realiza ejercicio físico con regularidad?

- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un habitante que no realiza ejercicio físico con regularidad sea menor de 30 años?
- c) ¿Son independientes los sucesos ser menor de 30 años y realizar ejercicio físico con regularidad? Justifique la respuesta.

**EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad.** Tomamos una muestra aleatoria de 36 facturas de consumo mensual de luz (en euros) y el intervalo de confianza obtenido al 95% para el consumo mensual medio es  $[60.1, 69.9]$ . Según esta información:

- a) ¿Cuál fue el consumo medio muestral de luz? b) ¿Cuál es el error máximo cometido?
- c) Determine un intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de luz

### SOLUCIONES

**EJERCICIO 1. Álgebra.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule las matrices  $A^2 - B$  y  $A - I$ , en donde  $I$  representa la matriz identidad de orden 3.  
 b) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz  $A - I$ .  
 c) Despeje  $X$  en la ecuación matricial  $X \cdot A + B = A^2 + X$  y calcule su valor.

a)

$$A^2 - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1 & 1+2 \\ 1+1 & 1+1 & 2+1+1 \\ 1 & 1 & 2+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Veamos si existe la inversa de  $A - I$  comprobando que su determinante es no nulo.

$$|A - I| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0 \text{ Existe la inversa.}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - I)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{Adj((A - I)^T)}{|A - I|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$X \cdot A + B = A^2 + X \Rightarrow X \cdot A - X = A^2 - B \Rightarrow X(A - I) = A^2 - B \Rightarrow X = (A^2 - B)(A - I)^{-1}$$

Sustituimos en la ecuación los valores obtenidos en los apartados anteriores.

$$X = (A^2 - B)(A - I)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-3 \\ 0 & 1 & 1-1 \\ -2 & 4-3 & 4-6+3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**EJERCICIO 2. Álgebra.** Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A<sup>+</sup> carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad A<sup>+</sup>. Los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase A<sup>+</sup>. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio

a) Plantee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

a) Llamamos  $x$  = número de móviles calidad A,  $y$  = número de móviles calidad A<sup>+</sup>.

El beneficio que se obtiene por cada móvil de calidad A es de  $100 - 70 = 30$  € y por cada uno de calidad A<sup>+</sup> es de  $150 - 90 = 60$  €.

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como:

$$B(x, y) = 30x + 60y$$

Las restricciones son:

“La empresa dispone de un capital de 30.000 euros”  $\rightarrow 70x + 90y \leq 30000$

“Su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles)”  $\rightarrow x + y \leq 350$

“Su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 310 carcasas de aluminio”  $\rightarrow y \leq 310$

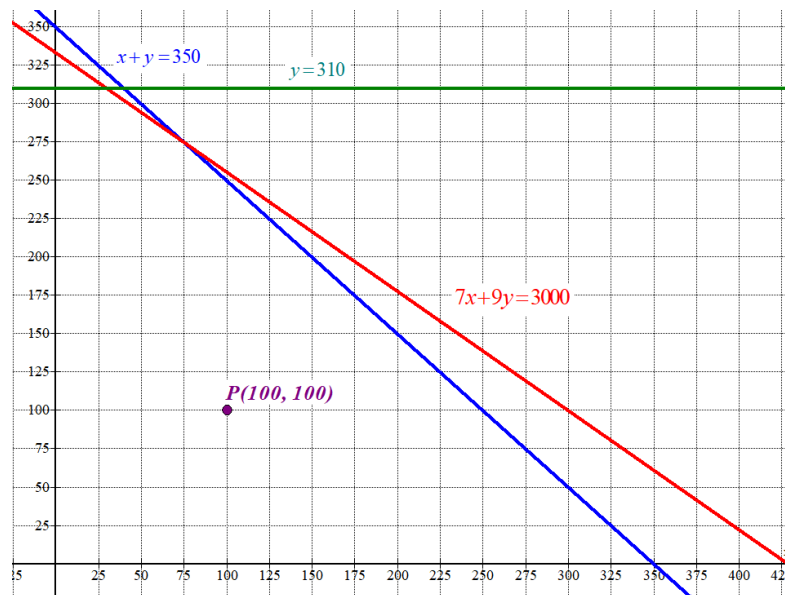
Las cantidades deben ser positivas  $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 70x + 90y \leq 30000 \\ x + y \leq 350 \\ y \leq 310 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 9y \leq 3000 \\ x + y \leq 350 \\ y \leq 310 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$7x + 9y = 3000$	$x + y = 350$	$y = 310$	$x \geq 0; y \geq 0$																	
$x \mid y = \frac{3000 - 7x}{9}$	$x \mid y = 350 - x$	$x \mid y = 310$		Primer cuadrante																
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px;">0</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">200</td></tr> <tr><td>75</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">275</td></tr> <tr><td>100</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">0</td></tr> </table>	0	200	75	275	100	0	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px;">0</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">350</td></tr> <tr><td>75</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">275</td></tr> <tr><td>350</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">0</td></tr> </table>	0	350	75	275	350	0	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px;">0</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">310</td></tr> <tr><td>50</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">310</td></tr> </table>	0	310	50	310		
0	200																			
75	275																			
100	0																			
0	350																			
75	275																			
350	0																			
0	310																			
50	310																			



Como las restricciones del problema son

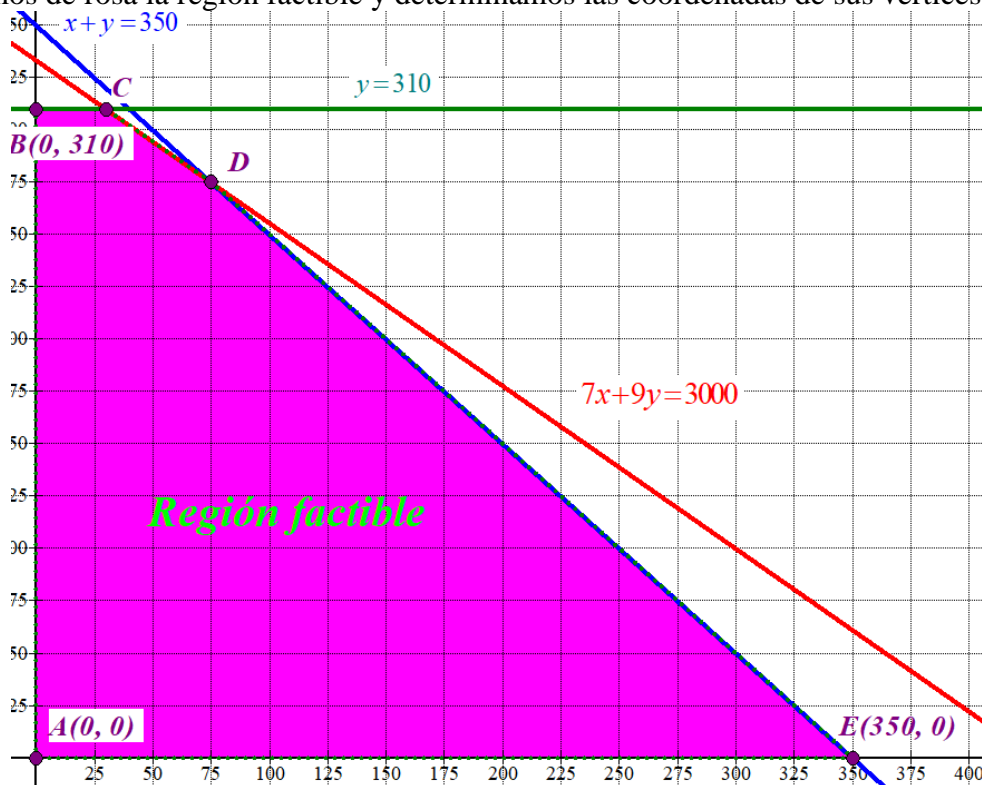
$$\left. \begin{array}{l} 7x + 9y \leq 3000 \\ x + y \leq 350 \\ y \leq 310 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del}$$

primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, roja y verde.

Comprobamos que el punto P(100, 100) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 700 + 900 \leq 3000 \\ 100 + 100 \leq 350 \\ 100 \leq 310 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 310 \\ 7x + 9y = 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow 7x + 2790 = 3000 \Rightarrow 7x = 210 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow C(30, 310)$$

$$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 9y = 3000 \\ x + y = 350 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 9y = 3000 \\ y = 350 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 7x + 9(350 - x) = 3000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x + 3150 - 9x = 3000 \Rightarrow -2x = -150 \Rightarrow x = \frac{150}{2} = 75 \Rightarrow y = 350 - 75 = 275 \Rightarrow D(75, 275)$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 310); C(30, 310), D(75, 275) y E(350, 0).

c) Valoramos la función objetivo  $B(x, y) = 30x + 60y$  en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0,0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0, 310) \rightarrow B(0, 310) = 0 + 18600 = 18600$$

$$C(30, 310) \rightarrow B(30, 310) = 900 + 18600 = 19500 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(75, 275) \rightarrow B(75, 275) = 2250 + 16500 = 18750$$

$$E(350, 0) \rightarrow B(350, 0) = 10500 + 0 = 10500$$

El máximo beneficio es de 19500 € y se produce en el vértice C (30, 310) que significa comprar 30 móviles calidad A y 310 calidad A<sup>+</sup>.

**EJERCICIO 3. Análisis.** En una zona protegida de un parque natural el número de aves  $N(t)$ , en cientos, en función del tiempo  $t$  (años transcurridos desde que se contabilizan las aves) viene dado por

$$\text{la función: } N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

- a) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $N(t)$  ¿Entre qué años crece la función? ¿Entre qué años decrece?
- b) ¿Cuándo se alcanza el número mínimo de aves en el parque? ¿Cuántas aves hay en ese momento?
- c) Calcule el intervalo de tiempo en el que la población de aves se mantiene entre 5000 y 7500 aves. ¿A qué valor tiende la población de aves con el paso del tiempo?

a) Comprobamos si la función es continua en  $t = 10$ .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10^-} N(t) &= \lim_{x \rightarrow 10^-} t^2 - 8t + 50 = 10^2 - 80 + 50 = 70 \\ \lim_{x \rightarrow 10^+} N(t) &= \lim_{x \rightarrow 10^+} 95 - \frac{250}{t} = 95 - \frac{250}{10} = 70 \\ f(10) &= t^2 - 8t + 50 = 10^2 - 80 + 50 = 70 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 10^-} N(t) = \lim_{x \rightarrow 10^+} N(t) = \lim_{x \rightarrow 10^+} N(t) = 70$$

La función es continua en el intervalo  $[0, +\infty)$

Calculamos la función derivada.

$$N'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & \text{si } 0 \leq t < 10 \\ \frac{250}{t^2} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

En el intervalo  $(10, +\infty)$  la derivada es  $N'(t) = \frac{250}{t^2} > 0$ . Siempre es positiva y por tanto la función es creciente.

En el intervalo  $[0, 10)$  la derivada es  $N'(t) = 2t - 8$ . Se anula en  $t = 4$ .

En  $[0, 4)$  tomamos  $t = 2$  y la derivada es  $N'(2) = 4 - 8 = -4 < 0$ . La función es decreciente en el intervalo  $[0, 4)$ .

En  $(4, 10)$  tomamos  $t = 8$  y la derivada es  $N'(8) = 16 - 8 = 8 > 0$ . La función es creciente en el intervalo  $(4, 10)$ .

Resumiendo: La función  $N(t)$  es decreciente en  $[0, 4)$  y creciente en  $(4, +\infty)$

Decrece entre los años 0 y 4. Crece a partir del año cuarto.

- b) El mínimo relativo se encuentra en  $t = 4$ , es decir, al final del cuarto año. Como  $N(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 50 = 34$  el número de aves es de 3400.
- c) Veamos en que año se observan 5000 o 7500 aves.



$$N(t) = 50 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 8t + 50 = 50 \rightarrow t^2 - 8t = 0 \Rightarrow t(t-8) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 8 \end{cases} & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} = 50 \rightarrow -\frac{250}{t} = -45 \rightarrow t = \frac{250}{45} = \frac{50}{9} \approx 5.55 \notin (10, +\infty) & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

$$N(t) = 75 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 8t + 50 = 75 \rightarrow t^2 - 8t - 25 = 0 \rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-25)}}{2} \rightarrow \\ \rightarrow t = \frac{8 \pm 2\sqrt{41}}{2} = \begin{cases} t = 4 + \sqrt{41} \approx 10.4 \notin (0, 10) \\ t = 4 - \sqrt{41} \approx -2.4 \notin (0, 10) \end{cases} & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} = 75 \rightarrow -\frac{250}{t} = -20 \rightarrow t = \frac{250}{20} = 12.5 & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

El número de aves al comienzo del estudio ( $t = 0$ ) es de 5000, luego decrece, por lo que no nos sirve este valor.

El número de aves al final del año 8 es de 5000 ( $N(8) = 5000$ ). Después crece la población hasta que al final del año 12.5 el número de aves es de 7500 ( $N(12.5) = 75$ ). A partir de este año el número de aves sigue creciendo y superará las 7500 aves.

Entre los años 8 y 12.5 el número de aves se encuentra entre 5000 y 7500.

Con el paso del tiempo vemos que ocurre con el número de aves calculando el límite de la función  $N(t)$  cuando  $t$  se acerca a  $+\infty$ .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 95 - \frac{250}{t} = 95 - \frac{250}{+\infty} = 95$$

Con el paso del tiempo el número de aves tiende a estabilizarse en 9500.

**EJERCICIO 4. Análisis.** Dada la función  $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$

- a) Calcule el valor del parámetro "a" teniendo en cuenta que la función  $f(x)$  presenta un punto de inflexión en  $x = 2$ .
- b) Para  $a = 6$ , calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función  $f(x)$  y el eje OX.

a) Si presenta un punto de inflexión debe anularse la derivada segunda.

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax + 8 \Rightarrow f''(x) = 6x - 2a$$

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 2 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

b) Para  $a = 6$  la función queda  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ .

Determinamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

$$\left. \begin{matrix} f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow$$

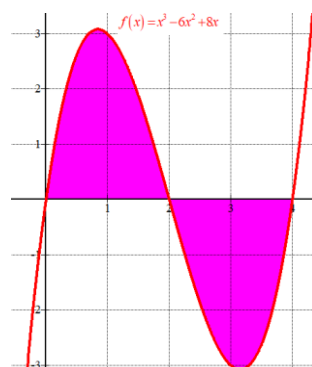
$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = \boxed{4 = x} \\ \frac{6-2}{2} = \boxed{2 = x} \end{cases} \end{matrix} \right.$$

Corta el eje en tres puntos. El recinto está dividido en dos partes. Calculamos el área de cada una con la integral definida.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_0^2 x^3 - 6x^2 + 8x dx = \left[ \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = \left[ \frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right] - \left[ \frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 \right] = \\ &= 4 - 16 + 16 = 4u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área 2} &= \left| \int_2^4 x^3 - 6x^2 + 8x dx \right| = \left| \left[ \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \right| = \left| \left[ \frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 \right] - \left[ \frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right] \right| = \\ &= \left| 64 - 128 + 64 - (4 - 16 + 16) \right| = 4u^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \text{Área 1} + \text{Área 2} = 4 + 4 = 8u^2}$$



**EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad.** Un estudio revela que 2 de cada 5 habitantes de una determinada población son menores de 30 años, el 70% de los habitantes realizan ejercicio físico con regularidad y el 30% de los habitantes son menores de 30 años y realizan ejercicio físico con regularidad.

- a) ¿Qué porcentaje de la población ni es menor de 30 años ni realiza ejercicio físico con regularidad?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un habitante que no realiza ejercicio físico con regularidad sea menor de 30 años?
- c) ¿Son independientes los sucesos ser menor de 30 años y realizar ejercicio físico con regularidad? Justifique la respuesta.

Si 2 de cada 5 son menores de 30 años, eso representa ( $2/5 = 40/100$ ) el 40 %.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Realizan ejercicio físico	No realizan ejercicio físico	
Menores de 30 años	30		40
No es menor de 30 años			
	70		100

Completamos la tabla

	Realizan ejercicio físico	No realizan ejercicio físico	
Menores de 30 años	30	10	40
No es menor de 30 años	40	20	60
	70	30	100

- a) El dato aparece en la tabla en la segunda fila y segunda columna: 20 %
- b) Observando los datos de la tabla hay 30 que no realizan ejercicio y de esos 30 hay 10 que además son menores de 30 años.

$$P(\text{Menor de 30 / No realiza ejercicio}) = \frac{10}{30} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0.33}$$

- c) Calculamos las probabilidades de cada suceso por separado y luego la probabilidad de la intersección.

Llamamos M = “Es menor de 30 años” y F = “Realiza ejercicio físico”.

$$\left. \begin{aligned} P(M) &= \frac{40}{100} = 0.4 \\ P(F) &= \frac{70}{100} = 0.7 \\ P(M \cap F) &= \frac{30}{100} = 0.3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(M) \cdot P(F) = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28 \neq 0.3 = P(M \cap F)$$

Como  $P(M) \cdot P(F) \neq P(M \cap F)$  no son independientes el suceso M = “Ser menor de 30 años” y el suceso F = “Realiza ejercicio físico”.

**EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad.** Tomamos una muestra aleatoria de 36 facturas de consumo mensual de luz (en euros) y el intervalo de confianza obtenido al 95% para el consumo mensual medio es [60.1, 69.9]. Según esta información:

- a) ¿Cuál fue el consumo medio muestral de luz? b) ¿Cuál es el error máximo cometido?  
 c) Determine un intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de luz

$X$  = Factura de la luz (en euros).

$X = N(\mu, \sigma)$

Tamaño de muestra =  $n = 36$ .

- a) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza ya que el intervalo de confianza es  $(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error)$ .

El intervalo de confianza es [60.1, 69.9]  $\rightarrow \bar{x} = \frac{60.1 + 69.9}{2} = 65$

La media muestral es de 65.

- b) El intervalo de confianza es  $(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error)$  y la media muestral es 65, por lo que:

$$65 - Error = 60.1 \rightarrow Error = 65 - 60.1 = 4.9$$

El error máximo cometido es de 4.9.

- c) Necesitamos el valor de la desviación típica.

Con un nivel de confianza del 95 %

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha / 2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

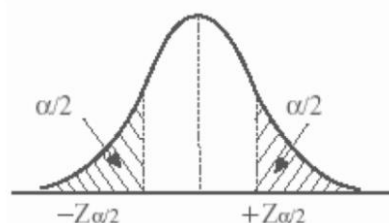
Lo utilizamos para el error obtenido en el apartado b).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4.9 = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{36}} \Rightarrow \sigma = \frac{4.9 \cdot 6}{1.96} = 15$$

Calculamos el intervalo de confianza pedido.

Con un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha / 2 = 0'05 \rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,645}$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{15}{\sqrt{36}} = 4.1125$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (65 - 4.1125, 65 + 4.1125) = (60.8875, 69.1125)$$