UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2021 - 2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.
En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.
Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.
Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.
Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.
El tiempo disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- ¿Para qué valores de *a* tiene soluciones el siguiente sistema?

$$\begin{cases} x+y+2z=12 \\ 2x-y-z=12 \\ 2x+2y+az=12 \end{cases}$$

[0.75 puntos]

Resuelve el sistema en el caso $a = 0$. **[1.25 puntos]**
Si para un valor a el sistema es incompatible, y sustituimos los términos independientes $(12,12,12)$ por $(12,12,24)$, ¿cómo clasificaríamos el sistema resultante? **[0.5 puntos]**

1.2.- Justifica que la siguiente matriz es regular, y calcula su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[2.5 puntos]

1.3.- Un orfebre emplea 2 horas para fabricar un anillo, y tarda 3 horas en hacer un brazalete. El material de cada anillo le cuesta 40 €, y el del brazalete 320 €. A cambio, por cada anillo gana 10 € y por cada brazalete gana 90 €.
Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal y no puede gastar en material más de 2560 €, ¿cuántos anillos y brazaletes en una semana le reportarán el máximo beneficio? **[1.75 puntos]**
¿Cambiaría la respuesta si ya tuviera apalabrados ocho anillos? ¿Cuánto tiempo trabaja en total en ambos casos en la fabricación de anillos y brazaletes?

[0.75 puntos]

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Representa conjuntamente, en el intervalo de abscisas $[-2,3]$, las gráficas de las funciones *f* y *g* dadas por

$$f(x)=x^2+2x \quad \text{y} \quad g(x)=5-2x \quad \textbf{[1.5 puntos]}$$

¿Qué punto *a* hace que sea continua la función

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & si \quad -2\le x<a, \\ g(x) & si \quad a\le x\le 3 \end{cases}?$$

Resalta la gráfica de *h* en el dibujo anterior. ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de los valores de *h* en $[-2,3]$? **[1 punto]**

2.2.- La distancia que ha recorrido un coche hasta el instante *t*, desde que arrancó en $t=0$, viene dada por la siguiente función $e(t)$ entre $t=1$ y $t=4$:

$$e(t)=\begin{cases} 120t+90 & si \quad 1\le t<3 \\ C-240t+150t^2-20t^3 & si \quad 3\le t\le 4 \end{cases}$$

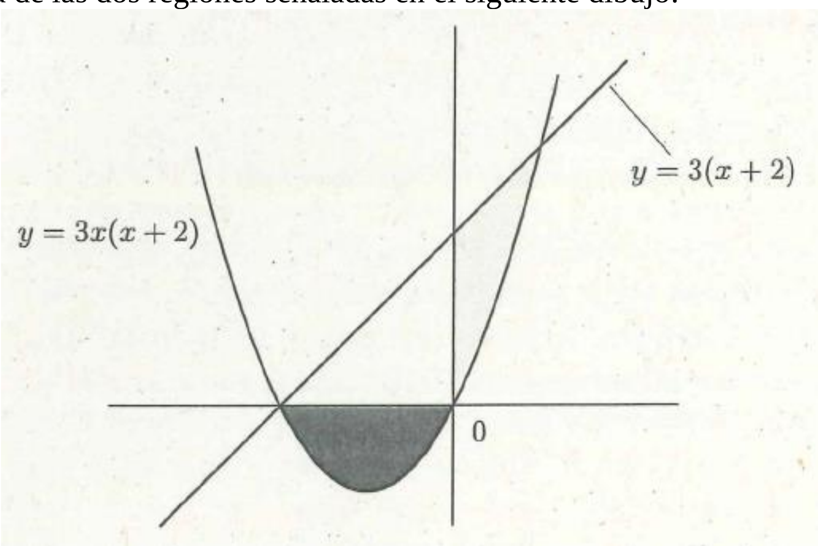
En $t=4$ se para, de forma que $e(t)=e(4)$ para cada *t* en $(4,5]$.

(i) Calcula el valor de C, considerando que $e(t)$ define una función continua. **[0.75 puntos]**

(ii) La velocidad en cada instante $v(t)$ es la derivada del espacio recorrido, es decir, $v(t)=e'(t)$. Expresa cuánto vale dicha derivada en cada punto, e investiga si es una función continua en $[1,5]$. ¿Cómo expresarías, en términos de la velocidad, que la gráfica de $e(t)$ es recta en el intervalo $[1,3]$ y en el intervalo $[4,5]$? **[1 punto]**

(iii) Calcula la distancia recorrida entre $t=3$ y $t=4$, es decir $e(4)-e(3)$. ¿Por qué es igual a $\int_3^4 v(t)\,dt$? **[0.75 puntos]**

2.3.- Calcula el área de las dos regiones señaladas en el siguiente dibujo:



[2.5 puntos]

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- En una casa hay tres llaveros: A, B y C, el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él se toma a su vez una llave al azar. Entendemos que, cuando se escoge una cosa al azar entre varias, todas ellas tienen la misma probabilidad de ser la escogida. Se pide:

(i) La probabilidad de que la llave elegida abra el trastero. **[1.25 puntos]**

(ii) Si resulta que lo abre, la probabilidad de que sea del llavero A. **[1.25 puntos]**

3.2.- Una variable X es normal de media 25 y desviación típica 5, y otra Y es también normal, pero con media 28 y desviación típica 1.

(i) Calcula las probabilidades $P(X>30)$ y $P(Y>30)$. ¿Cuál es mayor? **[1 punto]**

(ii) Tomamos una muestra de $n=4$ valores independientes de X y anotamos su promedio $\overline{X}$. Calcula $P(\overline{X}>30)$. ¿Cuál sería el resultado si $n=9$? **[1 punto]**

(iii) ¿Cómo explicarías la comparación del resultado de (ii) con el de (i), sin recurrir a fórmulas? **[0.5 puntos]**

3.3.- Como ya sabe la cifra de asistentes, el ayuntamiento de Zaragoza ha asegurado que la duración de la ofrenda de flores del día del Pilar tendrá, en horas, una distribución de probabilidad normal con media 8 y desviación típica $\sqrt{2}/5$.

(i) ¿Puedes afirmar, con al menos un 95% de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media? ¿Podemos hacerlo con probabilidad mayor del 99%? **[1.5 puntos]**

(ii) Una variable normal estándar Z cumple que $P(Z\le 2.3263)=0.99$. ¿Qué desviación típica (en lugar de la dada, y manteniendo la media de ocho horas) debería tener la duración de la ofrenda para que la probabilidad de ser menor que ocho horas y media fuera del 99%? **[1 punto]**

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- ¿Para qué valores de *a* tiene soluciones el siguiente sistema?

$$\begin{cases} x+y+2z=12 \\ 2x-y-z=12 \\ 2x+2y+az=12 \end{cases}$$

[0.75 puntos]

Resuelve el sistema en el caso *a = 0.* **[1.25 puntos]**

Si para un valor *a* el sistema es incompatible, y sustituimos los términos independientes $(12,12,12)$ por $(12,12,24)$, ¿cómo clasificaríamos el sistema resultante? **[0.5 puntos]**

Tomamos la matriz de coeficientes asociada al sistema $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix}=-a-2+8-(-4+2a-2)=-a-2+8+4-2a+2=-3a+12$$

Comprobamos cuando se anula (su rango no es 3)

$$|A|=0 \Rightarrow -3a+12=0 \Rightarrow -3a=-12 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-12}{-3}=4}$$

Estudiamos que ocurre cuando $a=4$ y cuando $a\neq 4$.

CASO 1. Si $a\neq 4$ el determinante de la matriz de coeficientes A no vale 0 y por tanto su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & a & 12 \end{pmatrix}$ y al igual que el número de incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} Rango\,de\,A=3 \\ Rango\,de\,A/B=3 \\ Número\,de\,incógnitas=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{El sistema tiene una única solución.}$$

CASO 2. Si $a=4$ el determinante de la matriz A es nulo, por lo que el rango de A no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}$.

Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de ambas matrices.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&2&12\\2&-1&-1&12\\2&2&4&12\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^a-2\cdot\text{ Fila } 1^a\\ \begin{array}{cccc}2&-1&-1&12\\-2&-2&-4&-24\\\hline 0&-3&-5&-12\end{array}\to\text{Nueva Fila } 2^a\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^a-2\cdot\text{ Fila } 1^a\\ \begin{array}{cccc}2&2&4&12\\-2&-2&-4&-24\\\hline 0&0&0&-12\end{array}\to\text{Nueva Fila } 3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&12\\0&-3&-5&-12\\0&0&0&-12\end{pmatrix}$$

El sistema será incompatible pues el rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.

El sistema tiene solución para los valores de *a* distintos de 4.

Resolvemos el sistema para *a = 0.*
Ya sabemos que este valor se corresponde con el caso 1 y por tanto tiene solución única. La obtenemos usando el método de Gauss.

Para *a = 0* la matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1&1&2&12\\2&-1&-1&12\\2&2&0&12\end{pmatrix}$

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&2&12\\2&-1&-1&12\\2&2&0&12\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^a-2\cdot\text{ Fila } 1^a\\ \begin{array}{cccc}2&-1&-1&12\\-2&-2&-4&-24\\\hline 0&-3&-5&-12\end{array}\to\text{Nueva Fila } 2^a\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^a-2\cdot\text{ Fila } 1^a\\ \begin{array}{cccc}2&2&0&12\\-2&-2&-4&-24\\\hline 0&0&-4&-12\end{array}\to\text{Nueva Fila } 3^a\end{array}\right\}\Rightarrow A/B=\begin{pmatrix}1&1&2&12\\0&-3&-5&-12\\0&0&-4&-12\end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema equivalente obtenido

$$\begin{cases}x+y+2z=12\\-3y-5z=-12\\-4z=-12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+2z=12\\-3y-5z=-12\\\boxed{z=\dfrac{-12}{-4}=3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+2\cdot3=12\\-3y-5\cdot3=-12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+6=12\\-3y-15=-12\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x+y=6\\-3y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=6\\\boxed{y=\dfrac{3}{-3}=-1}\end{cases}\Rightarrow x+(-1)=6\Rightarrow\boxed{x=6+1=7}$$

Para $a = 0$ la solución es $x = 7, y = -1, z = 3$.

Sabemos que para $a = 4$ el sistema es incompatible:

$$a = 4 \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ 2x + 2y + 4z = 12 \end{cases}.$$

Cambiamos los términos independientes $(12,12,12)$ por $(12,12,24)$ $\rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ 2x + 2y + 4z = 24 \end{cases}$

Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de ambas matrices y la compatibilidad del sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - 2 \cdot \text{ Fila 1}^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 12 \\ -2 & -2 & -4 & -24 \\ \hline 0 & -3 & -5 & -12 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 2 \cdot \text{ Fila 1}^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 24 \\ -2 & -2 & -4 & -24 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema será compatible indeterminado pues el rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero el número de incógnitas es 3. El sistema tiene infinitas soluciones.

1.2.- Justifica que la siguiente matriz es regular, y calcula su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[2.5 puntos]

Calculamos su determinante y vemos si es nulo o no. Para ser regular debe ser no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1-1-(1+1+1) = -1-3 = -4 \neq 0$$

La matriz es regular.

Calculamos la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-4} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.- Un orfebre emplea 2 horas para fabricar un anillo, y tarda 3 horas en hacer un brazalete. El material de cada anillo le cuesta 40 €, y el del brazalete 320 €. A cambio, por cada anillo gana 10 € y por cada brazalete gana 90 €.
Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal y no puede gastar en material más de 2560 €, ¿cuántos anillos y brazaletes en una semana le reportarán el máximo beneficio? **[1.75 puntos]**
¿Cambiaría la respuesta si ya tuviera apalabrados ocho anillos? ¿Cuánto tiempo trabaja en total en ambos casos en la fabricación de anillos y brazaletes?
[0.75 puntos]

Llamamos "x" al número de anillos que se fabrican a la semana e "y" al número de brazaletes.

Hacemos una tabla para establecer las condiciones del problema.

	Horas de trabajo semanal	Coste del material necesario	Beneficio
Nº anillos (x)	$2x$	$40x$	$10x$
Nº brazaletes (y)	$3y$	$320y$	$90y$
TOTAL	$2x+3y$	$40x+320y$	$10x+90y$

La función objetivo es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x,y)=10x+90y$.
Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$
Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal → $2x+3y\leq 50$

Si no puede gastar en material más de 2560 € → $40x+320y\leq 2560$

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+3y\leq 50 \\ 40x+320y\leq 2560 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+3y\leq 50 \\ x+8y\leq 64 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

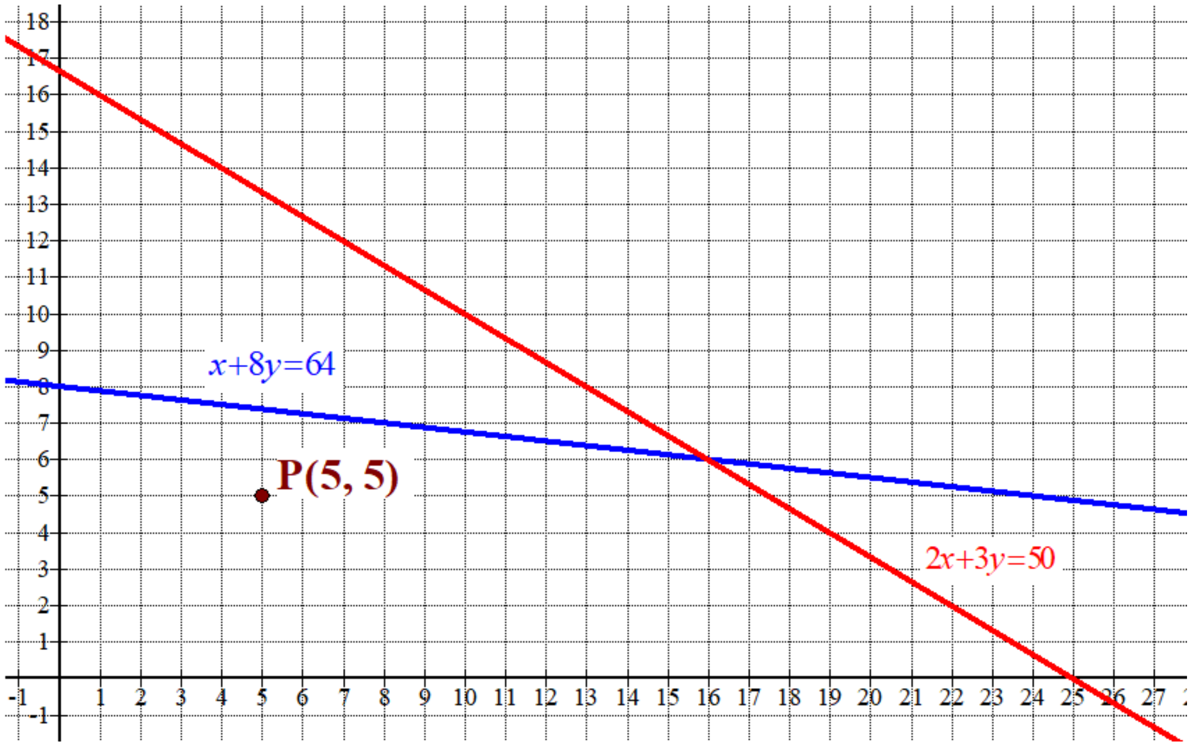
$x\geq 0;\ y\geq 0$
El primer cuadrante

$2x+3y=50$

x	$y=\dfrac{50-2x}{3}$
25	0
16	6
10	10

$x+8y=64$

x	$y=\dfrac{64-x}{8}$
64	0
16	6
8	7

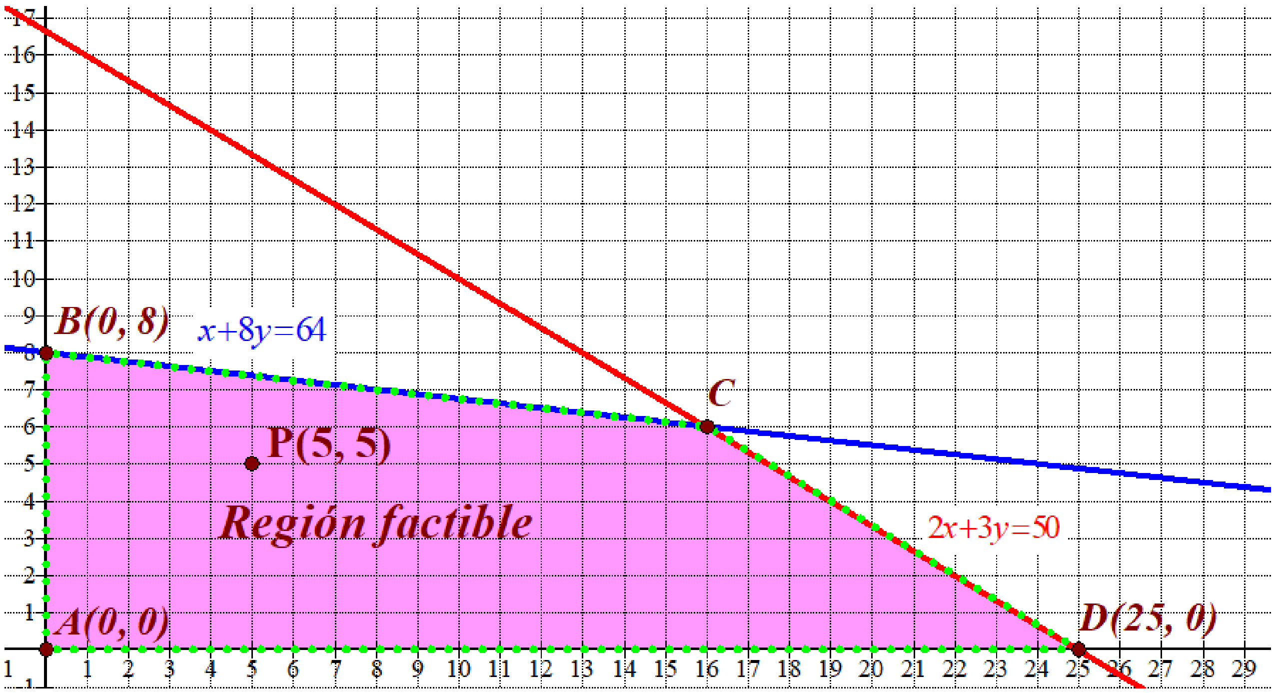


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 50 \\ x + 8y \leq 64 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(5, 5) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5 \geq 0;\ 5 \geq 0 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \leq 50 \\ 5 + 8 \cdot 5 \leq 64 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de rosa la región factible.



Hallamos las coordenadas del punto C.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=50 \\ x+8y=64 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=50 \\ x=64-8y \end{array}\right\} \Rightarrow 2(64-8y)+3y=50 \Rightarrow 128-16y+3y=50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -13y=-78 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-78}{-13}=6} \Rightarrow \boxed{x=64-48=16} \Rightarrow \boxed{C(16,6)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=10x+90y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 8) → $B(0,8)=0+720=720$

C(16, 6) → $B(16,6)=160+540=700$

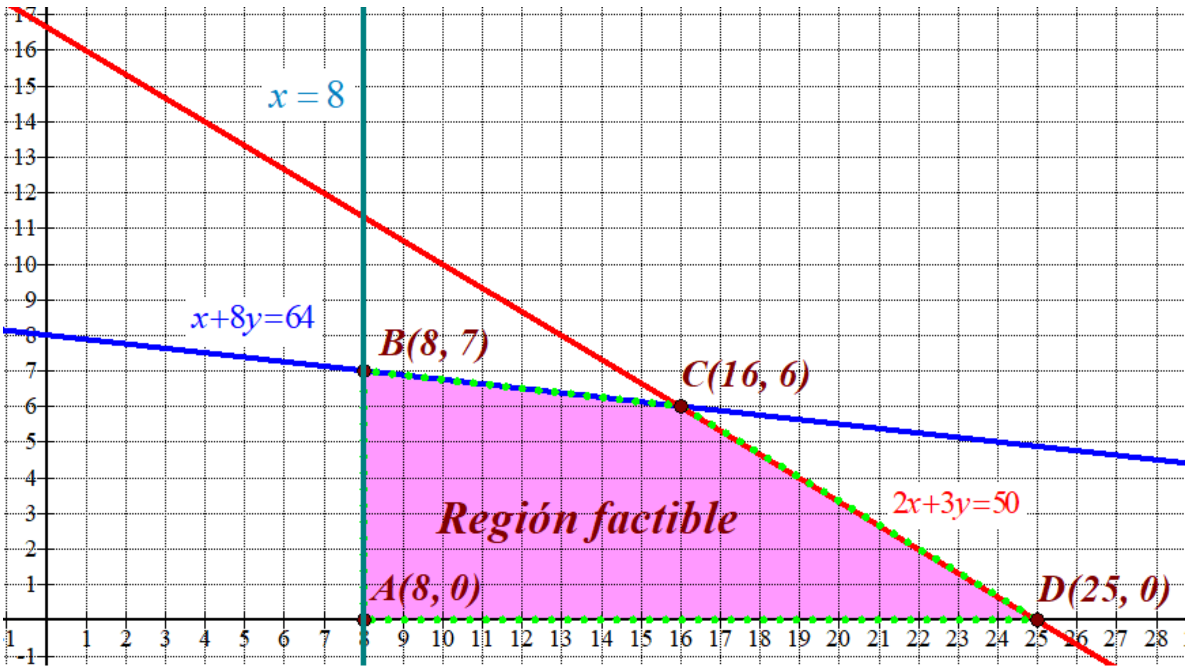
D(25, 0) → $B(25,0)=250+0=250$

El beneficio máximo se obtiene elaborando 8 brazaletes a la semana y ningún anillo.

Si tuviese apalabrados 8 anillos cambiaría la respuesta, pues la solución optima es no hacer ninguno. Añadimos la nueva restricción y el sistema de restricciones quedaría

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 8;\ y \geq 0 \\ 2x+3y \leq 50 \\ x+8y \leq 64 \end{array}\right\}$$

Siendo la región factible con esta nueva situación la zona rosa del dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x,y)=10x+90y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(8, 0) → $B(8,0)=80$

B(8, 7) → $B(8,7)=80+630=710$

C(16, 6) → $B(16,6)=160+540=700$

D(25, 0) → $B(25,0)=250+0=250$

El máximo beneficio se obtendría con la elaboración de 8 anillos y 7 brazaletes.

Las horas de trabajo semanales se obtienen con la expresión $2x+3y$, por lo que en la primera situación (sin apalabrar nada) con 8 brazaletes emplearía 8 · 3 = 24 horas. En la segunda situación (apalabrados 8 anillos) emplearía 2 · 8 + 3 · 7 = 16 + 21 = 37 horas semanales.

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Representa conjuntamente, en el intervalo de abscisas $[-2,3]$, las gráficas de las funciones f y g dadas por

$$f(x)=x^2+2x \quad \text{y} \quad g(x)=5-2x \quad \textbf{[1.5 puntos]}$$

¿Qué punto a hace que sea continua la función

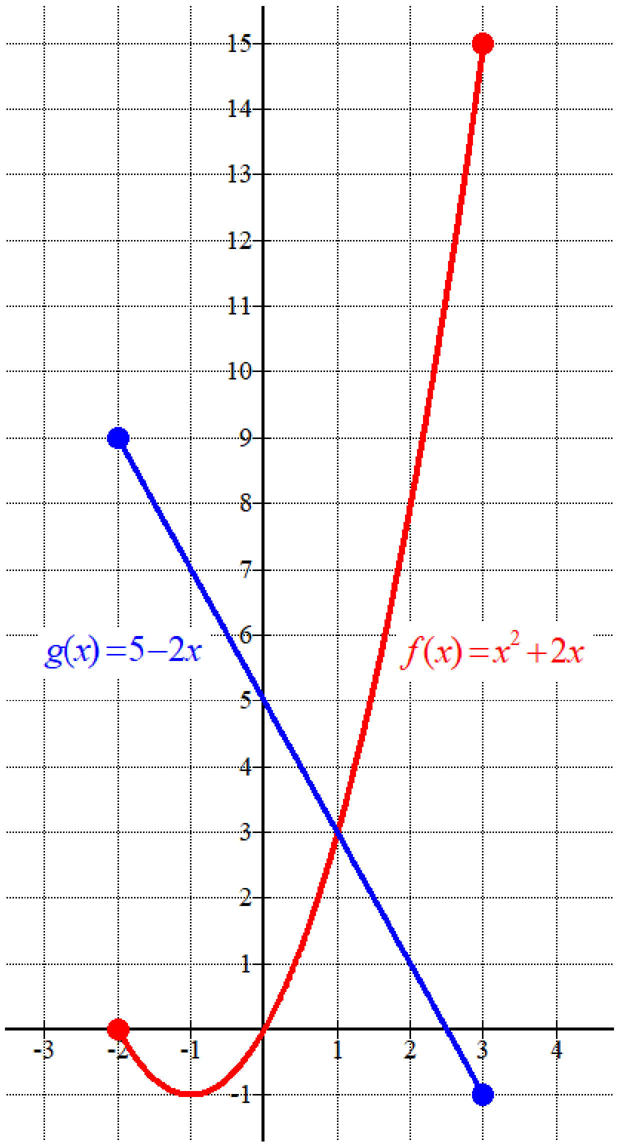
$$h(x)=\begin{cases} f(x) & si \quad -2\le x<a, \\ g(x) & si \quad a\le x\le 3 \end{cases}?$$

Resalta la gráfica de h en el dibujo anterior. ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de los valores de h en $[-2,3]$? **[1 punto]**

La función $f(x)=x^2+2x$ es una parábola y la función $g(x)=5-2x$ una recta. Hacemos una tabla de valores para cada una de ellas.

x	$y=x^2+2x$
-2	0
-1	-1
0	0
1	3
3	15

x	$y=5-2x$
-2	9
-1	7
0	5
1	3
3	-1



Para que la función h sea continua debe cumplirse:

$$\lim_{x\to a^-} h(x)=\lim_{x\to a^+} h(x)=h(a)\Rightarrow \lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=h(a)$$

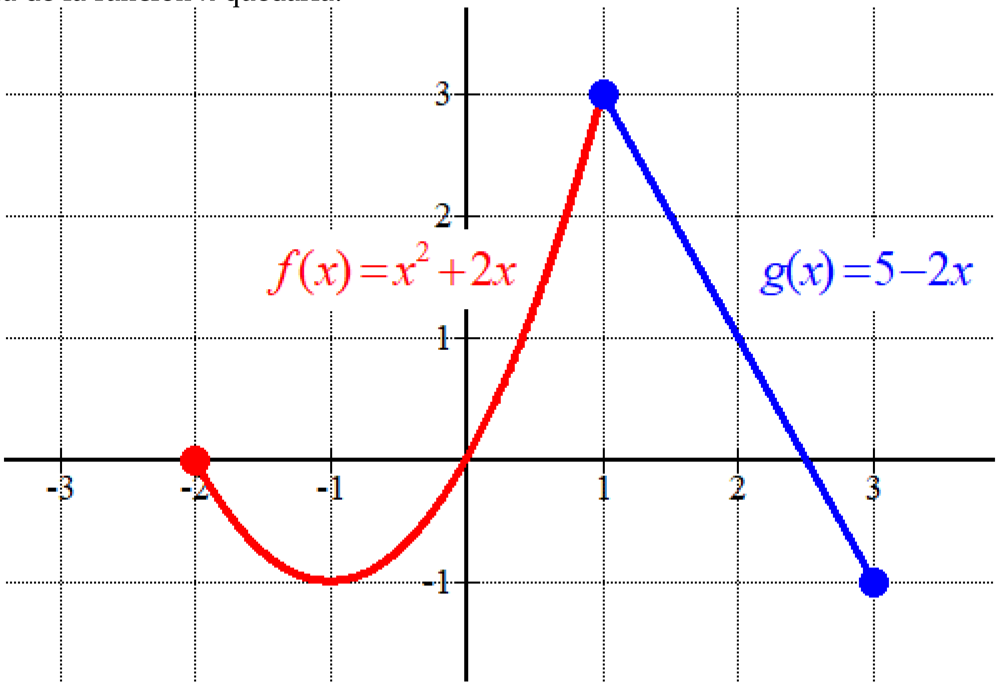
Y mirando la gráfica solo ocurre en a = *1*.

Con cálculos se comprobaría:

$$\lim_{x\to a^-} h(x) = \lim_{x\to a^+} h(x) = h(a) \Rightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = h(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a = 5 - 2a \Rightarrow a^2 + 4a - 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-5)}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{-4+6}{2} = \boxed{1 = a} \\ \frac{-4-6}{2} = -5 \notin [-2,3] \end{cases}$$

La gráfica de la función h quedaría:



Los valores máximo y mínimo de la función h en el intervalo $[-2,3]$ son:

Máximo →3

Mínimo → −1

2.2.- La distancia que ha recorrido un coche hasta el instante *t*, desde que arrancó en $t=0$, viene dada por la siguiente función $e(t)$ entre $t=1$ y $t=4$:

$$e(t)=\begin{cases}120t+90 & si \quad 1\le t<3\\ C-240t+150t^2-20t^3 & si \quad 3\le t\le 4\end{cases}$$

En $t=4$ se para, de forma que $e(t)=e(4)$ para cada *t* en $(4,5]$.

(i) Calcula el valor de C, considerando que $e(t)$ define una función continua.

[0.75 puntos]

(ii) La velocidad en cada instante $v(t)$ es la derivada del espacio recorrido, es decir, $v(t)=e'(t)$. Expresa cuánto vale dicha derivada en cada punto, e investiga si es una función continua en $[1,5]$. ¿Cómo expresarías, en términos de la velocidad, que la gráfica de $e(t)$ es recta en el intervalo $[1,3]$ y en el intervalo $[4,5]$? **[1 punto]**

(iii) Calcula la distancia recorrida entre $t=3$ y $t=4$, es decir $e(4)-e(3)$. ¿Por qué es igual a $\int_3^4 v(t)\,dt$? **[0.75 puntos]**

(i) Para que sea continua debe serlo en *t = 3* y debe cumplirse $\lim_{t\to 3^-} e(t)=\lim_{t\to 3^+} e(t)=e(3)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{t\to 3^-} e(t)=\lim_{t\to 3^-} 120t+90=360+90=450\\ \lim_{t\to 3^+} e(t)=\lim_{t\to 3^+} C-240t+150t^2-20t^3=C-240\cdot 3+150\cdot 3^2-20\cdot 3^3=C+90\\ e(3)=C+90\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 450=C+90\Rightarrow \boxed{C=360}$$

(ii) La función $e(t)$ en el intervalo $[1,5]$ tiene la expresión:

$$e(t)=\begin{cases}120t+90 & si \quad 1\le t<3\\ 360-240t+150t^2-20t^3 & si \quad 3\le t\le 4\\ e(4)=520 & si \quad 4<t\le 5\end{cases}$$

Derivamos esta función:

$$v(t)=e'(t)=\begin{cases}120 & si \quad 1\le t<3\\ -240+300t-60t^2 & si \quad 3<t<4\\ 0 & si \quad 4<t\le 5\end{cases}$$

Falta ver si existe la derivada de $e(t)$ en *t = 3* y en *t = 4* y por tanto la función $v(t)$ en dichos valores.

$$\left.\begin{array}{l}e'(3^-)=120\\ e'(3^+)=-240+300\cdot 3-60\cdot 3^2=120\end{array}\right\}\Rightarrow v(3)=e'(3)=120$$

$$\left.\begin{array}{l}e'(4^-)=-240+300\cdot 4-60\cdot 4^2=0\\ e'(4^+)=0\end{array}\right\}\Rightarrow v(4)=e'(4)=0$$

La función $v(t)$ es continua.

Que la función espacio recorrido sea una recta significa que la derivada no cambia de valor, es decir, que la velocidad permanece constante.

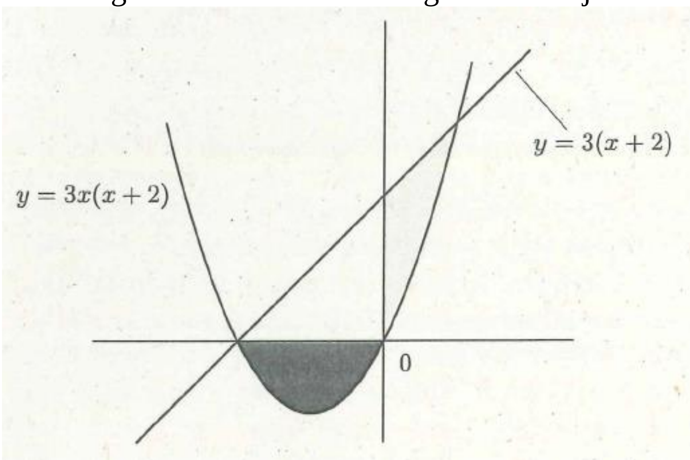
(iii) $e(4)-e(3)=520-(120\cdot 3+90)=70$

Sabemos que $\int f'(t)\,dt = f(t)$, por lo que $\int v(t)\,dt = \int e'(t)\,dt = e(t)$ y aplicando la regla de Barrow tenemos que $\int_3^4 v(t)\,dt = \left[e(t)\right]_3^4 = e(4)-e(3)$.

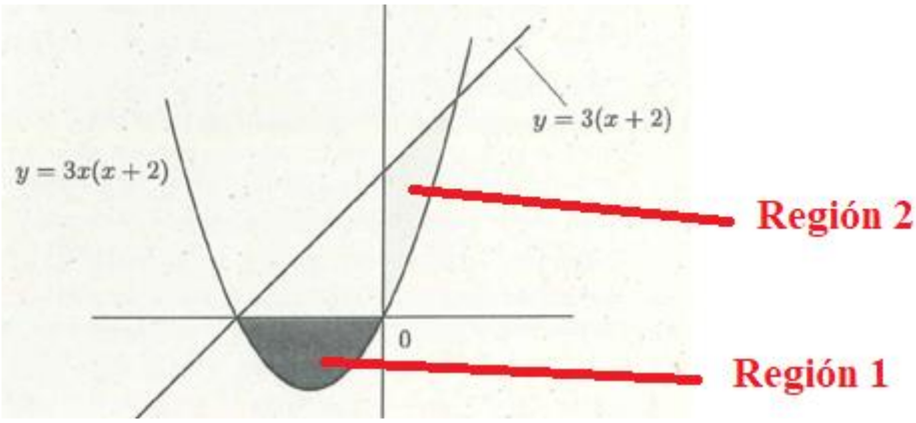
Lo comprobamos:

$$\int_3^4 v(t)\,dt = \int_3^4 -240+300t-60t^2 dt = \left[-240t+150t^2-20t^3\right]_3^4 =$$
$$=\left[-240\cdot 4+150\cdot 4^2-20\cdot 4^3\right]-\left[-240\cdot 3+150\cdot 3^2-20\cdot 3^3\right]=\boxed{70}=e(4)-e(3)$$

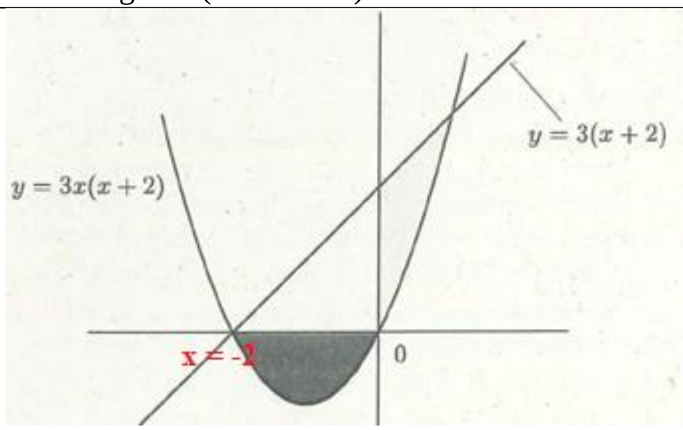
2.3.- Calcula el área de las dos regiones señaladas en el siguiente dibujo:



[2.5 puntos]



Calculamos primero el área de la región 1(más oscura):



Necesitamos los puntos de corte de la parábola $y=3x\left(x+2\right)$ con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=3x\left(x+2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 3x\left(x+2\right)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \end{array}\right.$$

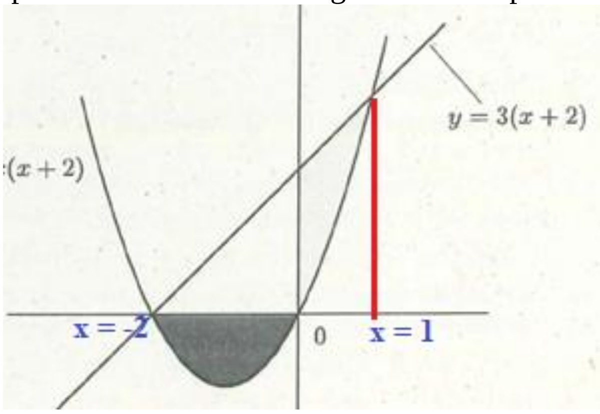
Calculamos el área con el valor absoluto de la integral definida.

$$\acute{A}rea=\left|\int_{-2}^{0} 3x\left(x+2\right)dx\right|=\left|\int_{-2}^{0} 3x^2+6xdx\right|=\left|\left[x^3+3x^2\right]_{-2}^{0}\right|=$$

$$=\left|\left[0^3+3\cdot 0^2\right]-\left[\left(-2\right)^3+3\left(-2\right)^2\right]\right|=\left|-4\right|=\boxed{4u^2}$$

Calculamos ahora el área de la región 2 (menos oscura):

Necesitamos averiguar el punto de corte de ambas gráficas en el primer cuadrante.



$$\left.\begin{array}{l} y=3(x+2) \\ y=3x(x+2) \end{array}\right\} \Rightarrow 3x(x+2)=3(x+2) \Rightarrow 3x^2+6x=3x+6 \Rightarrow 3x^2+3x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} \boxed{x=\frac{-1+3}{2}=1} \\ x=\frac{-1-3}{2}=-2 \end{cases}$$

Calculamos el área con el valor de la integral definida.

$$Área=\int_0^1 3(x+2)-3x(x+2)\,dx=\int_0^1 -3x^2-3x+6\,dx=$$

$$=\left[-x^3-3\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^1=\left[-1^3-3\frac{1^2}{2}+6\cdot 1\right]-\left[-0^3-3\frac{0^2}{2}+6\cdot 0\right]=-1-\frac{3}{2}+6=\boxed{3.5u^2}$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

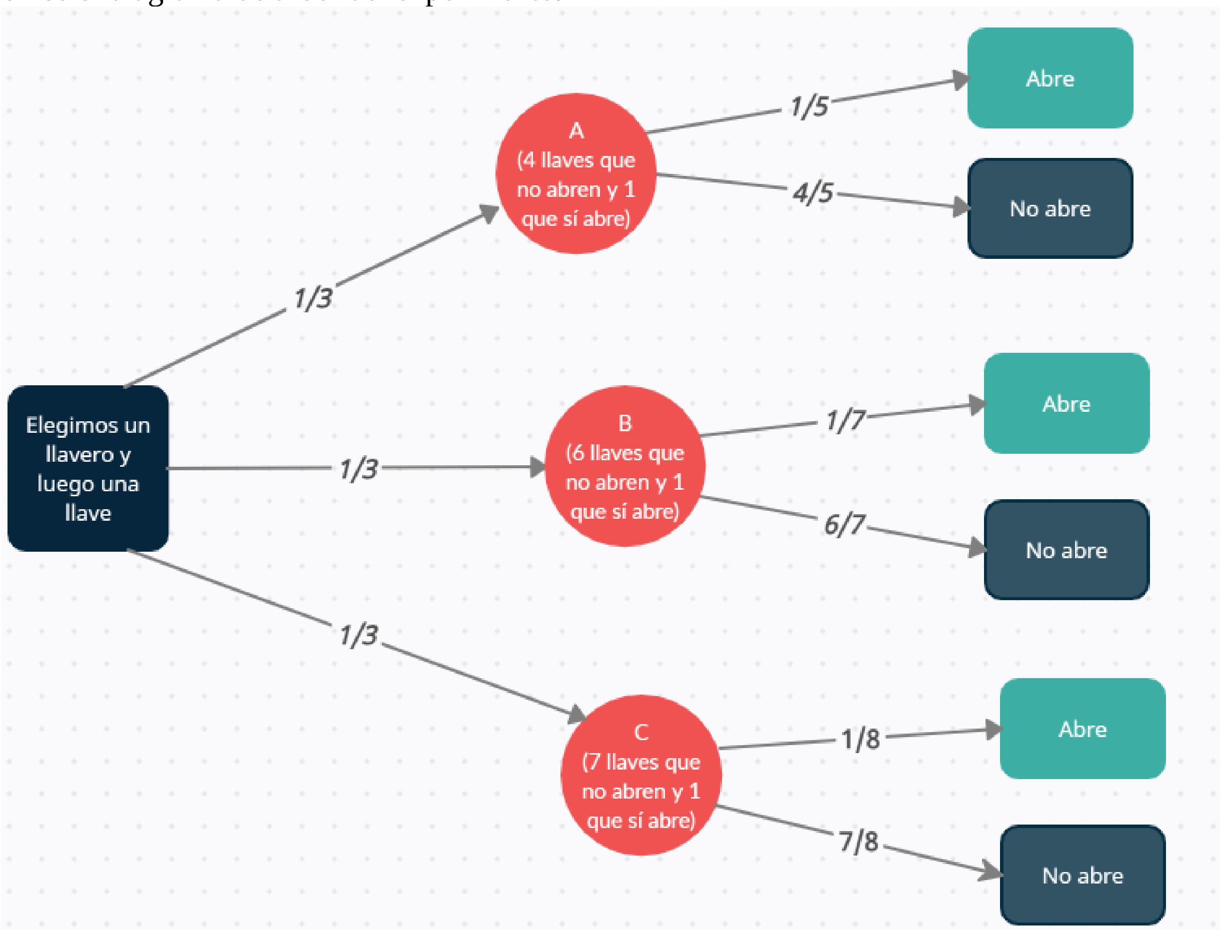
3.1.- En una casa hay tres llaveros: A, B y C, el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él se toma a su vez una llave al azar. Entendemos que, cuando se escoge una cosa al azar entre varias, todas ellas tienen la misma probabilidad de ser la escogida. Se pide:

(i) La probabilidad de que la llave elegida abra el trastero. **[1.25 puntos]**

(ii) Si resulta que lo abre, la probabilidad de que sea del llavero A. **[1.25 puntos]**

Llamamos A al suceso "Coge el llavero A", B al suceso "Coge el llavero B" y C al suceso "Coge el llavero C".

Hacemos el diagrama de árbol del experimento.



(i)

$$P(Abra) = P(A)\cdot P(Abra/A) + P(B)\cdot P(Abra/B) + P(C)\cdot P(Abra/C) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \boxed{\frac{131}{840} \simeq 0.16 = 16\%}$$

(ii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/Abre) = \frac{P(A\cap Abre)}{P(Abre)} = \frac{P(A)P(Abre/A)}{P(Abre)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{131}{840}} = \boxed{\frac{56}{131} \simeq 0.43 = 43\%}$$

3.2.- Una variable X es normal de media 25 y desviación típica 5, y otra Y es también normal, pero con media 28 y desviación típica 1.

(i) Calcula las probabilidades $P(X>30)$ y $P(Y>30)$. ¿Cuál es mayor? **[1 punto]**

(ii) Tomamos una muestra de $n=4$ valores independientes de X y anotamos su promedio $\overline{X}$. Calcula $P(\overline{X}>30)$. ¿Cuál sería el resultado si $n=9$? **[1 punto]**

(iii) ¿Cómo explicarías la comparación del resultado de (ii) con el de (i), sin recurrir a fórmulas? **[0.5 puntos]**

(i) Calculamos las probabilidades pedidas

$$X=N(25,5)\Rightarrow P(X>30)=P\left(\frac{X-25}{5}>\frac{30-25}{5}\right)=P(Z>1)=1-P(Z\le 1)=$$

$$=\begin{Bmatrix}\text{Miramos}\\ \text{en la tabla}\end{Bmatrix}=1-0.84134=\boxed{0.15866}$$

$$Y=N(28,1)\Rightarrow P(Y>30)=P\left(\frac{Y-28}{1}>\frac{30-28}{1}\right)=P(Z>2)=1-P(Z\le 2)=$$

$$=\begin{Bmatrix}\text{Miramos}\\ \text{en la tabla}\end{Bmatrix}=1-0.97725=\boxed{0.02275}$$

Por lo que es mayor $P(X>30)$

(ii) Si tomamos una muestra de tamaño 4 tenemos que

$$Si\ X=N(25,5)\Rightarrow \overline{X_4}=N\left(25,\frac{5}{\sqrt{4}}\right)\Rightarrow \overline{X_4}=N(25,2.5)$$

$$P\left(\overline{X_4}>30\right)=P\left(\frac{\overline{X_4}-25}{2.5}>\frac{30-25}{2.5}\right)=P(Z>2)=1-P(Z\le 2)=\boxed{0.02275}$$

Si tomamos una muestra de tamaño 9 tenemos que

$$Si\ X=N(25,5)\Rightarrow \overline{X_9}=N\left(25,\frac{5}{\sqrt{9}}\right)\Rightarrow \overline{X_9}=N\left(25,\frac{5}{3}\right)$$

$$P\left(\overline{X_9}>30\right)=P\left(\frac{\overline{X_9}-25}{5/3}>\frac{30-25}{5/3}\right)=P(Z>3)=1-P(Z\le 3)=1-0.99865=\boxed{0.00135}$$

(iii) La distribución de las medias muestrales tiene la misma media y una desviación típica ($\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) que va siendo menor conforme aumenta el valor de *n*, pues al tomar varios elementos su valor medio va siendo más próximo a la media. Por ello se cumple:

$$P(X>30)>P\left(\overline{X_4}>30\right)>P\left(\overline{X_9}>30\right)$$

3.3.- Como ya sabe la cifra de asistentes, el ayuntamiento de Zaragoza ha asegurado que la duración de la ofrenda de flores del día del Pilar tendrá, en horas, una distribución de probabilidad normal con media 8 y desviación típica $\sqrt{2}/5$.

(i) ¿Puedes afirmar, con al menos un 95% de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media? ¿Podemos hacerlo con probabilidad mayor del 99%?

[1.5 puntos]

(ii) Una variable normal estándar Z cumple que $P(Z \leq 2.3263) = 0.99$. ¿Qué desviación típica (en lugar de la dada, y manteniendo la media de ocho horas) debería tener la duración de la ofrenda para que la probabilidad de ser menor que ocho horas y media fuera del 99%? **[1 punto]**

(i) X = "Duración de la ofrenda floral en horas". $X = N\left(8, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$

Calculamos la probabilidad de que la ofrenda floral dure menos de 8,5 horas.

$$P(X < 8.5) = P\left(\frac{X-8}{\sqrt{2}/5} < \frac{8.5-8}{\sqrt{2}/5}\right) = P\left(Z < \frac{2.5}{\sqrt{2}}\right) = P(Z < 1.77) = 0.96164$$

Luego $P(X < 8.5) = 0.96164 > 0.95$ y por tanto si se puede realizar la primera afirmación: "Puedes afirmar, con al menos un 95% de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media"

Luego $P(X < 8.5) = 0.96164 < 0.99$ y por tanto NO se puede realizar la segunda afirmación: "Podemos afirmarlo con probabilidad mayor del 99%"

(ii) $X = N(8, \sigma)$

$$P(X < 8.5) = 0.99 \Rightarrow P\left(\frac{X-8}{\sigma} < \frac{8.5-8}{\sigma}\right) = 0.99 \Rightarrow P\left(Z < \frac{0.5}{\sigma}\right) = 0.99$$

Como se cumple que $P(Z \leq 2.3263) = 0.99$ entonces tenemos que:

$$\frac{0.5}{\sigma} = 2.3263 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{0.5}{2.3263} \simeq 0.2149}$$