uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2021-2022** **MATERIA**: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A

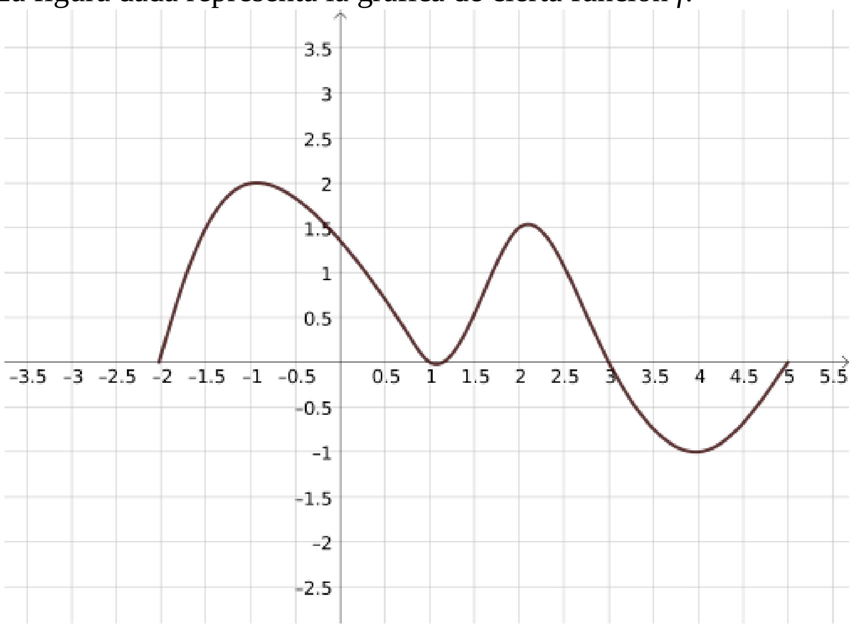
$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ a & -1 & 1\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real *a* para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

A.2. (2 puntos) El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1;6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1e y por cada litro de chocolate un beneficio de 2e. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

A.3. (2 puntos) La figura dada representa la gráfica de cierta función *f*.



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$ y $x = 4$:

a) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

b) Determine razonadamente cuál es el signo de

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx\,.$$

A.4. (2 puntos) Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A)=0,6$, $P(A/B)=0,4$ y $P(A/B^C)=0,8$; siendo B^c es el suceso complementario de B.

a) Calcule P(B).

b) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

A.5. (2 puntos) Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99% para el peso medio de un saco de cemento.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilogramo, con un nivel de confianza del 90%.

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a \\ ax-y-az=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de *a*.

b) Resuelva el sistema para *a = 2*.

B.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$$

a) Determine sus asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

b) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

B.3. (2 puntos) Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm^2 para el cuadrado y 10 céntimos de euro/cm^2 para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.
Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 cifras decimales para realizar los cálculos.

B.4. (2 puntos) Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

a) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

b) Si la carta observada no es diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

B.5. (2 puntos) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

a) Determine el valor de σ sabiendo que I = (58,2; 73,8) es un intervalo de confianza del 95% para μ.

b) Si $\sigma=20$; calcule $P\left(-10<\overline{X}-\mu<10\right)$

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real *a* para los cuales la matriz A es invertible.
b) Calcule A^{-1} para *a = 1*.

a) Para ser invertible el determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=-2+a^2-2a$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-2a-2=0 \Rightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-2)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{3}}{2}=\begin{cases} 1-\sqrt{3}=a \\ 1+\sqrt{3}=a \end{cases}$$

Para ser invertible el valor de *a* debe ser distinto de $1-\sqrt{3}$ y de $1+\sqrt{3}$.

b) Para *a = 1* la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2+1-2=-3$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-3}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

A.2. (2 puntos) El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1 € y por cada litro de chocolate un beneficio de 2 €. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

Llamemos x = “litros de leche”, y = “litros de chocolate liquido”.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=x+2y$.

Las restricciones del problema son:

“Las cantidades deben ser positivas” → $x\geq 0;\quad y\geq 0$

“*Dispone para la mezcla de 30 litros de leche*” → $x\leq 30$

“*Dispone para la mezcla de 20 litros de chocolate líquido*” → $y\leq 20$

“*Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche*” → $x\leq 3y$

“*Por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate*” → $y\leq 1,6x$

“*Solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche*” → $x+y\leq 45$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x\leq 30 \\ y\leq 20 \\ x\leq 3y \\ y\leq 1,6x \\ x+y\leq 45 \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x\leq 30 \\ y\leq 20 \\ x-3y\leq 0 \\ y-1,6x\leq 0 \\ x+y\leq 45 \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right.$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

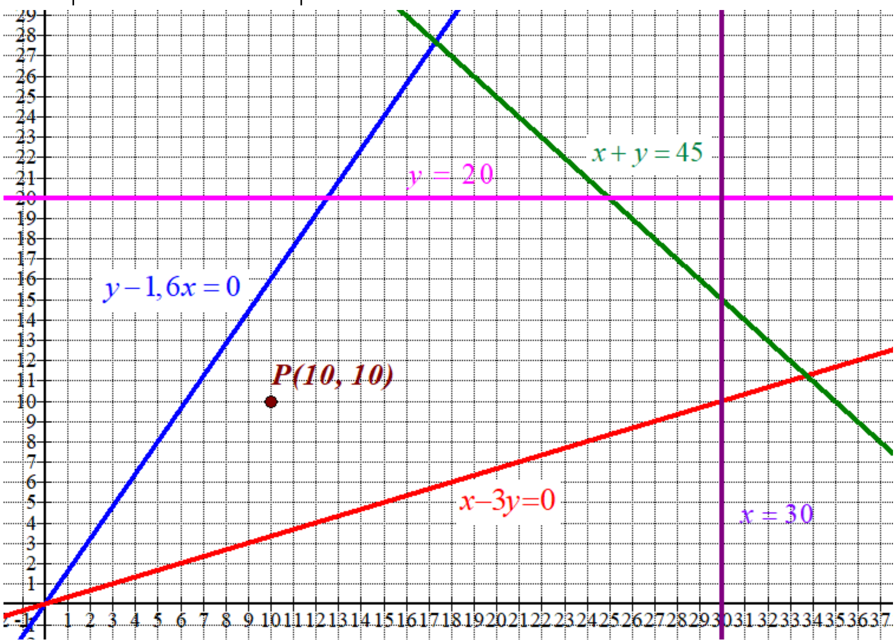
$-3y=0$ $\qquad y-1,6x=0$ $\qquad x+y=45$ $\qquad x=30$ $\qquad y=20$ $\qquad x\geq 0;\quad y\geq 0$

x	$y=\frac{x}{3}$
0	0
3	3

x	$y=1,6x$
0	0
10	16

x	$y=45-x$
0	45
45	0

Recta vertical — *Recta horizontal* — *Primer cuadrante*

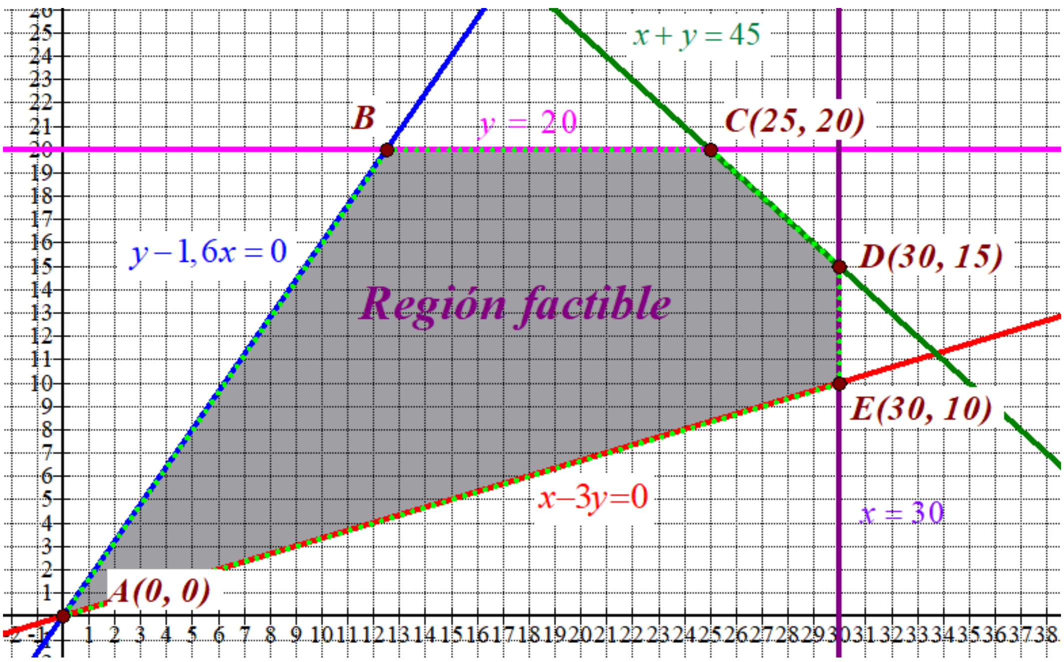


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{r} x \leq 30 \\ y \leq 20 \\ x-3y \leq 0 \\ y-1,6x \leq 0 \\ x+y \leq 45 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región está en el primer cuadrante por debajo de la recta azul y verde, por encima de la recta roja, a la izquierda de $x = 30$ y por debajo de la recta horizontal $y = 20$.

Lo comprobamos probando si el punto P(10, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 10 \leq 30 \\ 10 \leq 20 \\ 10-30 \leq 0 \\ 10-16 \leq 0 \\ 10+10 \leq 45 \\ 10 \geq 0; \quad 10 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Nos falta por determinar las coordenadas del punto B. Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$\left.\begin{array}{l} y = 20 \\ y-1.6x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 20-1.6x = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{1.6} = 12.5 \Rightarrow B(12.5, 20)$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = x + 2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0) = 0$

B(12.5, 20) → $B(12.5, 20) = 12.5 + 40 = 52.5$

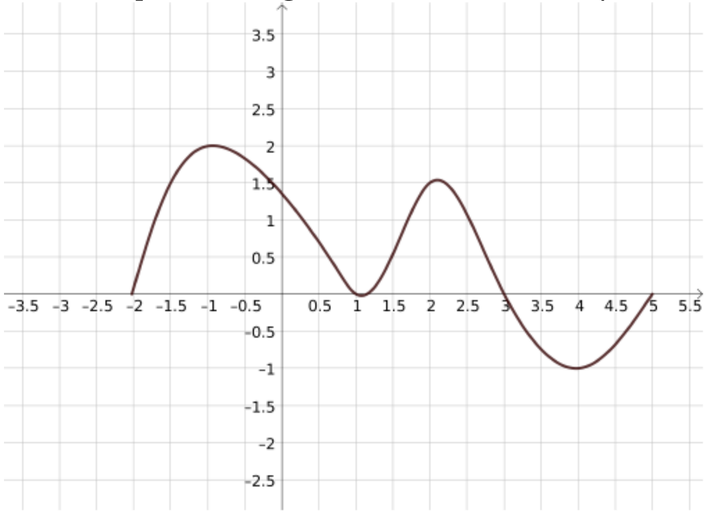
C(25, 20) → $B(25, 20) = 25 + 40 = 65$ ¡¡*Máximo*!!

D(30, 15) → $B(30,15) = 30 + 30 = 60$

E(30, 10) → $B(30,10) = 30 + 20 = 50$

El beneficio máximo es de 65 € y se consigue en el vértice C(25, 20), que significa mezclar 25 litros de leche con 20 litros de chocolate líquido.

A.3. (2 puntos) La figura dada representa la gráfica de cierta función *f*.



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$ y $x = 4$:

a) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

b) Determine razonadamente cuál es el signo de

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx .$$

a) La derivada es 0 en $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$ y $x = 4$. La derivada es positiva (la función crece) en los intervalos $(-2,-1)\cup(1,2)\cup(4,5)$.

b) En el intervalo (–2, 3) la gráfica está por encima del eje y en el intervalo (3, 5) está por debajo.

La integral definida de la función en el intervalo (–2, 3) es positiva y en el intervalo (3, 5) es negativa, pero es más grande el área de la región limitada por la gráfica y el eje OX en el intervalo (–2, 3) por lo que $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$ va a tener un resultado positivo.

A.4. (2 puntos) Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A)=0,6$, $P(A/B)=0,4$ y $P(A/B^C)=0,8$; siendo B^c es el suceso complementario de B.

a) Calcule P(B).

b) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

a)

$$P(A/B)=0,4 \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,4 \Rightarrow P(A\cap B)=0,4\cdot P(B)$$

$$P(A/B^C)=0,8 \Rightarrow \frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=0,8 \Rightarrow P(A\cap B^C)=0,8\cdot P(B^C)=0,8(1-P(B))=0,8-0,8\cdot P(B)$$

Como $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$ sustituimos las expresiones anteriores.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0,4\cdot P(B) \\ P(A\cap B^C)=0,8-0,8\cdot P(B) \\ P(A)=0,6 \\ P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C) \end{array}\right\} \Rightarrow 0,6=0,4\cdot P(B)+0,8-0,8\cdot P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,6=0,4\cdot P(B)+0,8-0,8\cdot P(B) \Rightarrow -0,2=-0,4\cdot P(B) \Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{0,2}{0,4}=0,5}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Usando el teorema de la probabilidad total.

$$P(A)=P(B)P(A/B)+P(B^C)P(A/B^C) \Rightarrow 0,6=0,4P(B)+0,8P(B^C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,6=0,4P(B)+0,8(1-P(B)) \Rightarrow 0,6=0,4P(B)+0,8-0,8P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0,2=-0,4P(B) \Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{-0,2}{-0,4}=0,5}$$

b) ¿Son A y B independientes? Para ello debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$P(A/B)=0,4 \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,4 \Rightarrow P(A\cap B)=0.4\cdot P(B)=0.4\cdot 0.5=0.2$$

$$P(A)P(B)=0.6\cdot 0.5=0.3$$

$$P(A\cap B)=0.2\neq 0.3=P(A)P(B)$$

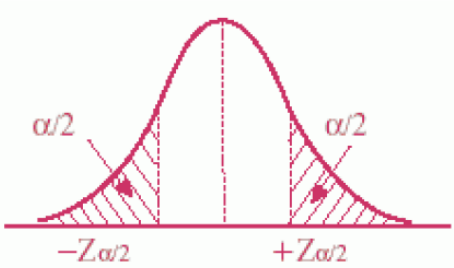
No son independientes los sucesos A y B.

A.5. (2 puntos) Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.
a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99% para el peso medio de un saco de cemento.
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilogramo, con un nivel de confianza del 90%.

a) X = Peso de un saco de cemento (en kg).
X = N(μ, 2)
Tamaño de muestra es n = *20* y la media muestral es $\bar{x} = 50$

Calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$



Calculamos el error del intervalo de confianza.

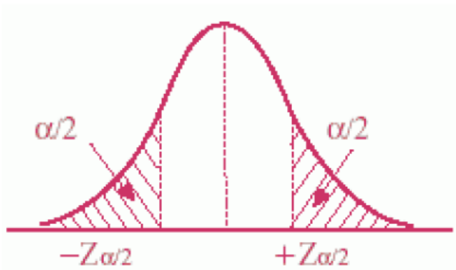
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 1.15$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = (50-1.15,\ 50+1.15) = (48.85,\ 51.15)$$

b)
Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$



Igualamos el error a 1.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.645 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{n = (1.645 \cdot 2)^2 = 10.8241}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 11 sacos.

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a \\ ax-y-az=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelva el sistema para *a* = *2*.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1-a^2+a+1-a^2+a=-2a^2+2a$$

$$|A|=0 \Rightarrow -2a^2+2a=0 \Rightarrow 2a(-a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ -a+1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
El sistema queda tan sencillo que podemos resolverlo fácilmente.

$$\left.\begin{array}{r} x+z=0 \\ -y=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=0 \\ \boxed{y=0} \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=0 \\ x+0+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=0 \\ x+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
El sistema queda tan sencillo que podemos resolverlo fácilmente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y-z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 1^{\text{a}} = \text{Ecuación } 3^{\text{a}}\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x=y+z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+z+y+z=1 \Rightarrow 2y+2z=1 \Rightarrow 2y=1-2z \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}-z} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}-z+z=\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Solución: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} - t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ecuación\,2^{a} - 2\cdot Ecuación\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 2x & -y & -2z & =0 \\ -2x & -4y & -2z & =-4 \\ \hline 0 & -5y & -4z & =-4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Ecuación\,3^{a} - Ecuación\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} x & +y & +z & =1 \\ -x & -2y & -z & =-2 \\ \hline 0 & -y & 0 & =-1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ -5y-4z=-4 \\ -y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ -5y-4z=-4 \\ \boxed{y=1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2+z=2 \\ -5-4z=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=0 \\ -4z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=0 \\ \boxed{z=-\dfrac{1}{4}} \end{array}\right\} \Rightarrow x-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{4}}$$

La solución es $x=\dfrac{1}{4};\ y=1;\ z=-\dfrac{1}{4}$

B.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$$

a) Determine sus asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
b) Calcule *f ´(x)* y halle el valor de *f ´(2)*.

a) El dominio de la función son todos los reales menos los que anulen el denominador.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow Dominio=\mathbb{R}-\{1\}$$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=1$?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{x-1}=\frac{1-1+1}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x-1}=\{\text{Grado del numerador} > \text{grado del denominador}\}=+\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=$$

$$=\{\text{Grado del numerador} = \text{grado del denominador}\}=\frac{1}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x}+1-\cancel{x^2}+\cancel{x}}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=x$.

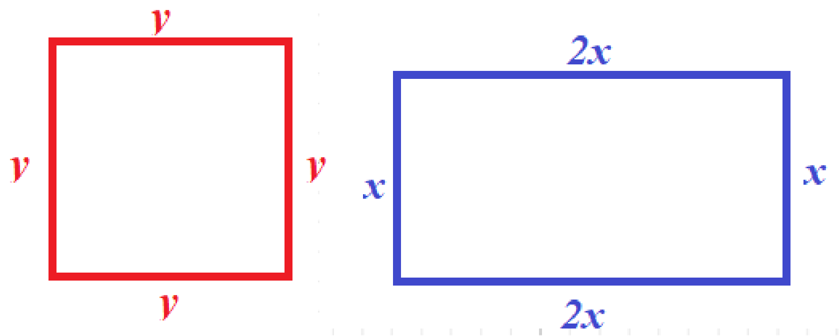
b)

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-2x-\cancel{x}+\cancel{1}-x^2+\cancel{x}-\cancel{1}}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}} \Rightarrow \boxed{f'(2)=\frac{2^2-2\cdot 2}{(2-1)^2}=0}$$

B.3. (2 puntos) Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm^2 para el cuadrado y 10 céntimos de euro/cm^2 para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.
Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 cifras decimales para realizar los cálculos.



Área del cuadrado de lado "y" es y^2. El área del rectángulo es $2x \cdot x = 2x^2$

El coste es $C(x,y) = 16 \cdot y^2 + 10 \cdot 2x^2 = 16y^2 + 20x^2$

Si el alambre inicial mide 450 cm → $4y + 2x + 4x = 450$ →

➔ $4y + 6x = 450 \Rightarrow 2y + 3x = 225 \Rightarrow 2y = 225 - 3x \Rightarrow y = \dfrac{225-3x}{2}$

Sustituyendo en la función coste tenemos:

$$C(x) = 16\left(\frac{225-3x}{2}\right)^2 + 20x^2 = 16\frac{50625 + 9x^2 - 1350x}{4} + 20x^2$$

$$C(x) = 4\left(50625 + 9x^2 - 1350x\right) + 20x^2 = 202500 + 36x^2 - 5400x + 20x^2$$

$\boxed{C(x) = 56x^2 - 5400x + 202500}$, x es la altura del rectángulo.

Derivamos e igualamos a cero en busca del mínimo.

$$C(x) = 56x^2 - 5400x + 202500 \Rightarrow C'(x) = 112x - 5400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Rightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow 112x - 5400 = 0 \Rightarrow x = \frac{5400}{112} = \frac{675}{14} \simeq 48.214\,cm$$

La derivada segunda es

$$C'(x) = 112x - 5400 \Rightarrow C''(x) = 112 \Rightarrow C''(48.214) = 112 > 0$$

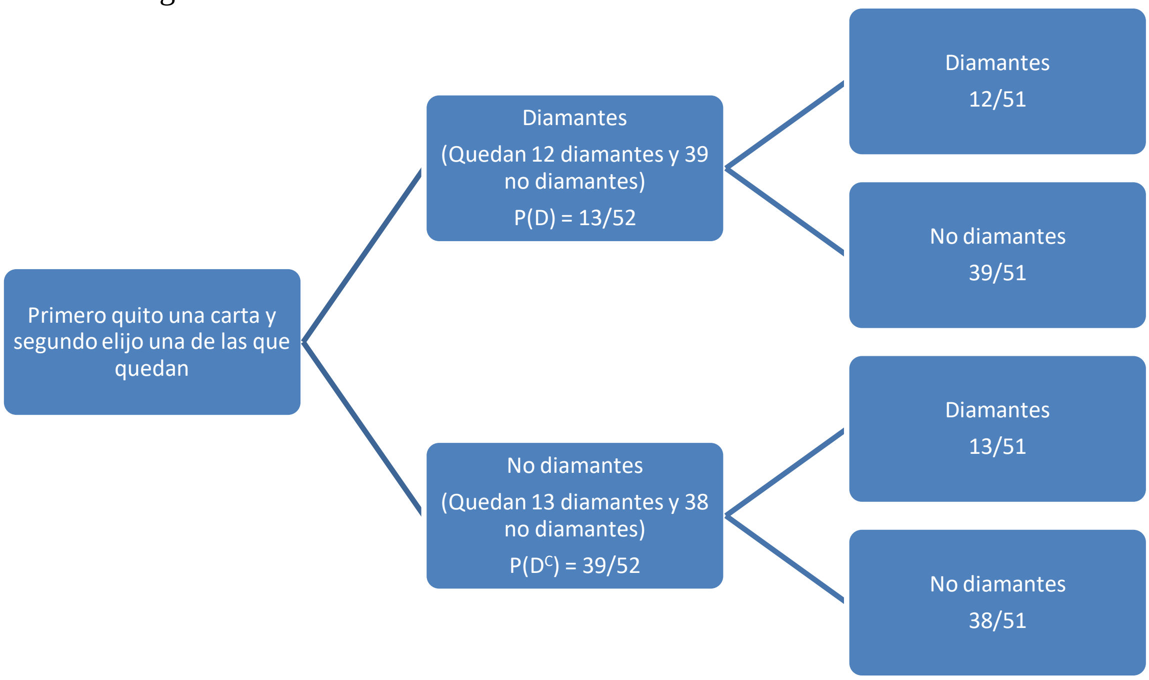
La función coste tiene un valor mínimo en $x = \dfrac{675}{14} \simeq 48.214$.

Esto significa que el trozo de alambre para el rectángulo es $6x = 6\dfrac{675}{14} = \dfrac{2025}{7} \simeq \boxed{289.286\,cm}$ y

el del cuadrado es $4y = 4\dfrac{225-3x}{2} = 2\left(225 - 3 \cdot \dfrac{675}{14}\right) = \dfrac{1125}{7} \simeq \boxed{160.714\,cm}$

B.4. (2 puntos) Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.
a) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.
b) Si la carta observada no es diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos D1 a sacar una carta de diamantes en la primera extracción y D2 a sacar una carta de diamantes en la segunda extracción.

a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D2) = P(D1)P(D2/D1) + P(\overline{D1})P(D2/\overline{D1}) =$$

$$= \frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51} + \frac{39}{52}\cdot\frac{13}{51} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplico el teorema de Bayes.

$$P(\overline{D1}/\overline{D2}) = \frac{P(\overline{D1}\cap\overline{D2})}{P(\overline{D2})} = \frac{P(\overline{D1})P(\overline{D2}/\overline{D1})}{1-P(D2)} = \frac{\frac{39}{52}\cdot\frac{38}{51}}{1-0.25} = \boxed{\frac{38}{51} \simeq 0.745}$$

B.5. (2 puntos) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

a) Determine el valor de σ sabiendo que I = (58,2; 73,8) es un intervalo de confianza del 95% para μ.

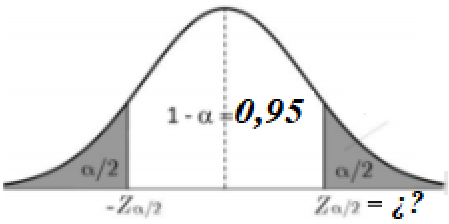
b) Si $\sigma = 20$; calcule $P\left(-10 < \overline{X} - \mu < 10\right)$

$$X = N(\mu,\ \sigma) \rightarrow \overline{X_{10}} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)$$

a)

Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



La media muestral es el valor central del intervalo de confianza I = (58,2; 73,8).

$$\bar{x} = \frac{58.2 + 73.8}{2} = 66$$

El error del intervalo es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza I = (58,2; 73,8).

$$Error = \frac{73.8 - 58.2}{2} = 7.8$$

Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 7.8 = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} \Rightarrow 7.8\sqrt{10} = 1.96\sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{7.8\sqrt{10}}{1.96} = 12.58}$$

b) $X = N(\mu,\ 20) \rightarrow \overline{X_{10}} = N\left(\mu, \frac{20}{\sqrt{10}}\right) = N\left(\mu, 2\sqrt{10}\right)$

$$P\left(-10 < \overline{X} - \mu < 10\right) = \left\{Tipificamos\right\} = P\left(\frac{-10}{2\sqrt{10}} < \frac{\overline{X} - \mu}{2\sqrt{10}} < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-10}{2\sqrt{10}} < Z < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) = P\left(Z < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) - P\left(Z < \frac{-10}{2\sqrt{10}}\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) - P\left(Z > \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) = P\left(Z < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right)\right) =$$

$$= P\left(Z < 1.58\right) - 1 + P\left(Z < 1.58\right) = 2 \cdot 0.9429 - 1 = \boxed{0.8858}$$