



Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y λ un parámetro real cualquiera.

- (a) Calcule la matriz $A - \lambda I$. (2 puntos)
- (b) Calcule la matriz $(A - \lambda I)^2$. (3 puntos)
- (c) Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A - \lambda I)^2 = B$. (5 puntos)

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a ,

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ ay = -3 \\ ax + 3z = 0 \end{array} \right\}$$

- (a) Discuta el sistema según el parámetro a . (4 puntos)
- (b) Para el valor del parámetro a para el cual el sistema tiene solución, resuélvalo. (6 puntos)



3. Considere la función $f(x) = e^{3x-2}$.

- (a) Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $3/e$. Halle la ecuación de esta recta tangente. (4 puntos)
- (b) Calcule el $\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4}$. (2 puntos)
- (c) Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$. (2 puntos)
- (d) Calcule el área de la superficie acotada por la gráfica de la función $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$. (2 puntos)

4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+a}{2x-4} & \text{si } x \leq 0, \\ 10x^2 + x + b & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

- (a) Halle la condición que han de cumplir los parámetros a y b para que la función $y = f(x)$ sea continua. (3 puntos)
- (b) Calcule $f'(x)$. (4 puntos)
- (c) Halle la condición y calcule los parámetros a y b para que la función $y = f(x)$ sea derivable. (3 puntos)
5. Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$.
- (a) Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores \vec{AB} y \vec{AC} . (2 puntos)
- (b) Encuentre las coordenadas del punto medio, M , del segmento AC . (2 puntos)
- (c) Encuentre las coordenadas del vértice D . (4 puntos)
- (d) Calcule el área del paralelogramo $ABCD$. (2 puntos)

6. Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - z = 1, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -4 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) Encuentre una ecuación vectorial para la recta r . (2 puntos)
- (b) Encuentre la posición relativa de las rectas r y s . (3 puntos)
- (c) Encuentre la ecuación general del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$. (2 puntos)
- (d) Encuentre la ecuación general del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s . (3 puntos)



7. Dados dos sucesos A y B , se conocen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.4$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.58$, donde \bar{A} y \bar{B} indican los sucesos contrarios (o complementarios) de A y de B , respectivamente. Calcule las siguientes probabilidades.
- (a) $P(\bar{A})$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes? (4 puntos)
 - (b) $P(A \cup B)$ (1 punto)
 - (c) $P(B \cap \bar{A})$ (3 puntos)
 - (d) $P(A/B)$ y $P(\bar{A}/B)$ (2 puntos)
8. El tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa antivirus sigue una distribución estadística normal de media 8.8 meses con una desviación típica de 3 meses.
- (a) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones supera los 10 meses? (3 puntos)
 - (b) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones se ha mantenido entre 7 y 10 meses? (3 puntos)
 - (c) ¿Para qué valor del parámetro c se tiene que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ es el intervalo de tiempo de duración del 98% de las actualizaciones? (4 puntos)