Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2022

Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y λ un parámetro real cualquiera.

(a) Calcule la matriz $A-\lambda I$. (2 puntos)

(b) Calcule la matriz $(A-\lambda I)^2$. (3 puntos)

(c) Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A-\lambda I)^2 = B$ (5 puntos)

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro *a*,

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ ay \quad\quad = -3 \\ ax+3z=0 \end{array}\right\}$$

(a) Discuta el sistema según el parámetro *a*. (4 puntos)

(b) Para el valor del parámetro *a* para el cual el sistema tiene solución, resuélvalo. (6 puntos)

3. Considere la función $f(x)=e^{3x-2}$.

(a) Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene pendiente igual a 3/e. Halle la ecuación de esta recta tangente. (4 puntos)

(b) Calcule el $\lim_{x\to 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4}$. (2 puntos)

(c) Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$. (2 puntos)

(d) Calcule el área de la superficie acotada por la gráfica de la función $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$. (2 puntos)

4. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+a}{2x-4} & si \quad x\le 0 \\ 10x^2+x+b & si \quad x>0 \end{cases}$$

(a) Halle la condición que han de cumplir los parámetros *a* y *b* para que la función *y = f(x)* sea continua. (3 puntos)
(b) Calcule *f ´(x)*. (4 puntos)
(c) Halle la condición que han de cumplir los parámetros *a* y *b* para que la función *y = f(x)* sea derivable. (3 puntos)

5. Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) ABCD, se conocen los vértices consecutivos A(1, 0, –1), B(2, 1, 0) y C(4, 3, –2).
(a) Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (2 puntos)
(b) Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC. (2 puntos)
(c) Encuentre las coordenadas del vértice D. (4 puntos)
(d) Calcule el área del paralelogramo ABCD. (2 puntos)

6. Dadas las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=1, \end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-4-\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}. \end{cases}.$$

(a) Encuentre una ecuación vectorial para la recta *r*, (2 puntos)
(b) Encuentre la posición relativa de las rectas *r* y *s*. (3 puntos)
(c) Encuentre la ecuación general del plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto $P(2,0,-1)$ (2 puntos)
(d) Encuentre la ecuación general del plano paralelo a la recta *r* que contiene a la recta *s*. (3 puntos)

7. Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A)=0.7$, $P(\overline{B})=0.4$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.58$, donde $\overline{A}\, y\, \overline{B}$ indican los sucesos contrarios (o complementarios) de A y de B, respectivamente. Calcule las siguientes probabilidades.
(a) $P(\overline{A}), P(B)\, y\, P(A\cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes? (4 puntos)
(b) $P(A\cup B)$ (1 punto)
(c) $P(B\cap\overline{A})$ (3 puntos)
(d) $P(A/B)\, y\, P(\overline{A}/B)$ (2 puntos)

8. El tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa antivirus sigue una distribución estadística normal de media 8.8 meses con una desviación típica de 3 meses.
(a) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones supera los 10 meses? (3 puntos)
(b) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones se ha mantenido entre 7 y 10 meses? (3 puntos)
(c) ¿Para qué valor del parámetro *c* se tiene que el intervalo $(8.8-c,\ 8.8+c)$ es el intervalo de tiempo de duración del 98 % de las actualizaciones? (4 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla de la distribución normal N(0; 1)

SOLUCIONES

1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

y λ un parámetro real cualquiera.

(a) Calcule la matriz $A-\lambda I$. (2 puntos)

(b) Calcule la matriz $(A-\lambda I)^2$. (3 puntos)

(c) Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A-\lambda I)^2=B$ (5 puntos)

a) $$A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}$$

b)

$$(A-\lambda I)^2=(A-\lambda I)(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^2+1+1&-\lambda+1-\lambda&-\lambda-\lambda\\-\lambda+1-\lambda&1+(1-\lambda)^2&1\\-\lambda-\lambda&1&1+\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\lambda^2&1-2\lambda&-2\lambda\\1-2\lambda&1+1+\lambda^2-2\lambda&1\\-2\lambda&1&1+\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}2+\lambda^2&1-2\lambda&-2\lambda\\1-2\lambda&\lambda^2-2\lambda+2&1\\-2\lambda&1&1+\lambda^2\end{pmatrix}}$$

c)

$$(A-\lambda I)^2=B\Rightarrow\begin{pmatrix}2+\lambda^2&1-2\lambda&-2\lambda\\1-2\lambda&2+\lambda^2-2\lambda&1\\-2\lambda&1&1+\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2+\lambda^2=6\\1-2\lambda=-3\\-2\lambda=-4\\2+\lambda^2-2\lambda=2\\1+\lambda^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda^2=4\\-2\lambda=-4\\-2\lambda=-4\\\lambda^2-2\lambda=0\\\lambda^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda^2=4\to\lambda=\sqrt{4}=\pm2\\-2\lambda=-4\to\lambda=2\\\lambda^2-2\lambda=0\to\lambda(\lambda-2)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\o\\\lambda=2\end{cases}\end{cases}$$

El único valor de λ que hace que se cumplan todas las igualdades es $\lambda=2$.

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro *a*,

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ ay \quad\quad =-3 \\ ax+3z=0 \end{array}\right\}$$

(a) Discuta el sistema según el parámetro *a*. (4 puntos)
(b) Para el valor del parámetro *a* para el cual el sistema tiene solución, resuélvalo. (6 puntos)

(a) Analizamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix}=9a$$

$$|A|=0 \Rightarrow 9a=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

Estudiamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única).

CASO 2. $a=0$

Vemos como queda el sistema con este valor.

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ 0 \quad\quad =-3 \\ 3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{La segunda ecuación es ¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (sin solución)

(b) El sistema tiene solución solo para $a \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ ay \quad\quad =-3 \\ ax+3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{a\neq 0\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ \boxed{y=\frac{-3}{a}} \\ ax+3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-2\frac{-3}{a}=4 \\ ax+3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+\frac{6}{a}=4 \\ ax+3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3ax+6=4a \\ ax+3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3ax=4a-6 \\ ax+3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{4a}{3a}-\frac{6}{3a} \rightarrow \boxed{x=\frac{4}{3}-\frac{2}{a}} \\ ax+3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{a}\right)+3z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z=-\frac{4a}{3}+2 \Rightarrow \boxed{z=\frac{-4}{9}a+\frac{2}{3}}$$

Para $a \neq 0$ la solución es $x=\frac{4}{3}-\frac{2}{a}$; $y=\frac{-3}{a}$; $z=\frac{-4}{9}a+\frac{2}{3}$.

3. Considere la función $f(x)=e^{3x-2}$.

(a) Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función *y = f(x)* tiene pendiente igual a 3/e. Halle la ecuación de esta recta tangente. (4 puntos)

(b) Calcule el $\lim_{x\to 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4}$. (2 puntos)

(c) Esboce la gráfica de la función *y = f(x)*. (2 puntos)

(d) Calcule el área de la superficie acotada por la gráfica de la función *y = f(x)* y las rectas *x = 0* e *y = 1*. (2 puntos)

a) La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada.

$$f(x)=e^{3x-2} \Rightarrow f'(x)=3e^{3x-2}$$

Igualamos la derivada a 3/e.

$$f'(x)=\frac{3}{e}=3e^{-1} \Rightarrow 3e^{3x-2}=3e^{-1} \Rightarrow e^{3x-2}=e^{-1} \Rightarrow 3x-2=-1 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}}$$

Sustituimos en la función para obtener las coordenadas del punto.

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=e^{\frac{3}{3}-2}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Las coordenadas del punto son $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right)$

La recta tangente tiene ecuación $y-f\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{e} \\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{e} \\ y-f\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{1}{e}=\frac{3}{e}\left(x-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow y=\frac{1}{e}+\frac{3}{e}x-\frac{3}{3e} \Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{e}x}$$

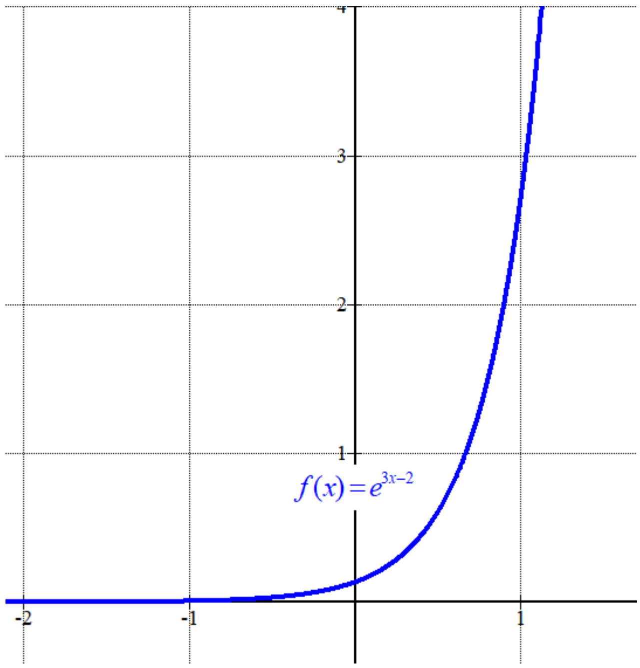
b)

$$\lim_{x\to 2/3}\frac{1-f(x)}{6x-4}=\lim_{x\to 2/3}\frac{1-e^{3x-2}}{6x-4}=\frac{1-e^{0}}{4-4}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 2/3}\frac{-3e^{3x-2}}{6}=\frac{-3e^{2-2}}{6}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

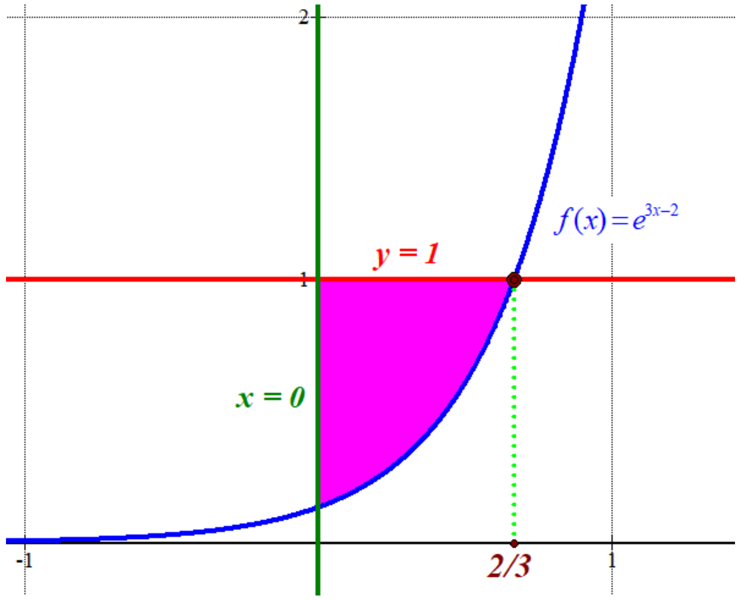
c) Hacemos una tabla de valores.

x	$f(x)=e^{3x-2}$
-2	0.0003
-1	0.0067
0	0.135
1	2.71
2	54.598



d) El área pedida es la del dibujo.
Hallamos los puntos de corte de $y = f(x)$ y la recta $y = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^{3x-2} \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{3x-2}=1=e^0 \Rightarrow 3x-2=0 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{3}}$$



La calculamos con la integral definida de la función entre 0 y 2/3 de la diferencia de las dos funciones.

$$\acute{A}rea=\int_0^{2/3} 1-e^{3x-2}dx=\left[x-\frac{e^{3x-2}}{3}\right]_0^{2/3}=$$

$$=\left[\frac{2}{3}-\frac{e^{2-2}}{3}\right]-\left[0-\frac{e^{0-2}}{3}\right]=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{e^{-2}}{3}=\boxed{\frac{1}{3}+\frac{e^{-2}}{3}\simeq 0.378u^2}$$

4. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+a}{2x-4} & si \quad x\le 0 \\ 10x^2+x+b & si \quad x>0 \end{cases}$$

(a) Halle la condición que han de cumplir los parámetros *a* y *b* para que la función *y = f(x)* sea continua. (3 puntos)

(b) Calcule *f ´(x)*. (4 puntos)

(c) Halle la condición que han de cumplir los parámetros *a* y *b* para que la función *y = f(x)* sea derivable. (3 puntos)

a) Para ser continua en *x = 0* debe cumplirse que los limites laterales coincidan con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+a}{2x-4}=-\dfrac{a}{4} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}10x^2+x+b=b \\ f(0)=-\dfrac{a}{4} \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=-\dfrac{a}{4}}$$

Se debe cumplir: $a=-4b$

b)

$$y=\frac{x^2+a}{2x-4}\Rightarrow y'=\frac{2x(2x-4)-2(x^2+a)}{(2x-4)^2}=\frac{4x^2-8x-2x^2-2a}{(2x-4)^2}=\frac{2x^2-8x-2a}{(2x-4)^2}=$$

$$=\frac{2(x^2-4x-a)}{2^2(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2}$$

$$\boxed{f\,'(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2} & si \quad x<0 \\ 20x+1 & si \quad x>0 \end{cases}}$$

c) Para que sea derivable primero debe ser continua, por lo que $b=-\dfrac{a}{4}$.

Para ser derivable debe serlo en *x = 0* y para ello deben coincidir las derivadas laterales.

$$f\,'(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2} & si \quad x<0 \\ 20x+1 & si \quad x>0 \end{cases}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f\,'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2}=\dfrac{-a}{8} \\ f\,'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}20x+1=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-a}{8}=1\Rightarrow -a=8\Rightarrow\boxed{a=-8}$$

Sustituimos $a = -8$ en $b = -\frac{a}{4}$ y tenemos el valor de b.

$$b = -\frac{-8}{4} = 2$$

Los valores buscados son $a = -8$ y $b = 2$.

5. Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) ABCD, se conocen los vértices consecutivos A(1, 0, –1), B(2, 1, 0) y C(4, 3, –2).
(a) Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (2 puntos)
(b) Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC. (2 puntos)
(c) Encuentre las coordenadas del vértice D. (4 puntos)
(d) Calcule el área del paralelogramo ABCD. (2 puntos)

a)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,1,0)-(1,0,-1)=(1,1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(4,3,-2)-(1,0,-1)=(3,3,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{(1,1,1)(3,3,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3+3-1}{\sqrt{3}\sqrt{19}}=\frac{5}{\sqrt{57}}}$$

b)

$$M=\frac{(1,0,-1)+(4,3,-2)}{2}=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

c) Si $D(x, y, z)$ se debe cumplir que el vector $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{DC}=(4,3,-2)-(x,y,z)=(4-x,3-y,-2-z)\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\end{array}\right\}\Rightarrow (1,1,1)=(4-x,3-y,-2-z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1=4-x\\1=3-y\\1=-2-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-1=3\\y=3-1=2\\z=-2-1=-3\end{cases}\Rightarrow \boxed{D(3,2,-3)}$$

d) El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{AD}=(3,2,-3)-(1,0,-1)=(2,2,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 1 & 1\\2 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2i+2j+2k-2k+2j-2i$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = -4i + 4j = (-4, 4, 0)$$

$$Área = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \boxed{\sqrt{32} \simeq 5.66 u^2}$$

6. Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=1, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-4-\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} .$$

(a) Encuentre una ecuación vectorial para la recta *r*, (2 puntos)
(b) Encuentre la posición relativa de las rectas *r* y *s*. (3 puntos)
(c) Encuentre la ecuación general del plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto $P(2,0,-1)$ (2 puntos)
(d) Encuentre la ecuación general del plano paralelo a la recta *r* que contiene a la recta *s*. (3 puntos)

a)

$$r \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3-x \\ -z=1-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3-x \\ z=-1+2x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=-1+2t \end{cases} ,t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r \equiv (x,y,z)=(0,3,-1)+t(1,-1,2) \quad ,t \in \mathbb{R}}$$

b) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=-1+2t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0,3,-1) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-4-\lambda \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(1,0,-4) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,-1,-1) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales, por lo que las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,-1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{-1}{-1} \neq \frac{2}{-1}$$

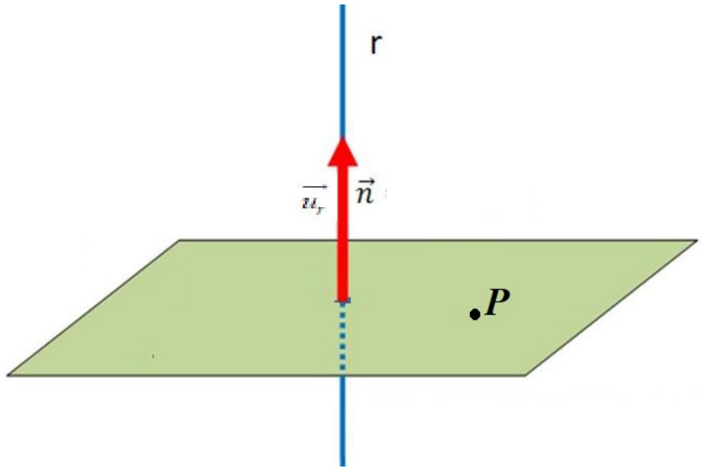
Las rectas se cortan o cruzan. Comprobemos si el producto mixto de $\overrightarrow{u_r}$. $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$ es nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,-1,-1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(1,0,-4)-(0,3,-1)=(1,-3,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}=3+1-6+2-3-3$$

$$\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=-6 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan (tienen distinta dirección, pero en distintos planos).

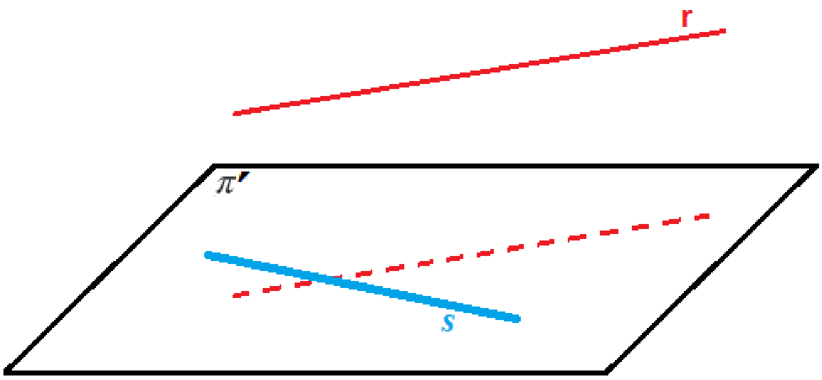
c) El plano π perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{u_r}=(1,-1,2)\\ P(2,0,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi: x-y+2z+D=0\\ P(2,0,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 2-0+2(-1)+D=0\Rightarrow D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: x-y+2z=0}$$

d) El plano π´ paralelo a *r* tiene como vector director el director de *r*, como además contiene a la recta *s* el otro vector director del plano es el director de la recta *s*.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(1,-1,2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(1,-1,-1)\\ Q_s(1,0,-4)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z+4\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+2y-\cancel{z}-\cancel{4}+\cancel{z}+\cancel{4}+y+2x-2=0\Rightarrow\pi': 3x+3y-3=0\Rightarrow\boxed{\pi': x+y-1=0}$$

7. Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A)=0.7$, $P(\overline{B})=0.4$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.58$, donde $\overline{A}\, y\, \overline{B}$ indican los sucesos contrarios (o complementarios) de A y de B, respectivamente. Calcule las siguientes probabilidades.

(a) $P(\overline{A}), P(B)\, y\, P(A\cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes? (4 puntos)

(b) $P(A\cup B)$ (1 punto)

(c) $P(B\cap\overline{A})$ (3 puntos)

(d) $P(A/B)\, y\, P(\overline{A}/B)$ (2 puntos)

a)

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.7=\boxed{0.3}$$

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.4=\boxed{0.6}$$

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.58\Rightarrow P(\overline{A\cap B})=0.58\Rightarrow 1-P(A\cap B)=0.58\Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=1-0.58=0.42}$$

Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.42 \\ P(A)\cdot P(B)=0.7\cdot 0.6=0.42 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.42=P(A)\cdot P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.7+0.6-0.42=\boxed{0.88}$

c) $P(B)=P(A\cap B)+P(B\cap\overline{A})\Rightarrow 0.6=0.42+P(B\cap\overline{A})\Rightarrow \boxed{P(B\cap\overline{A})=0.6-0.42=0.18}$

d)

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.42}{0.6}=\boxed{0.7}$$

$$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{0.18}{0.6}=\boxed{0.3}$$

8. El tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa antivirus sigue una distribución estadística normal de media 8.8 meses con una desviación típica de 3 meses.
(a) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones supera los 10 meses? (3 puntos)
(b) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones se ha mantenido entre 7 y 10 meses? (3 puntos)
(c) ¿Para qué valor del parámetro c se tiene que el intervalo $(8.8-c,\ 8.8+c)$ es el intervalo de tiempo de duración del 98 % de las actualizaciones? (4 puntos)

X = Tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa (en meses)
X = N(8.8, 3)

a)

$$P(X>10)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-8.8}{3}>\frac{10-8.8}{3}\right)==(Z>0.4)=1-P(Z\le 0.4)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la tabla}\\ \text{de N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=1-0.6554=0.3446$$

El 34.46 % de las actualizaciones supera los 10 meses.

b)

$$P(7<X<10)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{7-8.8}{3}<\frac{X-8.8}{3}<\frac{10-8.8}{3}\right)=P(-0.6<Z<0.4)=$$

$$=P(Z\le 0.4)-P(Z<-0.6)=P(Z\le 0.4)-P(Z>0.6)=P(Z\le 0.4)-(1-P(Z\le 0.6))=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la tabla}\\ \text{de N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.6554-(1-0.7257)=\boxed{0.3811}$$

El 38.11 % de las actualizaciones se mantiene entre 7 y 10 meses.

c) Tenemos que $P(8.8-c<X<8.8+c)=0.98$

$$P(8.8-c<X<8.8+c)=P(X<8.8+c)-P(X<8.8-c)=\{Tipificamos\}=$$
$$=P\left(\frac{X-8.8}{3}<\frac{8.8+c-8.8}{3}\right)-P\left(\frac{X-8.8}{3}<\frac{8.8-c-8.8}{3}\right)=$$

$$=P\left(Z<\frac{c}{3}\right)-P\left(Z<-\frac{c}{3}\right)=P\left(Z<\frac{c}{3}\right)-P\left(Z>\frac{c}{3}\right)=P\left(Z<\frac{c}{3}\right)-\left(1-P\left(Z\le\frac{c}{3}\right)\right)=$$

$$=2P\left(Z<\frac{c}{3}\right)-1=0.98\Rightarrow 2P\left(Z<\frac{c}{3}\right)=1.98\Rightarrow P\left(Z<\frac{c}{3}\right)=\frac{1.98}{2}=0.99\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{\text{Buscamos en la tabla}\}\Rightarrow\frac{c}{3}=2.326\Rightarrow c=6.978$$