	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 2**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

Dado el sistema: $\begin{cases} 2x+2my-z=0 \\ x+2y+mz=0 \\ x-my+mz=0 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los distintos valores de m. **(1 punto)**
b) Resuelva el sistema si $m = -2$. **(1 punto)**

E2.- (Álgebra)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a que hace que:

$$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **(2 puntos)**

E3.- (Geometría)

a) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+mz=0$, calcule m para que la recta y el plano sean perpendiculares. **(1 punto)**
b) Calcule el plano perpendicular a los planos $\pi \equiv x+y+z=1$ y $\pi_1 \equiv x-y+z=2$, que pasa por el punto (1,2,3). **(1 punto)**

E4.- (Geometría)

Considere el punto $P = (2,2,1)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y-3z+6=0$.
a) Halle la recta que pasa por P y es perpendicular a π. **(1 punto)**
b) Calcule la distancia del punto $Q=(2,2,-2)$ al plano π. **(1 punto)**

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=xe^x$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Calcule:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^1 xe^x dx$ **(1 punto)**

E7.- (Análisis)

Dadas las curvas de ecuaciones $y=\sqrt{3x},\ y=\frac{1}{3}x^2$.

a) Dibuje las curvas y señale el recinto plano comprendido entre ambas. **(1 punto)**

b) Calcule el área de dicho recinto. **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

a) Halle el área del recinto del plano limitado por la gráfica de $f(x)=x^3-4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$. **(1 punto)**

b) Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{xsenx}{2-2\cos x}$ **(1 punto)**

E9- (Probabilidad y estadística)

Una corporación fabrica herramientas de 3 tipos de calidades. Un 10% de calidad Alta; un 70% de calidad Estándar y un 20% de calidad Baja. Se sabe que son defectuosas el 1%; el 10% y el 30% del total de las herramientas respectivamente.

a) Se elige una herramienta al azar. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa. **(1 punto)**

b) Se elige una herramienta que resulta ser defectuosa. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que la elegida sea de calidad estándar. **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

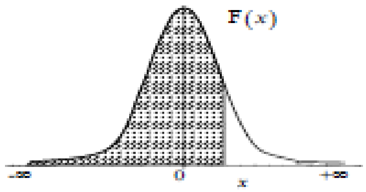
El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a) ¿Qué porcentaje de impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? **(1 punto)**

b) Si compramos 500 impresoras ¿Cuántas de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)

Dado el sistema: $\begin{cases} 2x+2my-z=0 \\ x+2y+mz=0 \\ x-my+mz=0 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los distintos valores de *m*. **(1 punto)**

b) Resuelva el sistema si $m=-2$. **(1 punto)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & 2m & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & -m & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 2m & -1 & 0 \\ 1 & 2 & m & 0 \\ 1 & -m & m & 0 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2m & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & -m & m \end{vmatrix}=4m+2m^2+m+2-2m^2+2m^2=2m^2+5m+2$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2m^2+5m+2=0 \Rightarrow m=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(2)2}}{2(2)}=\frac{-5\pm 3}{4}=\begin{cases} \frac{-5+3}{4}=-\frac{1}{2}=m \\ \frac{-5-3}{4}=-2=m \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $m\neq-\frac{1}{2}$ y $m\neq-2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m=-\frac{1}{2}$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,1^a-2\cdot Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -5 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,1^a-2\cdot Fila\,3^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5\cdot Fila\,3^{a} - 2\cdot Fila\,2^{a} \\ 0 \quad -10 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A y la matriz A/B tienen rango 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = -2$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,1^{a} - 2\cdot Fila\,2^{a} \\ 2 \quad -4 \quad -1 \quad 0 \\ -2 \quad -4 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -8 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{a} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Fila\,1^{a} - 2\cdot Fila\,3^{a} \\ 2 \quad -4 \quad -1 \quad 0 \\ -2 \quad -4 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -8 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Fila\,3^{a} - Fila\,2^{a} \\ 0 \quad -8 \quad 3 \quad 0 \\ 0 \quad 8 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A y la matriz A/B tienen rango 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 3).
Resolvemos el sistema utilizando el sistema equivalente obtenido en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 4y - z = 0 \\ -8y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 4y - z = 0 \\ \boxed{y = \frac{3}{8}z} \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 4\frac{3}{8}z - z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{12}{8}z - z = 0 \Rightarrow 2x - \frac{3}{2}z - z = 0 \Rightarrow 2x - \frac{5}{2}z = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{4}z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Solución: \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5}{4}t \\ y = \frac{3}{8}t, \; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{array} \right.}$$

E2.- (Álgebra)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a que hace que:

$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(2 puntos)**

Lo primero es que debe existir A^{-1} y para ello su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a$$

La primera condición es que $a \neq 0$.

Hallamos la matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}}{a} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el valor de A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos estos valores en la igualdad $A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a^2+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a^2+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{a} \\ a^2 + a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 1 \rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{1} = 1} \\ a^2 + a = 2 \end{cases} \Rightarrow 1^2 + 1 = 2 \text{ ¡Se cumple!}$$

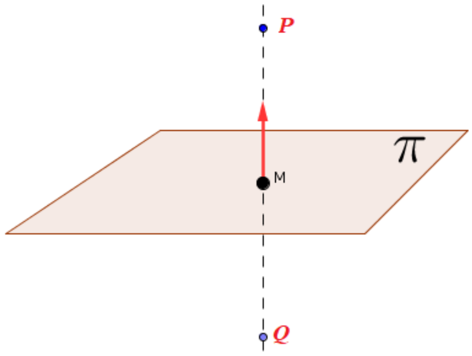
Para que se cumpla la igualdad debe ser *a = 1*.

E3.- (Geometría)

a) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = 0$, calcule m para que la recta y el plano sean perpendiculares. **(1 punto)**

b) Calcule el plano perpendicular a los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_1 \equiv x - y + z = 2$, que pasa por el punto (1,2,3). **(1 punto)**

a) Para que recta y plano sean perpendiculares el vector director de la recta y el normal del plano deben tener coordenadas proporcionales (indicar la misma dirección).

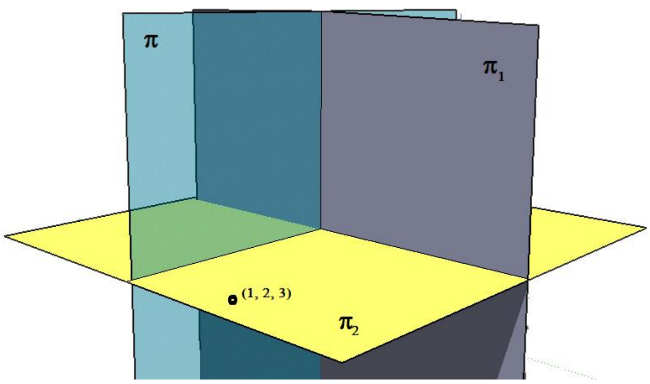


$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2,1,4) \\ \pi \equiv 2x + y + mz = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2,1,m) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{4}{m} \Rightarrow 1 = \frac{4}{m} \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

b) Los planos son secantes pues los vectores normales no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 1 \rightarrow \vec{n} = (1,1,1) \\ \pi_1 \equiv x - y + z = 2 \rightarrow \overrightarrow{n_1} = (1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

Los planos son secantes y se cortan en una recta.



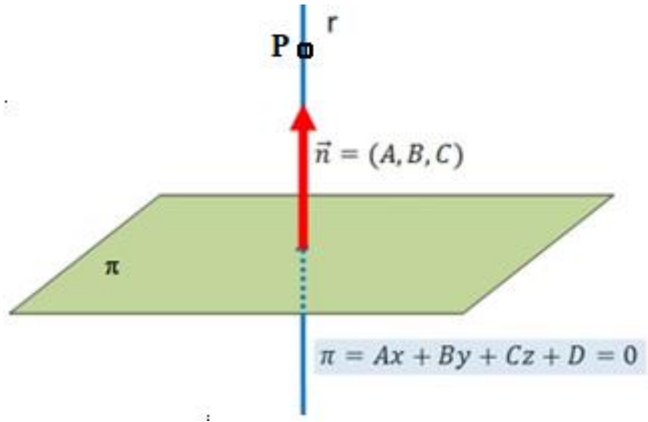
El plano π_2 perpendicular a π y π_1 debe tener como vectores directores los normales de cada plano.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (1,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{n_1} = (1,-1,1) \\ (1,2,3) \in \pi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 \cancel{+y} - 2 - z + 3 - z + 3 \cancel{-y} + 2 + x - 1 = 0 \Rightarrow 2x - 2z + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 : x - z + 2 = 0}$$

E4.- (Geometría)
Considere el punto $P = (2,2,1)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y-3z+6=0$.
a) Halle la recta que pasa por P y es perpendicular a π. **(1 punto)**
b) Calcule la distancia del punto $Q=(2,2,-2)$ al plano π. **(1 punto)**

a) La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.



$$\pi \equiv 2x+3y-3z+6=0 \Rightarrow \vec{n}=(2,3,-3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=\vec{n}=(2,3,-3) \\ P(2,2,1)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases}}$$

b) Utilizamos la fórmula.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+3y-3z+6=0 \\ Q(2,2,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow d(Q,\pi)=\frac{|2\cdot 2+3\cdot 2-3\cdot(-2)+6|}{\sqrt{2^2+3^2+(-3)^2}}=\frac{22}{\sqrt{22}}=\sqrt{22}\simeq 4.69u$$

E5.- (Análisis)
Dada la función $f(x)=xe^x$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

El dominio es todo $\mathbb{R}$, ya que no plantea ningún problema.

Asíntota vertical. $x=a$.
No tiene pues no hay ningún valor excluido del dominio.

Asíntota horizontal. $y=b$

$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} xe^x=+\infty e^{+\infty}=+\infty$ No hay asíntota horizontal en +∞.

O bien

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^x=-\infty e^{-\infty}=-\infty\cdot 0=Indeterminación=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\frac{-\infty}{e^{+\infty}}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{1}{-e^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

Hay una asíntota horizontal en –∞ con ecuación $y=0$

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to+\infty} e^x=e^{+\infty}=+\infty$ No hay asíntota oblicua.

Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x)=xe^x \Rightarrow f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow (1+x)e^x=0\Rightarrow\begin{cases}1+x=0\to x=-1\\ o\\ e^x=0 \text{ ¡Imposible!}\end{cases}$$

Vemos el signo de la derivada antes y después de –1.

En $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=(1-2)e^{-2}=-e^{-2}<0$. La función decrece en el intervalo $(-\infty,-1)$.

En $(-1,+\infty)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=(1+0)e^0=e>0$. La función crece en el intervalo $(-1,+\infty)$.

La función decrece en $(-\infty,-1)$ y crece en $(-1,+\infty)$.
Tiene un mínimo relativo en $x=-1$.

Para el estudio de la concavidad utilizamos la segunda derivada.

$$f'(x) = e^x + xe^x \Rightarrow f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x = (2+x)e^x$$

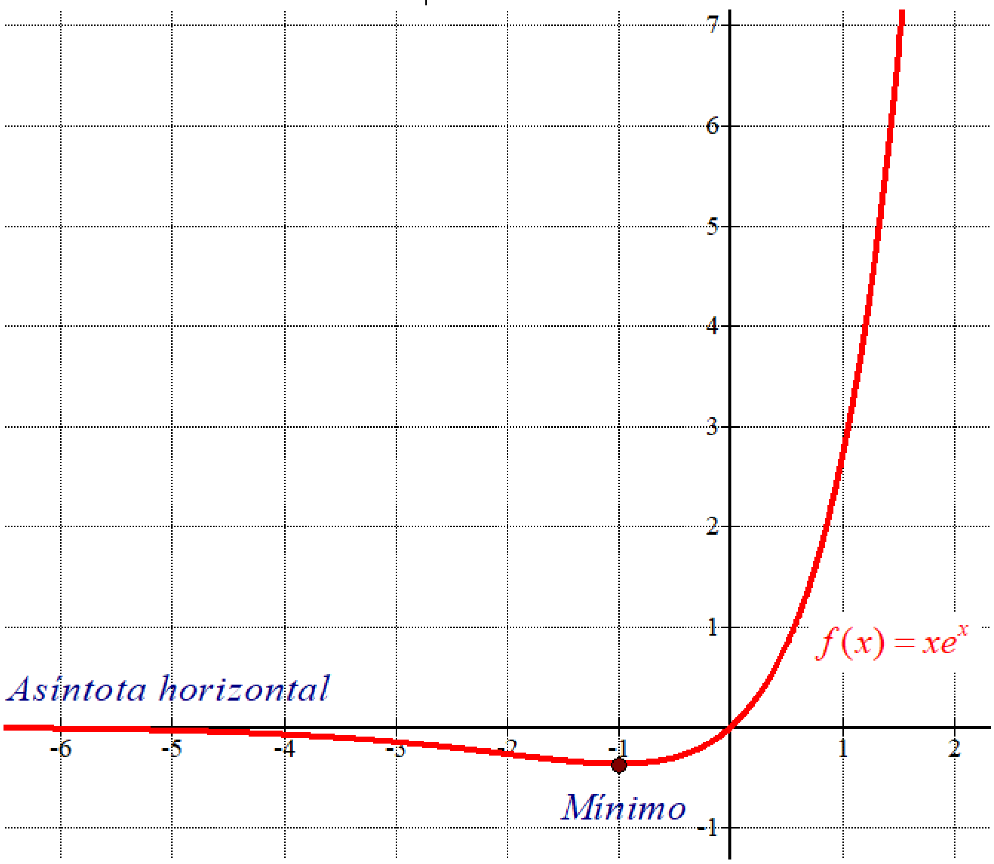
$$f''(x) = 0 \Rightarrow (2+x)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2+x=0 \to x=-2 \\ o \\ e^x = 0 \text{ ¡Imposible!} \end{cases}$$

Vemos el signo de la derivada segunda antes y después de –2.

En $(-\infty,-2)$ tomamos *x* = *–3* y la derivada vale $f''(-3) = (2-3)e^{-3} = -e^{-3} < 0$. La función es cóncava (∩) en el intervalo $(-\infty,-2)$.
En $(-2,+\infty)$ tomamos *x* = *0* y la derivada vale $f''(0) = (2+0)e^0 = 2 > 0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $(2,+\infty)$.
La función presenta un punto de inflexión en *x* = *–2*.

Haciendo una tabla de valores y conociendo todo lo obtenido hasta ahora tenemos que la gráfica es:

x	$y = xe^x$
-2	$-2e^{-2} \simeq -0.27$
-1	$-e^{-1} \simeq -0.37$
0	0
1	$e \simeq 2.71$
2	$2e^2 \simeq 14.8$



E6.- (Análisis)
Calcule:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^1 xe^x dx$ **(1 punto)**

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{e^0-0-1}{0^2}=\frac{0}{0}=Indeterminación\left(L´Hôpital\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{e^0-1}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación\left(L´Hôpital\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int xe^x dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\to du=dx\\ dv=e^x dx\to v=\int dv=\int e^x dx=e^x\end{array}\right\}=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+K$$

Aplicamos este resultado al calculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x-e^x\right]_0^1=\left[1\cdot e^1-e^1\right]-\left[0\cdot e^0-e^0\right]=0+1=\boxed{1}$$

E7.- (Análisis)

Dadas las curvas de ecuaciones $y=\sqrt{3x},\ y=\frac{1}{3}x^2$.

a) Dibuje las curvas y señale el recinto plano comprendido entre ambas. **(1 punto)**

b) Calcule el área de dicho recinto. **(1 punto)**

a) Averiguamos los puntos de corte de las gráficas de las curvas.

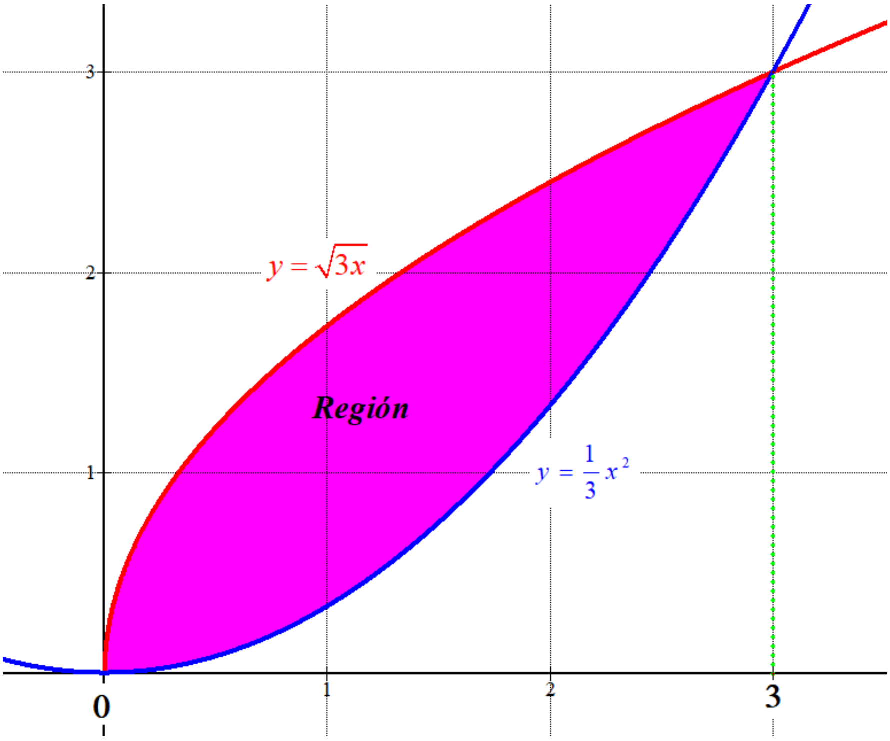
$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{3x} \\ y=\frac{1}{3}x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{3x}=\frac{1}{3}x^2 \Rightarrow 3\sqrt{3x}=x^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{3x}\right)^2=\left(x^2\right)^2 \Rightarrow 9\cdot 3x=x^4 \Rightarrow x^4-27x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^3-27\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^3-27=0 \Rightarrow x^3=27 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{27}=3} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos sus gráficas.

x	$y=\sqrt{3x}$
0	0
1	$\sqrt{3}\simeq 1.73$
2	$\sqrt{6}\simeq 2.45$
3	3

x	$y=\frac{1}{3}x^2$
0	0
1	$1/3$
2	$4/3\simeq 1.33$
3	3



b) Contando los cuadraditos rosas el área valdrá entre 3 y 4 unidades cuadradas. Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$Área=\int_0^3 \sqrt{3x}-\frac{1}{3}x^2dx=\int_0^3 \sqrt{3}\cdot x^{1/2}-\frac{1}{3}x^2dx=\left[\sqrt{3}\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\left[\sqrt{3}\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^3}{9}\right]_0^3=$$

$$=\left[\sqrt{3}\frac{3^{3/2}}{3/2}-\frac{3^3}{9}\right]-\left[\sqrt{3}\frac{0^{3/2}}{3/2}-\frac{0^3}{9}\right]=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{3^3}-3=\frac{2\sqrt{3^4}}{3}-3=\frac{2\cdot 9}{3}-3=6-3=\boxed{3u^2}$$

E8.- (Análisis)

a) Halle el área del recinto del plano limitado por la gráfica de $f(x)=x^3-4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$. **(1 punto)**

b) Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{xsenx}{2-2\cos x}$ **(1 punto)**

a) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-4x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \end{cases}$$

Observamos que uno de los puntos de corte $x=-2$ no pertenece al intervalo $[0,2]$ y que los otros dos valores están en los extremos del intervalo por lo que el área del recinto pedido se obtiene como el valor absoluto de la integral definida entre $x=0$ y $x=2$ de la función $f(x)=x^3-4x$.

$$Área=\left|\int_0^2 x^3-4xdx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_0^2\right|=\left|\left[\frac{2^4}{4}-2\cdot 2^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right]\right|=|4-8|=\boxed{4u^2}$$

b)

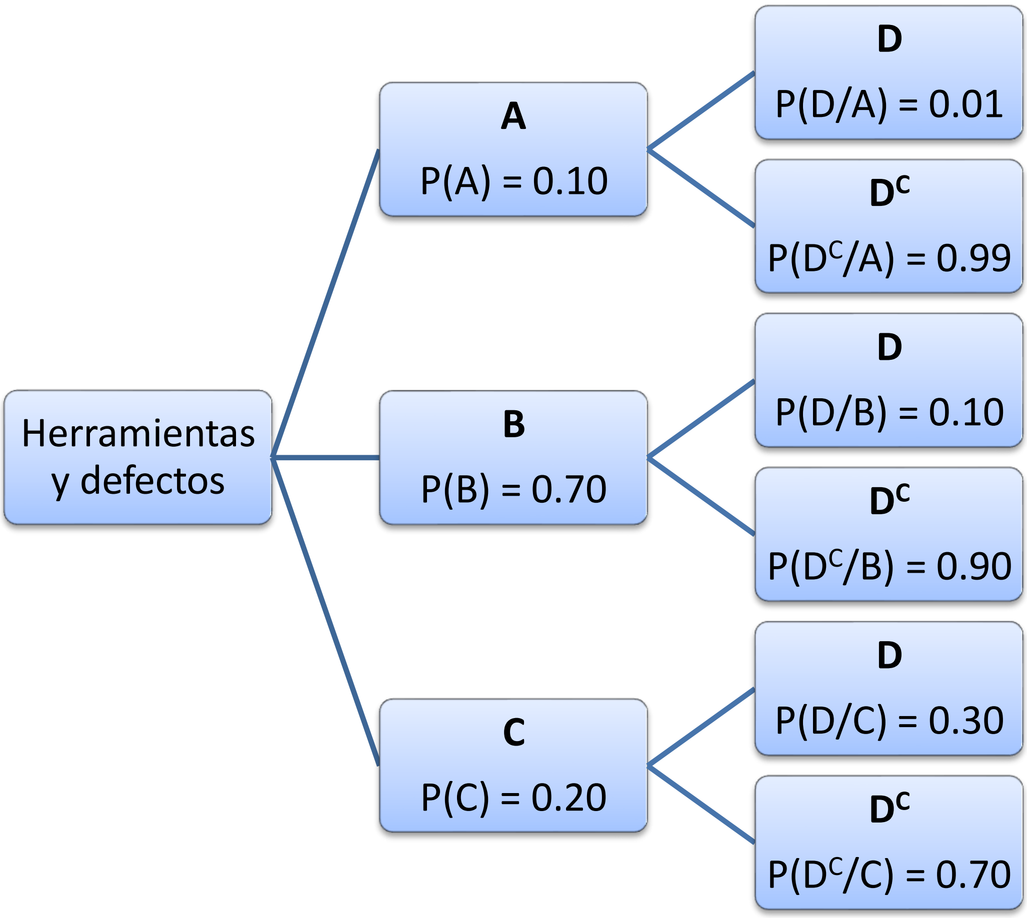
$$\lim_{x\to 0}\frac{xsenx}{2-2\cos x}=\frac{0\cdot sen0}{2-2\cos 0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{senx+x\cos x}{-2(-senx)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{senx+x\cos x}{2senx}=\frac{sen0+0\cos 0}{2sen0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x+x(-senx)}{2\cos x}=\frac{\cos 0+\cos 0+0(-sen0)}{2\cos 0}=\frac{1+1+0}{2}=\boxed{1}$$

E9- (Probabilidad y estadística)
Una corporación fabrica herramientas de 3 tipos de calidades. Un 10% de calidad Alta; un 70% de calidad Estándar y un 20% de calidad Baja. Se sabe que son defectuosas el 1%; el 10% y el 30% del total de las herramientas respectivamente.
a) Se elige una herramienta al azar. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa. **(1 punto)**
b) Se elige una herramienta que resulta ser defectuosa. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que la elegida sea de calidad estándar. **(1 punto)**

Llamamos A = "Herramienta de calidad Alta", B = "Herramienta de calidad Estándar", C = "Herramienta de calidad baja", D = "Herramienta defectuosa".
Realizamos un diagrama de árbol y en él colocamos las probabilidades de cada suceso.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0.10 \cdot 0.01 + 0.70 \cdot 0.10 + 0.20 \cdot 0.30 = \boxed{0.131}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

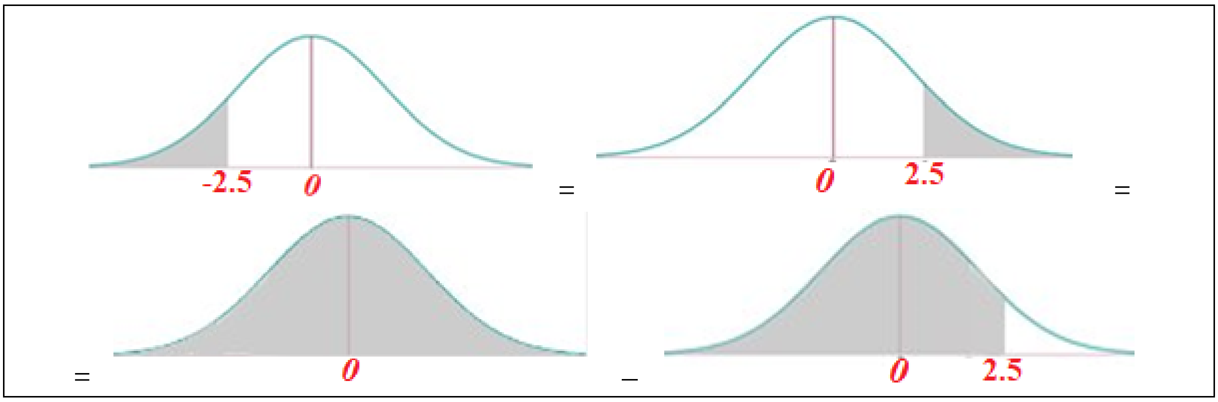
$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.70 \cdot 0.10}{0.131} = \boxed{\frac{70}{131} \simeq 0.534}$$

E10.- (Probabilidad y estadística)
El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.
a) ¿Qué porcentaje de impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? **(1 punto)**
b) Si compramos 500 impresoras ¿Cuántas de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? **(1 punto)**

X = El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras (en horas).
X = N(1500, 200).

a)

$$P(X<1000)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-1500}{200}<\frac{1000-1500}{200}\right)=$$
$$=P(Z<-2.5)=P(Z>2.5)=1-P(Z\leq 2.5)=...$$



$$=\{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\}=1-0.9938=0.0062=\boxed{0.62\ \%}$$

b) Calculamos la probabilidad de que se averíe una impresora entre las 1000 y 2000 horas.

$$P(1000<X<2000)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{1000-1500}{200}<\frac{X-1500}{200}<\frac{2000-1500}{200}\right)=$$
$$=P(-2.5<Z<2.5)=P(Z<2.5)-P(Z<-2.5)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la tabla}\\ \text{y utilizamos el resultado}\\ \text{del apartado a)}\end{matrix}\right\}=$$
$$=0.9938-0.062=\boxed{0.9316}$$

De 500 impresoras se averiarán entre las 1000 y 2000 horas 0.9318 · 500 = **466 impresoras**.