Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2021/2022

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. a) **[1,5 puntos]** Encuentra todas las matrices que conmutan con la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

2. a) **[1,5 puntos]** Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

b) **[1 puntos]** Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

3. a) Sea la curva $f(x)=a-x^2$.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué valores puede tomar $a\in\mathbb{R}$ para que la curva $f(x)=a-x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

a.2) **[1,25 punto]** Encuentra razonadamente $a\in\mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

b) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx$$

4. Sean las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x=2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=a \end{cases},\quad s\equiv\begin{cases} x=-1 \\ y=\mu \\ z=-5\mu \end{cases}$$

donde λ y **μ** son los parámetros y $a\in\mathbb{R}$

a) **[1,5 puntos]** Estudia su posición relativa en función de los valores que toma *a*.

b) **[1 punto]** Encuentra razonadamente un plano que contenga a *s* y que sea paralelo a *r*.

5. a) **[1 punto]** Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1\equiv x=y+1$ y $\pi_2\equiv y+2z=5$.

b) **[1,5 puntos]** Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x)=3/x^2$ en el intervalo $[1,3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

6. a) **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$, siendo

$$M=\begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

b) **[1 punto]** Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x+my=1$, $\pi_2 \equiv 2x+y=m$ y $\pi_3 \equiv 4x+y+mz=2$. Estudia su posición relativa según los valores de *m*. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

7. a) **[1,25 puntos]** Sean los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\vec{v}=(1,0,1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A=(0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juego Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C. F. gane un partido cualquiera?

b.2) **[0,75 puntos]** Si el EVAU C. F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

8. a) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

a.2) **[0,75 puntos]** Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

b) El peso de los paquetes de 1 kg de arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

SOLUCIONES

1. a) **[1,5 puntos]** Encuentra todas las matrices que conmutan con la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

a) Sea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si conmuta con A debe cumplirse:

$$AX=XA \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a=2a+b \\ 2b=-b \\ a-c=2c+d \\ b-d=-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=b \\ 3b=0 \\ a=3c+d \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a=3c+d \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}}$$

b)

Como $X=\begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ es simétrica debe ser $c=0$.

La matriz queda $X=\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

El determinante debe ser 4, luego $|X|=4 \Rightarrow \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}=4 \Rightarrow d^2=4 \Rightarrow d=\sqrt{4}=\pm 2$.

Existen dos matrices que cumplen lo pedido: $X=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. a) **[1,5 puntos]** Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

b) **[1 puntos]** Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

a) Llamamos "*x*" al precio de un lápiz, "*y*" al precio de un cuaderno y "*z*" al precio de una agenda.

"*Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros*" → $3x+y+z=5$
"*Dos cuadernos y una agenda han costado 5 euros*" → $2y+z=5$

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{matrix}3x+y+z=5\\2y+z=5\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3x+y+z=5\\z=5-2y\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3x+y+5-2y=5\Rightarrow 3x-y=0\Rightarrow y=3x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=5-2(3x)=5-6x\Rightarrow \textit{Solución}:\begin{cases}y=3x\\z=5-6x\end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones en función del precio de un lápiz (*x*).

Si ponemos el sistema en céntimos quedaría $\left.\begin{matrix}3x+y+z=500\\2y+z=500\end{matrix}\right\}$ la solución es $\begin{cases}y=3x\\z=500-6x\end{cases}$
Si todos son múltiplos de 50 tenemos que $x = 50a$, $y = 50b$, $z = 50c$.
Las soluciones quedarían:

$$\begin{cases}x=50a\\y=50b=3(50a)\Rightarrow b=3a\\z=50c=500-6(50a)\to 50c=500-300a\Rightarrow c=10-6a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=50a\\y=50b;b=3a\\z=50c;c=10-6a\end{cases}$$

Como *a*, *b* y *c* son números naturales pues son el número de monedas de 50 céntimos del precio de cada artículo. Veamos que ocurre dando valores crecientes, empezando por 1 (no puede ser 0 pues nada es gratis).

$$a=1\Rightarrow\begin{cases}x=50\\b=3\to y=150\\c=10-6=4\to z=200\end{cases}$$

Un lápiz cuesta 50 cts, un cuaderno 150 cts y una agenda 200 cts

$$a=2\Rightarrow\begin{cases}x=100\\b=6\to y=300\\c=10-12=-2\to \text{¡Imposible! El número de monedas no puede ser negativo}\end{cases}$$

La única solución es: Un lápiz cuesta 50 cts, un cuaderno 150 cts y una agenda 200 cts b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=1^{+\infty}=Indeterminación=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^2}}=e^{1+0}=\boxed{e}$$

3. a) Sea la curva $f(x)=a-x^2$.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué valores puede tomar $a\in\mathbb{R}$ para que la curva $f(x)=a-x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

a.2) **[1,25 punto]** Encuentra razonadamente $a\in\mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

b) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx$$

a)

a.1) Hallamos los puntos de corte de la curva con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a-x^2 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow a-x^2=0\Rightarrow x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$$

Para que la solución sea doble el valor de *a* debe ser positivo (*a* > *0*)

a.2) El área del recinto es la integral definida de $f(x)=a-x^2$ entre $x=-\sqrt{a}$ y $x=+\sqrt{a}$.

$$\acute{A}rea=\int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}}a-x^2dx=\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}}=\left[a\sqrt{a}-\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3}{3}\right]-\left[a\left(-\sqrt{a}\right)-\frac{\left(-\sqrt{a}\right)^3}{3}\right]=$$

$$=\sqrt{a^3}-\frac{1}{3}\sqrt{a^3}+\sqrt{a^3}-\frac{1}{3}\sqrt{a^3}=\boxed{\frac{4}{3}\sqrt{a^3}\,u^2}$$

Como debe valer 36 tenemos que

$$\frac{4}{3}\sqrt{a^3}=36\Rightarrow\sqrt{a^3}=\frac{108}{4}=27\Rightarrow a^3=27^2\Rightarrow a=\sqrt[3]{729}=9$$

El valor buscado es *a = 9*.

b)

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx=2\int\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{1+3x^2}=t\to\dfrac{6x}{2\sqrt{1+3x^2}}dx=dt\\ \dfrac{3x}{\sqrt{1+3x^2}}dx=dt\to\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}dx=\dfrac{1}{3}dt\end{array}\right\}=$$

$$=2\int\frac{1}{3}dt=\frac{2}{3}\int dt=\frac{2}{3}t=\boxed{\frac{2}{3}\sqrt{1+3x^2}+K}$$

4. Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases}$$

donde λ y **μ** son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$

a) **[1,5 puntos]** Estudia su posición relativa en función de los valores que toma *a*.

b) **[1 punto]** Encuentra razonadamente un plano que contenga a *s* y que sea paralelo a *r*.

Obtenemos un punto y un vector de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0,0,a) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,-1,0) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(-1,0,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (0,1,-5) \end{cases}$$

a) Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que ambas rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-1,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (0,1,-5) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{0} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-5}$$

Las dos rectas se cruzan o cortan. La posición relativa depende del valor nulo o no del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (-1,0,0) - (0,0,a) = (-1,0,-a)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-1,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (0,1,-5) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (-1,0,-a) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -2a - 5 + 0 - 0 - 0 - 0 = -2a - 5$$

$$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = 0 \Rightarrow -2a - 5 = 0 \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-5}{2}}$$

Si $a = \frac{-5}{2}$ entonces $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = 0$ y las rectas se cortan.

Si $a \neq \frac{-5}{2}$ entonces $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] \neq 0$ y las rectas se cruzan.

b) El plano que contenga a *s* y que sea paralelo a *r* tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas. Y como contiene a la recta *s* contiene el punto Q_s.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{u_r} = (2,-1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{v_s} = (0,1,-5) \\ Q_s(-1,0,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 5 + 0 + 2z - 0 + 10y + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\pi : 5x + 10y + 2z + 5 = 0}$$

5. a) **[1 punto]** Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y+1$ y $\pi_2 \equiv y+2z=5$.

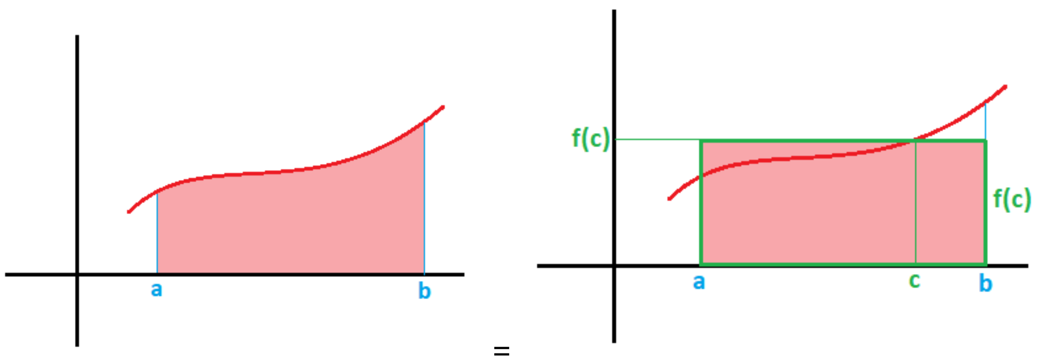
b) **[1,5 puntos]** Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x)=3/x^2$ en el intervalo $[1,3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

a)

$$r:\begin{cases}\pi_1 \equiv x=y+1\\ \pi_2 \equiv y+2z=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=y+1\\ y=5-2z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1+5-2z\\ y=5-2z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=6-2z\\ y=5-2z\\ z=z\end{cases} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases}x=6-2\lambda\\ y=5-2\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}}$$

b) Si una función es continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces existe al menos un punto c, dentro de ese intervalo que cumple lo siguiente:

$$\int_a^b f(x).dx=(b-a).f(c)$$



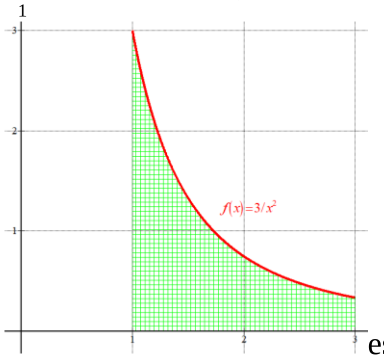
La función $f(x)=3/x^2$ en el intervalo $[1,3]$ es continua y podemos aplicarle el teorema.

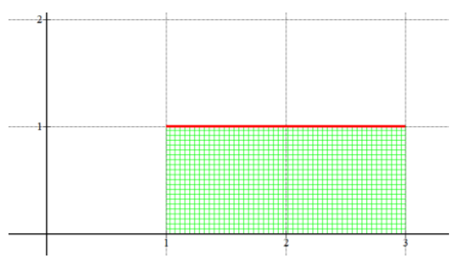
$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 3/x^2dx = \int_1^3 3\cdot x^{-2}dx = \left[3\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^3 = -\frac{3}{3}-\left(-\frac{3}{1}\right) = -1+3=2$$

Busquemos el punto $c\in[1,3]$ tal que

$$(3-1)f(c)=2 \Rightarrow 2f(c)=2 \Rightarrow f(c)=1 \Rightarrow \frac{3}{c^2}=1 \Rightarrow c^2=3 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{3}\in[1,3]}$$

Se cumple $\int_1^3 3/x^2dx = f\left(\sqrt{3}\right)(3-1)$

El área de 

es igual que el área de 

6. a) **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

b) **[1 punto]** Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de *m*. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

a) La matriz M tiene dimensiones 3×4. El rango de la matriz es 3 o menor.

Aplicamos Gauss para obtener una matriz equivalente a la inicial (con el mismo rango) pero triangular.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^{\text{a}} - \text{Fila 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & m \\ -2 & -m & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1-m & 0 & m-1 \end{array} \to \text{Nueva Fila 2}^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^{\text{a}} - 2\cdot\text{Fila 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 4 & 1 & m & 2 \\ -4 & -2m & 0 & -2 \\ \hline 0 & 1-2m & m & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila 3}^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 0 & 1-m & 0 & m-1 \\ 0 & 1-2m & m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \text{Columna3}^{\text{a}} \leftrightarrow \text{Columna 2}^{\text{a}} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 0 & m & 1-2m \end{pmatrix}$$

En la diagonal principal están *m* y *m –1*. Que se anulan cuando *m = 0* o *m = 1*.

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ la matriz M tiene rango 3 pues todos los elementos de la diagonal principal de la matriz equivalente a M son no nulos.

Si *m = 0* la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que también tiene rango 3 pues hay tres filas no nulas.

Si *m = 1* la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y tiene rango 2 pues hay dos filas no nulas.

Conclusión La matriz *M* tiene rango 2 si $m = 1$ y rango 3 si $m \neq 1$

b) Con las ecuaciones de los tres planos se forma el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv 2x+my=1 \\ \pi_2 \equiv 2x+y=m \\ \pi_3 \equiv 4x+y+mz=2\end{array}\right\}.$$

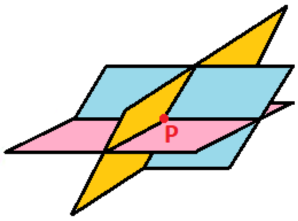
La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix}2 & m & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & m\end{pmatrix}$ Y la ampliada es $A/B=M=\begin{pmatrix}2 & m & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & m\\ 4 & 1 & m & 2\end{pmatrix}$

Veamos cuando se anula el determinante de A.

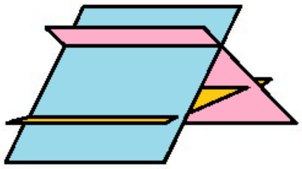
$$|A|=\begin{vmatrix}2 & m & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & m\end{vmatrix}=2m-2m^2=2m(1-m)$$

$$|A|=0\Rightarrow 2m(1-m)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ o\\ m=1\end{cases}$$

Si $m\neq 0$ y $m\neq 1$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución. Esta solución es el punto de intersección de los tres planos. Los planos son coincidentes en un punto.

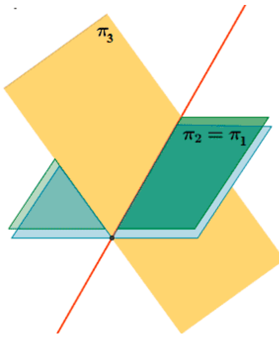


Si $m = 0$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Como hemos visto en el apartado a) que el rango de A/B = M es 3 el sistema no tiene solución. Los planos no coinciden.



Si $m = 1$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y su rango es 2 (fila 1ª y 2ª iguales, pero diferentes a la 3ª).

Como hemos visto en el apartado a) que el rango de A/B = M es 2. El rango de A y de A/B son iguales a 2, pero menores que el número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones. Los planos se cortan en una recta. Los planos 1º y 2º son coincidentes y se cortan con el tercero en una recta.



7. a) **[1,25 puntos]** Sean los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\vec{v}=(1,0,1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A=(0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
b) El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juego Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.
b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C. F. gane un partido cualquiera?
b.2) **[0,75 puntos]** Si el EVAU C. F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

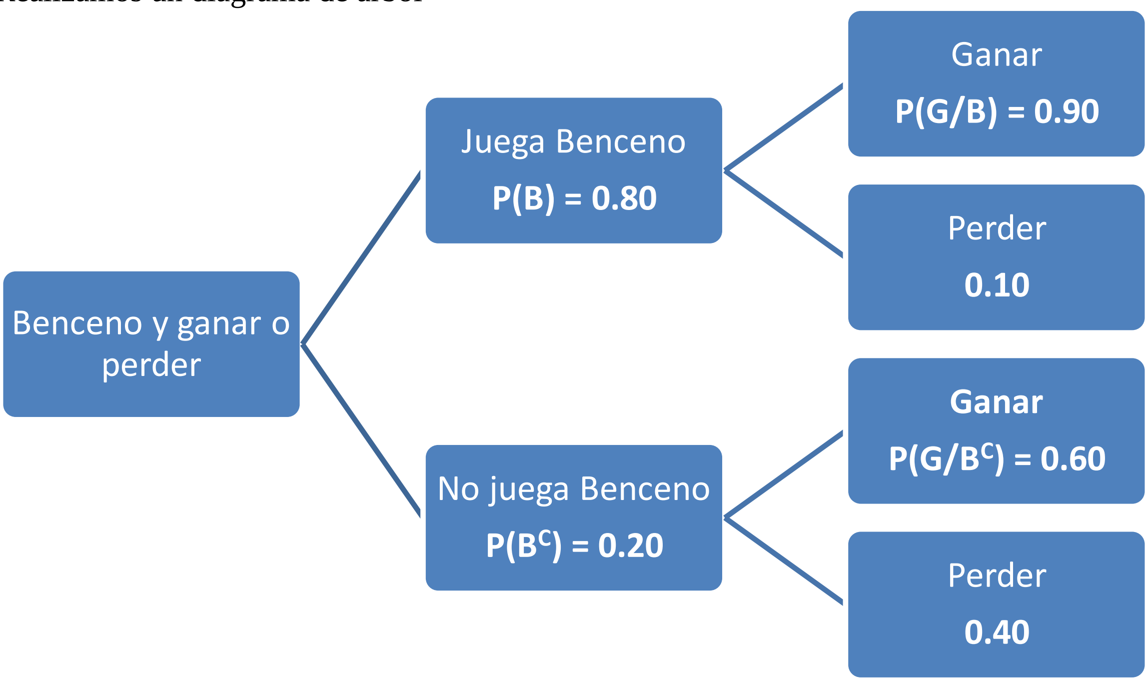
a)

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=i+j-k-j=i-k=(1,0,-1)$$

$$\pi:\begin{cases}\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,0,-1)\\ A(0,0,1)\in\pi\end{cases}\Rightarrow \pi:\begin{cases}\pi: x-z+D=0\\ A(0,0,1)\in\pi\end{cases}\Rightarrow 0-1+D=0\Rightarrow D=1$$

$$\boxed{\pi: x-z+1=0}$$

b) Realizamos un diagrama de árbol



b.1) $P(G)=P(B)\cdot P(G/B)+P(\overline{B})\cdot P(G/\overline{B})=0.80\cdot 0.90+0.20\cdot 0.60=\boxed{0.84}$

b.2) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B/G)=\frac{P(B\cap G)}{P(G)}=\frac{P(B)\cdot P(G/B)}{P(G)}=\frac{0.80\cdot 0.90}{0.84}=\boxed{\frac{6}{7}\simeq 0.857}$$

8. a) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

a.2) **[0,75 puntos]** Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

b) El peso de los paquetes de 1 kg de arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

a) X = Número de niños con intolerancia alimentaria de 4.

n = 4 . p = 1/5 = 0.2. q = 0.8

X = B(4, 0.2)

a.1) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^5 = 1 - 0.8^5 = \boxed{0.5904}$

a.2) Hemos calculado la probabilidad de que al menos un niño de una mesa de 4 tenga intolerancia alimentaria que se traduce en la probabilidad de que le pongan pan sin gluten a esa mesa.

Y = Número de mesas donde se sirve pan sin gluten de un total de 8.

n = 8. p = 0.5904, q = 1 – 0.5904 = 0.4096

Y = B(8, 0.5904)

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{8}{0} 0.5904^0 \cdot 0.4096^8 = 1 - 0.4096^8 = \boxed{0.9992}$$

b) X = Peso de un paquete de arroz de 1 kg

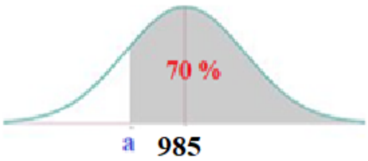
X = N(985, 25)

b.1) Calculamos la probabilidad de que un paquete pese más de 1000 gramos.

$$P(X > 1000) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 985}{25} \end{array} \right\} = P\left(\frac{X - 985}{25} > \frac{1000 - 985}{25} \right) = P(Z > 0.6) =$$

$$= 1 - P(Z < 0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$$

Pesarán más de 1 kg el 27.43 % de los paquetes.

b.2) Nos piden averiguar “a” tal que 

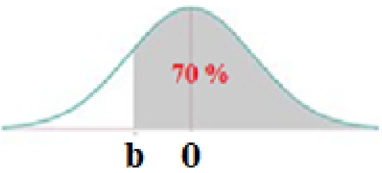
.

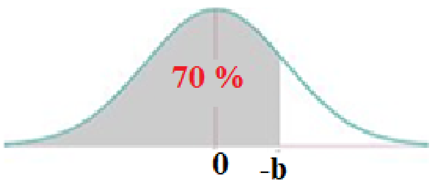
$$P(X > a) = 0.7 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{a-985}{25}\right) = 0.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a-985}{25}\right) = 0.7 \Rightarrow \{Buscamos\,en\,la\,tabla\} \Rightarrow -\frac{a-985}{25} = 0.525 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a = -985 + 25 \cdot 0.525 = -971.875 \Rightarrow \boxed{a = 971.875}$$

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.555
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.594
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.633
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.670
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.705
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.738



=


Por encima de 0.971 kg están el 70 % de los paquetes.