Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2021-2022

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. **El estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo **se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas.** Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas y las soluciones.

PREGUNTAS

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

a) Calcular, cuando sea posible, las matrices $C\cdot B^t$, $B^t\cdot C$, $B\cdot C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B. (0,5 puntos)

b) Hallar $a\in\mathbb{R}$ para que el sistema $x\cdot A+y\cdot B=C$ de tres ecuaciones y dos incógnitas *x* e *y*, sea compatible determinado y resolverlo para ese valor de *a*. (1,5 puntos)

2. Dadas las matrices

$$M=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix}\quad \text{y} \quad N=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&-2\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $M\cdot X-N=2X$ (2 puntos)

3. Dados el plano π de ecuación $x+2y-z=0$ y *r* la recta de ecuaciones $r:\begin{cases}y-2x=1\\x-z=0\end{cases}$,

a) Hallar el punto de intersección del plano π y la recta *r*. (1 punto)

b) Calcular la distancia del origen a la recta *r*. (1 punto)

4. Dada la recta *r* definida por

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1},$$

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a *r*. (1 punto)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a *r*. (1 punto)

5. Calcular el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que la función (2 puntos)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot e^x-senx}{x^2} & si \quad x\neq 0\\ a & si \quad x=0\end{cases}$$

Sea continua en $x = 0$.

6. Dada la función $f(x)=|x+1|+|x-2|$.

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función. (1 punto)

b) Calcular el intervalo donde la función permanece constante. (1 punto)

7. Determinar la función *f(x)* tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas y su derivada sea $f'(x)=(2x+1)e^{-x}$ (2 puntos)

8. Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)=sen(2x)$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=\pi$. (2 puntos)

9. En un centro educativo han preguntado a sus alumnos acerca de alergias alimentarias, resultando que un 10% es celiaco y un 15% es alérgico a la lactosa. Además, el 20% tiene alguna de las dos alergias. Si se elige un alumno al azar, calcular las siguientes probabilidades:

a) tenga solo una de las dos alergias, (1 punto)

b) sea celiaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa. (1 punto)

10. Un examen con opción múltiple está compuesto por 10 preguntas, con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes responde todas las preguntas del examen al azar. Calcular la probabilidad de que conteste bien

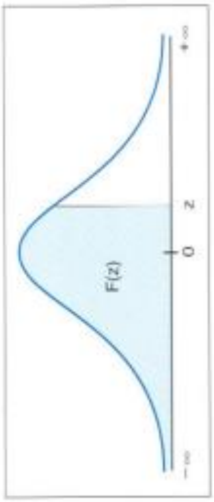
a) cinco preguntas, (0,75 puntos)

b) alguna pregunta. (0,75 puntos)

c) Calcular la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

Tabla de distribución normal *N(0,1)*

$F(z)=P(Z\le z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

a) Calcular, cuando sea posible, las matrices $C\cdot B^t$, $B^t\cdot C$, $B\cdot C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B. (0,5 puntos)

b) Hallar $a\in\mathbb{R}$ para que el sistema $x\cdot A+y\cdot B=C$ de tres ecuaciones y dos incógnitas *x* e *y*, sea compatible determinado y resolverlo para ese valor de *a*. (1,5 puntos)

a)

$$B=\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}3 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

$$C\cdot B^t=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -4\\6 & -2 & -8\\3 & -1 & 4\end{pmatrix}$$ Es posible el producto $C\cdot B^t$

$$3\times\boxed{1\cdot\ 1}\times 3\longrightarrow 3\times 3$$

$$B^t\cdot C=\begin{pmatrix}3 & -1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\end{pmatrix}$$ Es posible el producto $B^t\cdot C$

$$1\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 1\longrightarrow 1\times 1$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\text{¡No es posible!}$$

$$3\times\boxed{1\ \cdot\ 3}\times 1$$

b)

$$x\cdot A+y\cdot B=C\Rightarrow x\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2x+3y\\x-y\\ax-4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+3y=1\\x-y=2\\ax-4y=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x+3y=1\\y=x-2\\ax-4y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+3(x-2)=1\\ax-4(x-2)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+3x-6=1\\ax-4x+8=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x=7\\(a-4)x=-7\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=\frac{7}{5}}\\(a-4)x=-7\end{cases}\Rightarrow(a-4)\frac{7}{5}=-7\Rightarrow a-4=\frac{-35}{7}=-5\Rightarrow\boxed{a=-1}$$

Para que sea compatible determinado debe ser $a = -1$.

Para este valor el sistema tendría como solución:

$$x=\frac{7}{5}\Rightarrow y=\frac{7}{5}-2=-\frac{3}{5}$$

La solución es $x=\frac{7}{5};\ y=-\frac{3}{5}$

2. Dadas las matrices

$$M=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&-2\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $M\cdot X-N=2X$ (2 puntos)

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$M\cdot X-N=2X \Rightarrow M\cdot X-2X=N \Rightarrow (M-2I)X=N$$

Comprobamos que la matriz $M-2I$ es invertible.

$$M-2I=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$$

$$|M-2I|=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&2&1\end{vmatrix}=1\neq 0 \text{ La matriz } M-2I \text{ es invertible}$$

Calculamos su inversa.

$$M-2I=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow (M-2I)^t=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(M-2I)^{-1}=\frac{Adj(M-2I)^t}{|M-2I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&2\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$(M-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-2&1\end{pmatrix}$$

Continuamos resolviendo la ecuación matricial.

$$(M-2I)X=N\Rightarrow X=(M-2I)^{-1}N=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&-2\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-2&-2\\-4&3-1&4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-2&-2\\-4&2&7\end{pmatrix}}$$

3. Dados el plano π de ecuación $x+2y-z=0$ y r la recta de ecuaciones $r:\begin{cases} y-2x=1 \\ x-z=0 \end{cases}$,

a) Hallar el punto de intersección del plano π y la recta *r*. (1 punto)
b) Calcular la distancia del origen a la recta *r*. (1 punto)

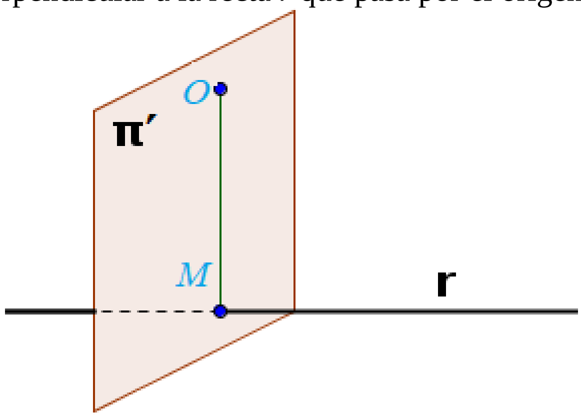
a) Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} y-2x=1 \\ x-z=0 \end{cases} \\ \pi: x+2y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-2x=1 \\ x-z=0 \\ x+2y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1+2x \\ z=x \\ x+2y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x+2(1+2x)-x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2+4x-x=0 \Rightarrow 4x=-2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)=1-1=0} \\ \boxed{z=-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

El punto de intersección tiene coordenadas $P\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$

b) Hallamos el plano π' perpendicular a la recta *r* que pasa por el origen O(0, 0, 0).



$$r:\begin{cases} y-2x=1 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} y=1+2x \\ z=x \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} Q_r(0,1,0) \\ \vec{v_r}=(1,2,1) \end{cases}$$

$$\pi':\begin{cases} O(0,0,0)\in\pi' \\ \vec{n}=\vec{v_r}=(1,2,1) \end{cases} \Rightarrow \pi':\begin{cases} O(0,0,0)\in\pi' \\ \pi': x+2y+z+D=0 \end{cases} \Rightarrow 0+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\pi': x+2y+z=0}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} y-2x=1 \\ x-z=0 \end{cases} \\ \pi':x+2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-2x=1 \\ x-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1+2x \\ x=z \\ x+2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x+2(1+2x)+x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2+4x+x=0 \Rightarrow 6x=-2 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=1+2\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{1}{3}} \\ \boxed{z=-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

El punto de corte del plano π' y la recta r es $M\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

La distancia del punto O a la recta r es la distancia del punto O al punto M.

.

$$\overrightarrow{OM}=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)-(0,0,0)=M\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

$$d(O,r)=d(O,M)=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{9}}=\sqrt{\frac{1}{3}}\,u^2$$

4. Dada la recta *r* definida por

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1},$$

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a *r*. (1 punto)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a *r*. (1 punto)

Obtenemos un vector director y un punto de la recta.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}\Rightarrow r:\begin{cases}P_r(1,-1,2)\\ \overrightarrow{v_r}=(2,3,1)\end{cases}$$

a) El plano π que pasa por el origen O = (0, 0, 0) y contiene a *r* tiene como uno de sus vectores directores a $\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)$ el vector director de la recta y el otro vector director del plano es $\overrightarrow{OP_r}$.

$$\pi:\begin{cases}O(0,0,0)\in\pi\\ \vec{u}=\overrightarrow{OP_r}=(1,-1,2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)\end{cases}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x+4y+3z+2z-y-6x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\pi:-7x+3y+5z=0}$$

b) El plano π' que pasa por el origen O = (0, 0, 0) y es perpendicular a *r* tiene como vector normal a $\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)$ el vector director de la recta.

$$\pi':\begin{cases}O(0,0,0)\in\pi'\\ \vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}O(0,0,0)\in\pi'\\ \pi':2x+3y+z+D=0\end{cases}\Rightarrow 0+0+0+D=0\Rightarrow D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\pi':2x+3y+z=0}$$

5. Calcular el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la función (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot e^x - senx}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ a & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Sea continua en *x = 0.*

Para que la función sea continua en *x = 0* deben coincidir el limite y el valor de la función, es decir, debe cumplirse: $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot e^x - senx}{x^2} = \frac{0 \cdot e^0 - sen0}{0^2} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + x \cdot e^x - \cos x}{2x} = \frac{e^0 + 0 \cdot e^0 - \cos 0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^x + x \cdot e^x - (-senx)}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x + x \cdot e^x + senx}{2} = \frac{2e^0 + 0 \cdot e^0 + sen0}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

Como el valor de la función en *x = 0* es *a*, para que sea continua debe cumplirse que *a = 1*.

6. Dada la función $f(x)=\left\|x+1\right\|+\left\|x-2\right\|$.	
a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función.	(1 punto)
b) Calcular el intervalo donde la función permanece constante.	(1 punto)

Establecemos la expresión de la función como función definida a trozos.
Cambia de expresión en *x = –1* y en *x = 2* que son los valores que anulan los valores absolutos.

$$Si\; x<-1 \text{ (por ejemplo } x=-2\text{) entonces } |x+1|=-x-1 \text{ y también } |x-2|=-x+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Si\; x<-1 \text{ entonces } |x+1|+|x-2|=(-x-1)+(-x+2)=-2x+1$$

$$Si -1\le x\le 2 \text{ (por ejemplo } x=1\text{) entonces } |x+1|=x+1 \text{ y también } |x-2|=-x+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Si -1<x<2 \text{ entonces } |x+1|+|x-2|=(x+1)+(-x+2)=3$$

$$Si\; x>2 \text{ (por ejemplo } x=3\text{) entonces } |x+1|=x+1 \text{ y también } |x-2|=x-2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Si\; x>2 \text{ entonces } |x+1|+|x-2|=(x+1)+(x-2)=2x-1$$

$$f(x)=|x+1|+|x-2|=\begin{cases}-2x+1 & si\;\; x<-1\\ 3 & si\;\; -1\le x\le 2\\ 2x-1 & si\;\; x>2\end{cases}$$

¿Continua en *x = –1*?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} -2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} 3=3\\ f(-1)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ Si es continua en } x=-1.$$

¿Continua en *x = 2*?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 3=3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1=3\\ f(2)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ Si es continua en } x=2.$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{-1,2\}$ es:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & si\;\; x<-1\\ 3 & si\;\; -1\le x\le 2\\ 2x-1 & si\;\; x>2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-2 & si\;\; x<-1\\ 0 & si\;\; -1<x<2\\ 2 & si\;\; x>2\end{cases}$$

¿Derivable en *x = –1*?

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(-1^-\right)=\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} -2=-2 \\ f'\left(-1^+\right)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'\left(-1^-\right)\neq f'\left(-1^+\right).$$

La función no es derivable en $x=-1$.

¿Derivable en $x = 2$?

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(2^-\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 0=0 \\ f'\left(2^+\right)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'\left(2^-\right)\neq f'\left(2^+\right).$$

La función no es derivable en $x=2$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,2\}$

c) La función $f(x)=|x+1|+|x-2|=\begin{cases} -2x+1 & si\ x<-1 \\ 3 & si\ -1\leq x\leq 2 \\ 2x-1 & si\ x>2 \end{cases}$ permanece constante en el intervalo $[-1,2]$

7. Determinar la función *f(x)* tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas y su derivada sea $f'(x)=(2x+1)e^{-x}$ (2 puntos)

La función *f(x)* tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas cumple que *f(0) = 0.*

Si su derivada es $f'(x)=(2x+1)e^{-x}$ sabemos que la función *f(x)* es la primitiva de la derivada.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+1)e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=2x+1\to du=2dx\\ dv=e^{-x}dx\to v=\int dv=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{array}\right\}=$$

$$=(2x+1)\left(-e^{-x}\right)-\int\left(-e^{-x}\right)2dx=-2xe^{-x}-e^{-x}+2\int e^{-x}dx=$$

$$=-2xe^{-x}-e^{-x}+2\left(-e^{-x}\right)=-2xe^{-x}-e^{-x}-2e^{-x}=-2xe^{-x}-3e^{-x}+K$$

Tenemos que $f(x)=-2xe^{-x}-3e^{-x}+K$.

Como *f(0) = 0* entonces:

$$f(0)=-2\cdot 0\cdot e^{-0}-3e^{-0}+K=0\Rightarrow -3+K=0\Rightarrow K=3$$

La función buscada es $f(x)=-2xe^{-x}-3e^{-x}+3$

8. Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)=sen(2x)$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=\pi$. (2 puntos)

Vemos donde corta la función el eje OX.

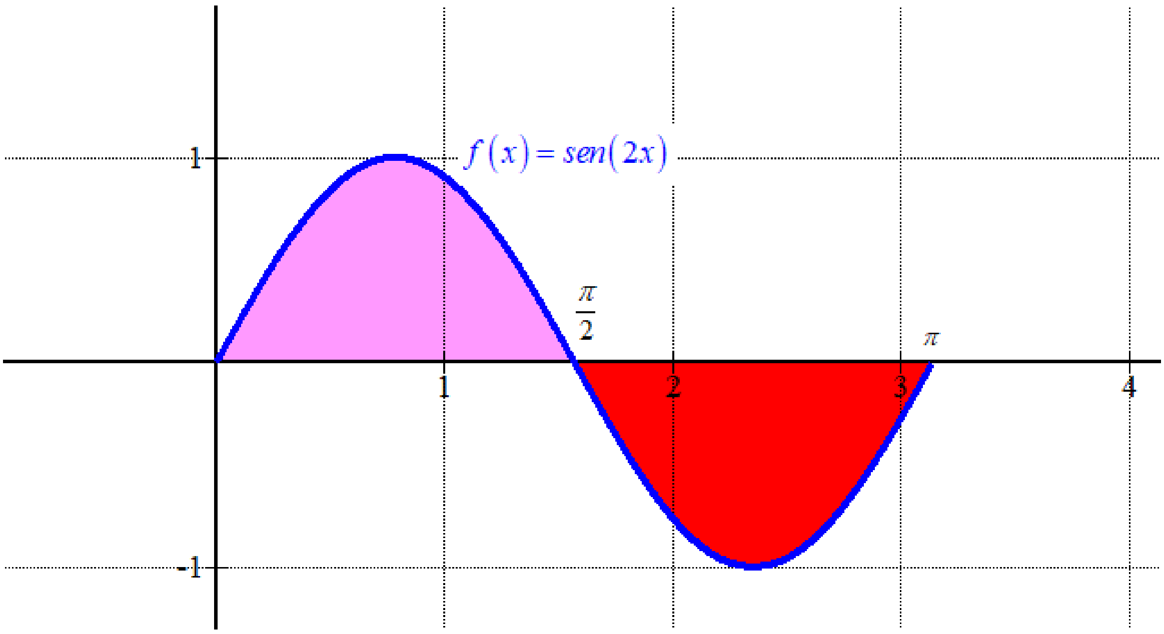
$$f(x)=0 \Rightarrow sen(2x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ o \\ 2x=\pi \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

El valor $x=\dfrac{\pi}{2}$ está comprendido entre $x=0$ y $x=\pi$, por lo que el área la dividimos en dos partes diferentes.

El área es la suma del valor absoluto de la integral definida de la función $f(x)=sen(2x)$ entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$, y del valor absoluto de la integral definida de la función $f(x)=sen(2x)$ entre $\dfrac{\pi}{2}$ y π.

$$Área=\left|\int_0^{\pi/2} sen(2x)\,dx\right|+\left|\int_{\pi/2}^{\pi} sen(2x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}\right|+\left|\left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right|=$$

$$=\left|\frac{-\cos\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{2}-\frac{-\cos(2\cdot 0)}{2}\right|+\left|\frac{-\cos(2\pi)}{2}-\frac{-\cos\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|+\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|=1+1=\boxed{2u^2}$$



9. En un centro educativo han preguntado a sus alumnos acerca de alergias alimentarias, resultando que un 10% es celiaco y un 15% es alérgico a la lactosa. Además, el 20% tiene alguna de las dos alergias. Si se elige un alumno al azar, calcular las siguientes probabilidades:
a) tenga solo una de las dos alergias, (1 punto)
b) sea celiaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa. (1 punto)

Realizamos una tabla de contingencia para aclarar los porcentajes.

	Celiaco	No celiaco	TOTALES
Alérgico a la lactosa			**15**
No alérgico a la lactosa			
TOTALES	**10**		**100**

Llamemos C a "Ser celiaco" y L a "Ser alérgico a la lactosa"
Si el 20% tiene alguna de las dos alergias significa, en términos de probabilidad" que $P(C\cup L)=\frac{20}{100}$, como sabemos que $P(C)=\frac{10}{100}$ y que $P(L)=\frac{15}{100}$ aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión.

$$P(C\cup L)=\frac{20}{100}=P(C)+P(L)-P(C\cap L)\Rightarrow\frac{20}{100}=\frac{10}{100}+\frac{15}{100}-P(C\cap L)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{P(C\cap L)=\frac{5}{100}}$$

Ponemos este dato en la tabla.

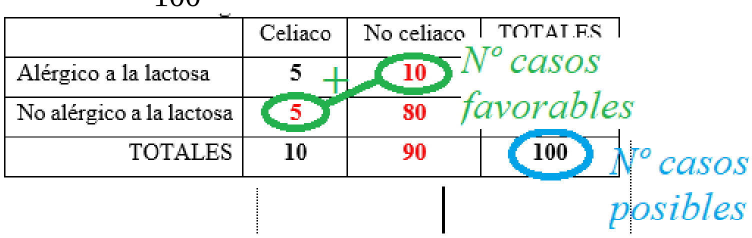
	Celiaco	No celiaco	TOTALES
Alérgico a la lactosa	**5**		**15**
No alérgico a la lactosa			
TOTALES	**10**		**100**

Seguimos rellenando la tabla de contingencia

	Celiaco	No celiaco	TOTALES
Alérgico a la lactosa	**5**	**10**	**15**
No alérgico a la lactosa	**5**	**80**	**85**
TOTALES	**10**	**90**	**100**

a) Aplicando la regla de Laplace y observando la tabla:

P(Solo una de las alergias) = $\frac{10+5}{100}=\boxed{0.15}$



	Celiaco	No celiaco	TOTALES
Alérgico a la lactosa	5	10	
No alérgico a la lactosa	5	80	
TOTALES	10	90	100

b) P(Ser celiaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa) = $\frac{5}{85} = \boxed{\frac{1}{17} \simeq 0.06}$

	Celiaco	No celiaco	TOTALES
Alérgico a la lactosa	**5**	**10**	**15**
No alérgico a la lactosa	**5**	**80**	**85**
TOTALES	**1(**		**100**

Nº casos favorables

Nº casos posibles

10. Un examen con opción múltiple está compuesto por 10 preguntas, con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes responde todas las preguntas del examen al azar. Calcular la probabilidad de que conteste bien

a) cinco preguntas, (0,75 puntos)

b) alguna pregunta. (0,75 puntos)

c) Calcular la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

X = Número de respuestas correctas.

Es una distribución binomial donde hay 10 repeticiones (*n = 10)* de una elección de respuesta al azar, siendo la probabilidad de ser correcta $p = \frac{1}{4}$ y de incorrecta $q = \frac{3}{4}$.

$$\mathrm{X} = \mathrm{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$$

a) $P(X=5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \simeq \boxed{0,0584}$

b) Utilizamos el suceso contrario a "contestar bien alguna pregunta" que es "contestar bien ninguna pregunta".

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \simeq \boxed{0,9437}$$

c) $Media = \mu = np = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2.5\, respuestas\, correctas$

$$Desviación\, típica = \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \simeq 1.37\, respuestas\, correctas$$