UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2021-2022
Convocatoria:
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Dada la curva $f(x)=\frac{1}{4}x^2+4x+4$

(i) Halla los puntos de la curva en los que la recta tangente a ésta pase por el punto (0, 0).
(ii) Da las ecuaciones de las rectas tangentes.

2.- (2 puntos) Halla el área de la región que delimita la gráfica de la función $g(x)=xsenx$ y el eje de abscisas en el intervalo que va de $x = 0$ al menor valor $b > 0$ tal que $g(b)=0$.

3.- (2 puntos) Determina, si existe, el valor de a de tal manera que:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=2$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x=e$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\begin{cases} x+y+az=a \\ ax+ay+z=1 \\ x+ay+z=a \end{cases}$$

5.- (2 puntos) Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determina para que valores de a la matriz AB tiene inversa.
(ii) Resuelve para $a = 0$ la ecuación matricial $ABX=3I$, siendo I la matriz identidad.

6.- (2 puntos) Determina los valores de los parámetros a, b y c para los que $(x,y,z)=(1,2,3)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

7.- (2 puntos) Halla la ecuación de una recta paralela al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y que contenga al punto $P(1,0,1)$. ¿Es única dicha recta? Razona la respuesta.

8.- **(2 puntos)** Determina los valores de los parámetros *a*, y *b* para que el plano π contenga a la recta *r*, donde:

$$\pi \equiv ax + y + z = b, \quad r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1, \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

9.- **(2 puntos)** En un distrito universitario, los estudiantes se distribuyen entre las tres carreras que pueden cursarse del siguiente modo: el 20 % estudian Matemáticas, el 35 % Medicina y el 45 % Arquitectura. El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios en cada caso es del 5%, 12% y del 18%. Se elige un alumno al azar. Halla la probabilidad de que:
(i) finalice sus estudios.
(ii) estudie Medicina si no finaliza sus estudios.

10.- **(2 puntos)** Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 4 y desviación típica 2. Calcula el valor de *a* para que:

$$P(4 - a \le X \le 4 + a) = 0,5934$$

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Dada la curva $f(x)=\frac{1}{4}x^2+4x+4$

(i) Halla los puntos de la curva en los que la recta tangente a ésta pase por el punto (0, 0).
(ii) Da las ecuaciones de las rectas tangentes.

(i) La ecuación de la recta tangente en *x* = *a* es $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+4x+4 \Rightarrow f'(x)=2\frac{1}{4}x+4=\frac{1}{2}x+4$$

$$\left.\begin{array}{l} y-f(a)=f'(a)(x-a) \\ f(a)=\frac{1}{4}a^2+4a+4 \\ f'(a)=\frac{1}{2}a+4 \end{array}\right\} \Rightarrow y-\left(\frac{1}{4}a^2+4a+4\right)=\left(\frac{1}{2}a+4\right)(x-a)$$

Hacemos que la recta tangente pase por el punto (0, 0) y sustituimos *x = 0*, *y = 0.*

$$0-\left(\frac{1}{4}a^2+4a+4\right)=\left(\frac{1}{2}a+4\right)(0-a) \Rightarrow -\frac{1}{4}a^2-4a-4=\left(\frac{1}{2}a+4\right)(-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}a^2-4a-4=-\frac{1}{2}a^2-4a \Rightarrow \left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{2}\right)a^2-4=0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2=4 \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{16}=\pm 4}$$

La situación pedida se cumple en dos puntos de la curva:

$$a=-4 \Rightarrow f(-4)=\frac{1}{4}(-4)^2+4(-4)+4=4-16+4=-8 \Rightarrow \boxed{A(-4,-8)}$$

$$a=4 \Rightarrow f(4)=\frac{1}{4}4^2+4(4)+4=4+16+4=24 \Rightarrow \boxed{B(4,24)}$$

(ii) Sustituimos los valores en la ecuación de las rectas tangentes.

$$a=-4 \Rightarrow y-f(-4)=\left(\frac{1}{2}(-4)+4\right)(x-(-4)) \Rightarrow y-(-8)=2(x+4) \Rightarrow$$

$\Rightarrow y+8=2x+8 \Rightarrow \boxed{y=2x}$ Recta tangente a la curva en $x=-4$

$$a = 4 \Rightarrow y - f(4) = \left(\frac{1}{2}(4) + 4\right)(x - 4) \Rightarrow y - 24 = 6(x - 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 24 = 6x - 24 \Rightarrow \boxed{y = 6x} \text{ Recta tangente a la curva en } x = 4$$

2.- (2 puntos) Halla el área de la región que delimita la gráfica de la función $g(x) = xsenx$ y el eje de abscisas en el intervalo que va de *x = 0* al menor valor *b > 0* tal que $g(b) = 0$.

Hallamos los puntos de corte de la gráfica y el eje de abscisas (*y = 0*).

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = xsenx \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xsenx = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ senx = 0 \to x = 0; \boxed{x = \pi}; x = 2\pi; .... \end{cases}$$

La región de la cual queremos hallar el área está entre *x = 0* y $x = \pi$. Hallamos dicho área con el cálculo integral.

$$Área = \left|\int_0^\pi xsenxdx\right|$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int xsenxdx = \left\{\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ x = u \to dx = du \\ senxdx = dv \to v = \int senxdx = -\cos x \end{array}\right\} = x(-\cos x) - \int -\cos x dx =$$

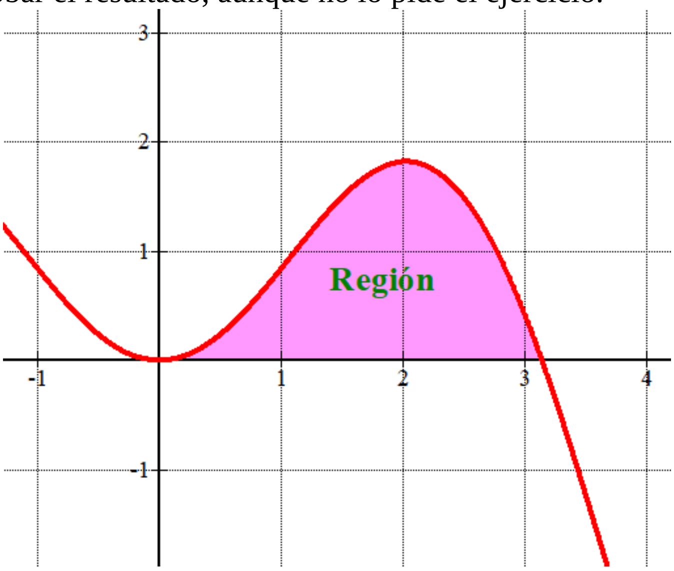
$$= -x\cos x + \int \cos x dx = \boxed{-x\cos x + senx}$$

Lo aplicamos al cálculo del área.

$$Área = \left|\int_0^\pi xsenxdx\right| = \left|\left[-x\cos x + senx\right]_0^\pi\right| = \left|\left[-\pi\cos\pi + sen\pi\right] - \left[-0\cos 0 + sen0\right]\right|$$

$$\boxed{Área = \left|-\pi(-1) + 0 - 0\right| = \pi u^2}$$

Dibujamos para comprobar el resultado, aunque no lo pide el ejercicio.



3.- (2 puntos) Determina, si existe, el valor de a de tal manera que:

(i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=2$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+a}{3x-1}\right)^x=e$

(i) Calculamos el valor del límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=\infty-\infty=Indeterminación=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)\left(\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)\right)}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}\right)^2-(3x-1)^2}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+ax+1-\left(9x^2+1-6x\right)}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{9x^2}+ax\cancel{+1}-\cancel{9x^2}\cancel{-1}+6x}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+6)x}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(a+6)x}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{ax}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{3x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+6}{\sqrt{9+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}}=\frac{a+6}{\sqrt{9}+3}=\frac{a+6}{6}$$

Lo igualamos a 2.

$$\frac{a+6}{6}=2\Rightarrow a+6=12\Rightarrow \boxed{a=6}$$

(ii) Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x=1^\infty=Indeterminación=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{3x+a}{3x-1}-1\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{3x+a-3x+1}{3x-1}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{a+1}{3x-1}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(a+1)x}{3x-1}}=e^{\frac{a+1}{3}}$$

Lo igualamos a e.

$$e^{\frac{a+1}{3}}=e=e^1\Rightarrow\frac{a+1}{3}=1\Rightarrow a+1=3\Rightarrow\boxed{a=2}$$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\begin{cases} x+y+az=a \\ ax+ay+z=1 \\ x+ay+z=a \end{cases}$$

Consideramos la matriz de coeficientes A asociada al sistema $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$. Y la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de A y comprobamos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=a+1+a^3-\left(a^2+a+a\right)=a^3-a^2-a+1$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^3-a^2-a+1=0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow x=1 \text{ es raíz}$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1 \text{ son raíces}$$

CASO 1. $a \neq 1;\ a \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3 al igual que el de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{Fila\,2^{a} \; -a\cdot Fila\,1^{a}} \\ a & a & 1 & 1 \\ -a & -a & -a^2 & -a^2 \\ \hline 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{Fila\,3^{a} \; -Fila\,1^{a}} \\ 1 & a & 1 & a \\ -1 & -1 & -a & -a \\ \hline 0 & a-1 & 1-a & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Intercambiamos la fila 2ª y la fila 3ª}\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Pasamos a resolver el sistema, a partir de la matriz equivalente obtenida.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + az = a \\ (a-1)y + (1-a)z = 1-a \\ (1-a^2)z = 1-a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Como } 1-a^2 \neq 0 \\ \text{puedo despejar "z" en la 3ª ecuación} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + az = a \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 \\ \boxed{z = \frac{1-a^2}{1-a^2} = 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + a = a \\ (a-1)y + (1-a) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ (a-1)y = a-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Como } a-1 \neq 0 \\ \text{puedo despejar "y" en la 2ª ecuación} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ \boxed{y = \frac{a-1}{a-1} = 1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

La solución cuando el sistema es compatible determinado ($a \neq 1;\ a \neq -1$) es $x = -1;\ y = 1;\ z = 1$.

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Determinamos la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila 2ª} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

A partir de la matriz equivalente obtenida seguimos resolviendo el sistema,

$$x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

Las soluciones del sistema compatible indeterminado ($a=1$) es $\begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$ con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$

CASO 3. $a=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Determinamos la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\, 2^{\text{a}} + Fila\, 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Fila\, 3^{\text{a}} - Fila\, 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos la fila } 3^{\text{a}} \\ \text{con la fila } 2^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

A partir de la matriz equivalente obtenida seguimos resolviendo el sistema,

$$\left. \begin{array}{r} x+y-z=-1 \\ -2y+2z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x+y-z=-1 \\ y-z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} x+y-z=-1 \\ \boxed{y=z} \end{array} \right\} \Rightarrow x+z-z=-1 \Rightarrow \boxed{x=-1} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

Las soluciones del sistema compatible indeterminado ($a=-1$) es $\begin{cases} x=-1 \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

5.- (2 puntos) Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & a\\ 1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

(i) Determina para que valores de a la matriz AB tiene inversa.
(ii) Resuelve para $a = 0$ la ecuación matricial $ABX = 3I$, siendo I la matriz identidad.

(i) Calculamos la matriz AB.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ 1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+a+6 & a+a+4\\ 0-1+3 & 0-1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+6 & 2a+4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Para que la matriz AB tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$|AB|=\begin{vmatrix}a+6 & 2a+4\\ 2 & 1\end{vmatrix}=a+6-4a-8=-3a-2$$

$$|AB|=0\Rightarrow -3a-2=0\Rightarrow 3a=-2\Rightarrow \boxed{a=-\frac{2}{3}}$$

La matriz AB tiene inversa para los valores $a\neq -\frac{2}{3}$

(ii) Para $a = 0$ existe la inversa de la matriz A ($a\neq -\frac{2}{3}$) por lo que podemos usar su inversa para resolver la ecuación matricial $ABX = 3I$.

$$ABX=3I\Rightarrow X=(AB)^{-1}3I=3(AB)^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz AB.

para $a = 0$ la matriz queda $AB=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1}=\frac{Adj(AB)^T}{|AB|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -4\\ -2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

Sustituimos este valor en la ecuación matricial.

$$\boxed{X=3\begin{pmatrix}-1/2 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/2 & 6\\ 3 & -9\end{pmatrix}}$$

6.- (2 puntos) Determina los valores de los parámetros a, b y c para los que $(x,y,z)=(1,2,3)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} 2ax+by+z=3c \\ 3x-2by-2cz=a \\ 5ax-2y+cz=-4b \end{cases}$$

Si $(x,y,z)=(1,2,3)$ es solución del sistema debe cumplirse:

$$\begin{cases} 2a+2b+3=3c \\ 3-4b-6c=a \\ 5a-4+3c=-4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b-3c=-3 \\ -a-4b-6c=-3 \\ 5a+4b+3c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b-3c=-3 \\ a+4b+6c=3 \\ 5a+4b+3c=4 \end{cases}$$

Por lo que debemos resolver el sistema que se nos plantea. Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2a+2b-3c=-3 \\ a+4b+6c=3 \\ 5a+4b+3c=4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos} \\ \text{Ecuación 2ª con Ecuación 1ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a+4b+6c=3 \\ 2a+2b-3c=-3 \\ 5a+4b+3c=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2\cdot \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 2a & +2b & -3c & =-3 \\ -2a & -8b & -12c & =-6 \\ \hline 0 & -6b & -15c & =-9 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 5\cdot \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 5a & +4b & +3c & =4 \\ -5a & -20b & -30c & =-15 \\ \hline 0 & -16b & -27c & =-11 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b-3c=-3 \\ -6b-15c=-9 \\ -16b-27c=-11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+2b-3c=-3 \\ 2b+5c=3 \\ -16b-27c=-11 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + 8\cdot \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{cccc} -16b & -27c & = & -11 \\ 16b & +40c & = & 24 \\ \hline 0 & 13c & = & 13 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

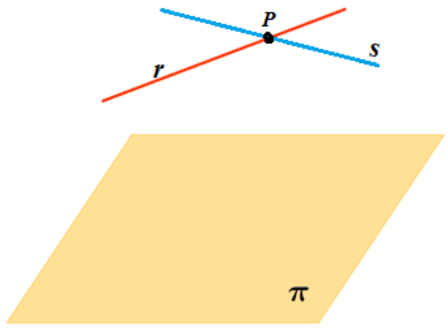
$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+2b-3c=-3 \\ 2b+5c=3 \\ 13c=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b-3c=-3 \\ 2b+5c=3 \\ \boxed{c=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b-3=-3 \\ 2b+5=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b=0 \\ 2b=3-5=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+2b=0 \\ \boxed{b=\dfrac{-2}{2}=-1} \end{cases} \Rightarrow 2a+2(-1)=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Los valores buscados son $a=1;\ b=-1;\ c=1$.

7.- (2 puntos) Halla la ecuación de una recta paralela al plano $\pi \equiv x+y+z=0$ y que contenga al punto $P(1,0,1)$. ¿Es única dicha recta? Razona la respuesta.

Una recta que pase por el punto P y sea paralela a un plano no es única. Lo que sí es único es el plano paralelo a π que pasa por P.

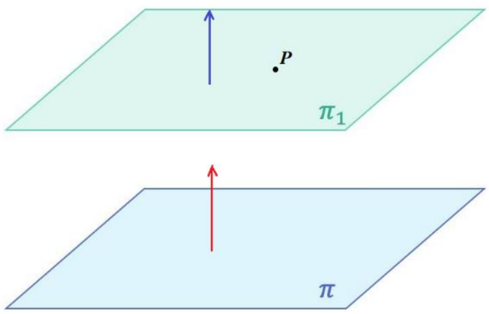


Hallamos la ecuación del plano π_1 paralelo al plano π que pasa por el punto P.

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x+y+z=0 \\ \pi // \pi_1\end{array}\right\} \Rightarrow \pi_1 \equiv x+y+z+D=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x+y+z+D=0 \\ P(1,0,1) \in \pi_1\end{array}\right\} \Rightarrow 1+0+1+D=0 \Rightarrow D=-2$$

El plano π_1 tiene ecuación $\pi_1 \equiv x+y+z-2=0$



Obtenemos un punto Q cualquiera de $\pi_1 \equiv x+y+z-2=0$ y junto con el punto P definen una recta paralela al plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x+y+z-2=0 \\ x=2 \\ y=0\end{array}\right\} \Rightarrow 2+0+z-2=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow Q(2,0,0)$$

Obtenemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

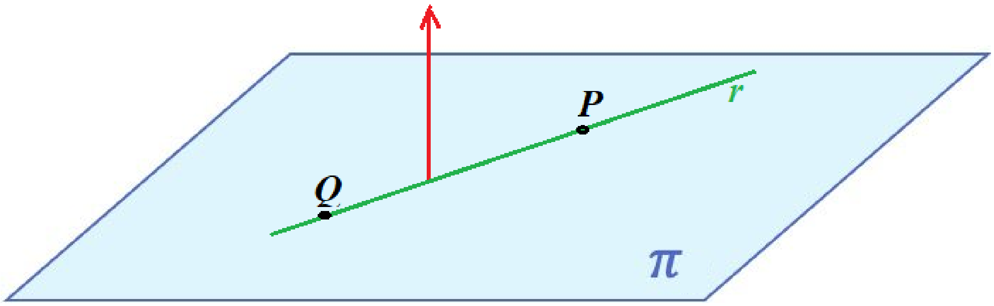
$$\left.\begin{array}{l}Q(2,0,0) \in r \\ P(1,0,1) \in r\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (2,0,0)-(1,0,1) = (1,0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r} = (1,0,-1) \\ P(1,0,1) \in r\end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+1\cdot\lambda \\ y = 0+0\cdot\lambda \\ z = 1-1\cdot\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 0 \\ z = 1-\lambda \end{cases}}$$

8.- (2 puntos) Determina los valores de los parámetros *a*, y *b* para que el plano π contenga a la recta *r*, donde:

$$\pi \equiv ax+y+z=b, \quad r \equiv \begin{cases} x+y+z=1, \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$$

Para que el plano contenga la recta debe cumplirse que el vector normal del plano y el director de la recta sean perpendiculares y por tanto su producto escalar nulo. Y también que un punto cualquiera de la recta debe cumplir la ecuación del plano.



Para obtener el punto P de la recta *r* damos el valor a $y=0$ obteniendo el resto de coordenadas del punto.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x+y+z=1, \\ -x-2y+z=0 \end{cases} \\ y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1, \\ -x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1, \\ x=z \end{cases} \Rightarrow z+z=1 \Rightarrow z=0.5 \Rightarrow x=0.5$$

El punto P tiene coordenadas $P(0.5, 0, 0.5)$

Para obtener otro punto Q de la recta *r* damos otro valor a $y=1$ obteniendo el resto de coordenadas del punto.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x+y+z=1, \\ -x-2y+z=0 \end{cases} \\ y=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+1+z=1, \\ -x-2+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0, \\ -x+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ -x+z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z+z=2 \Rightarrow z=1 \Rightarrow x=-1$$

El punto Q tiene coordenadas $Q(-1,1,1)$.

Los puntos P y Q deben pertenecer al plano y deben cumplir su ecuación.

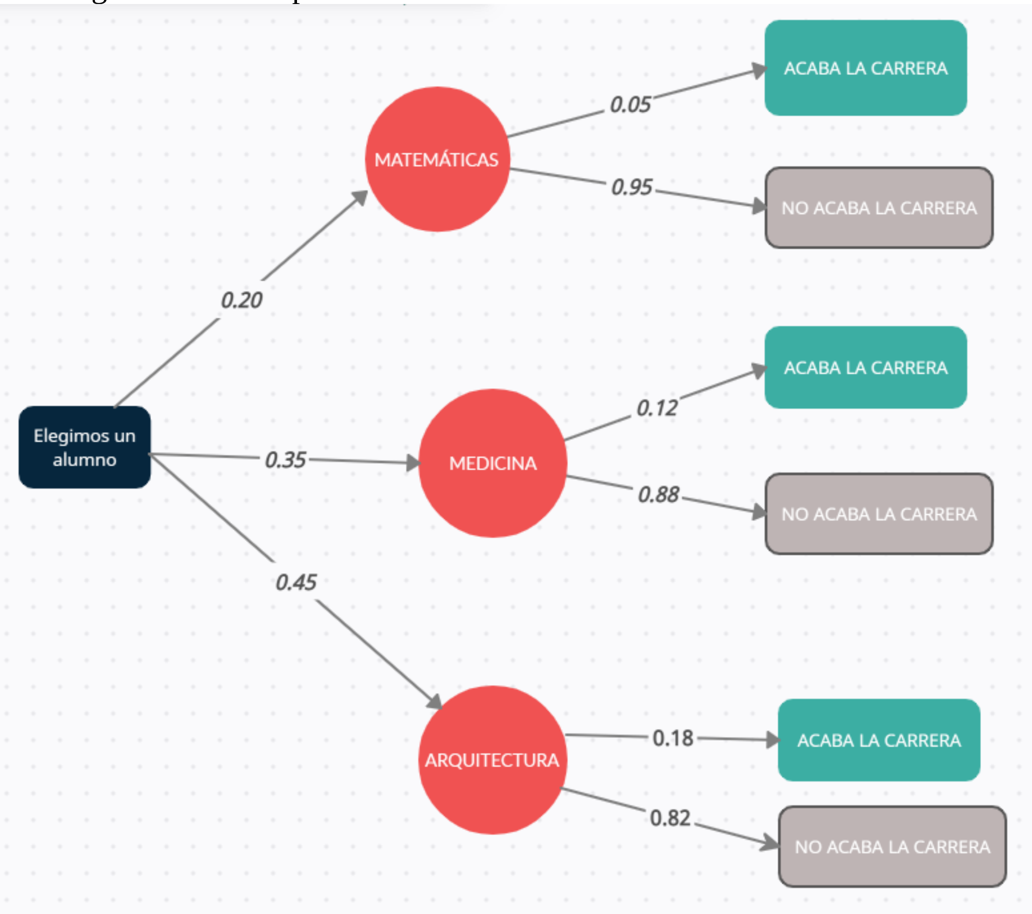
$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv ax+y+z=b \\ P(0.5,0,0.5) \in \pi \\ Q(-1,1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.5a+0+0.5=b \\ -a+1+1=b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.5a+0.5=b \\ -a+2=b \end{array} \right\} \Rightarrow 0.5a+0.5=-a+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.5a=1.5 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=-1+2=1}$$

Los valores buscados son $a=b=1$

9.- (2 puntos) En un distrito universitario, los estudiantes se distribuyen entre las tres carreras que pueden cursarse del siguiente modo: el 20 % estudian Matemáticas, el 35 % Medicina y el 45 % Arquitectura. El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios en cada caso es del 5%, 12% y del 18%. Se elige un alumno al azar. Halla la probabilidad de que:
(i) finalice sus estudios.
(ii) estudie Medicina si no finaliza sus estudios.

Realizamos un diagrama de árbol para describir la situación.



Llamemos MA = "Estudiar matemáticas", ME = "Estudiar medicina", AR = "Estudiar arquitectura" y F = "Acaba la carrera".

(i) Observando el diagrama tenemos que:

$$P(F)=P(MA)P(F/MA)+P(ME)P(F/ME)+P(AR)P(F/AR)=$$

$$=0.20\cdot 0.05+0.35\cdot 0.12+0.45\cdot 0.18=0.133=\boxed{13.3\%}$$

(ii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(ME/\overline{F}\right)=\frac{P\left(ME\cap\overline{F}\right)}{P\left(\overline{F}\right)}=\frac{P(ME)P\left(\overline{F}/ME\right)}{1-P(F)}=$$

$$=\frac{0.35\cdot 0.88}{1-0.133}=\boxed{\frac{308}{867}\simeq 0.355=35.5\%}$$

10.- (2 puntos) Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 4 y desviación típica 2. Calcula el valor de *a* para que:

$$P(4-a \leq X \leq 4+a) = 0,5934$$

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

$X \equiv N(4,2)$

Tipificamos la variable X e intentamos convertir la información proporcionada en un dato que podamos buscar en la tabla de la normal N(0, 1).

$$P(4-a \leq X \leq 4+a) = 0,5934 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ X \equiv N(4,2) \\ \dfrac{X-4}{2} = Z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{4-a-4}{2} \leq \frac{X-4}{2} \leq \frac{4+a-4}{2}\right) = 0,5934 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{a}{2} \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0,5934 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - P\left(Z \leq -\frac{a}{2}\right) = 0,5934 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - \left(P\left(Z \geq \frac{a}{2}\right)\right) = 0,5934 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right)\right) = 0,5934 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + 2P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0.5934 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = 1.5934 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{1.5934}{2} = 0.7967 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla N}(0,1)\} \Rightarrow \frac{a}{2} = 0.83 \Rightarrow \boxed{a = 1.66}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8