uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2021-2022** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{l} x-2my+z=1 \\ mx+2y-z=-1 \\ x-y+z \quad =1 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m=\dfrac{1}{2}$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^3 e^{-1/x^2} & si \quad x\neq 0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f(x)* en $x = 0$.
b) (0.5 puntos) Estudie si *f(x)* presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\,dx$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Con un dispositivo láser situado en el punto P (1, 1, 1) se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x-y=10 \\ x-z=-90 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de *r* y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.
b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.
c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x+y=2$ y la recta *r*.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros.
a) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.
b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.
c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

a) (0.5 puntos) Compruebe si *f(x)* verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$
b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de *f(x)* en $\mathbb{R}$.
c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje OX en el intervalo $[-1,1]$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean el plano $\pi \equiv x+y+z=1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda, \lambda\in\mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}$ y el punto *P(0, 1, 0)*.

a) (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.
b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.
c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros
blancos y negros. Se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.
b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.
c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real *m*:

$$\left.\begin{array}{l} x-2my+z=1 \\ mx+2y-z=-1 \\ x-y+z \quad =1 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de *m*.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m=\frac{1}{2}$

a) Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2+2m-m-2+2m^2-1=2m^2+m-1$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2m^2+m-1=0 \Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 2(-1)}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases} \frac{-1+3}{4}=\boxed{\frac{1}{2}=m} \\ \frac{-1-3}{4}=\boxed{-1=m} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m\neq\frac{1}{2}$ **y** $m\neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\cdot \text{Fila } 3^a + 3\cdot\text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -12 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 12 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m=\frac{1}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2\cdot\text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -4 \quad 2 \quad 2 \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad -5 \quad 3 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $m=\frac{1}{2}$ el sistema es compatible indeterminado.

Obtenemos la solución a partir del sistema equivalente que hemos obtenido en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ -5y+3z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ -5y=3-3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x-y+z=1 \\ \boxed{y=-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}z} \end{array}\right\} \Rightarrow x+\frac{3}{5}-\frac{3}{5}z+z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}z-z \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}z}$$

Las soluciones del sistema son $x=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}t;\ y=-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}t;\ z=t;\ \ t\in\mathbb{R}$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^3e^{-1/x^2} & si & x\neq 0 \\ 0 & si & x=0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f(x)* en *x = 0*.

b) (0.5 puntos) Estudie si *f(x)* presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}dx$

a) ¿La función es continua en $x = 0$?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^3e^{-1/x^2}=\lim_{x\to 0} x^3\frac{1}{e^{1/x^2}}=0^3\frac{1}{e^{1/0^+}}=0\cdot\frac{1}{e^{+\infty}}=0\cdot 0=0=f(0)$$

La función es continua.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ y su derivada es:

$$f(x)=x^3e^{-1/x^2}=x^3e^{-x^{-2}}\Rightarrow f'(x)=3x^2e^{-1/x^2}+x^3e^{-1/x^2}\frac{2}{x^3}=3x^2e^{-1/x^2}+2e^{-1/x^2}\quad si\quad x\neq 0$$

¿La función es derivable en *x = 0*?

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}3x^2e^{-1/x^2}+2e^{-1/x^2}=3\cdot 0^2e^{-1/0^2}+2e^{-1/0^2}=0\cdot e^{-\infty}+2e^{-\infty}=0+0=0$$

La función es derivable en *x = 0*.

La función es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) Vemos la expresión de *f(–x)* y lo comparamos con *f(x)*.

$$f(-x)=(-x)^3e^{-1/(-x)^2}=-x^3e^{-1/x^2}=-f(x)$$

La función presenta simetría impar.

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int\frac{f(x)}{x^6}dx=\int\frac{x^3e^{-1/x^2}}{x^6}dx=\int\frac{e^{-1/x^2}}{x^3}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ -\frac{1}{x^2}=-x^{-2}=t\Rightarrow 2x^{-3}dx=dt\\ \frac{2}{x^3}dx=dt\Rightarrow dx=\frac{x^3}{2}dt\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{e^t}{x^3}\frac{x^3}{2}dt=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t=\frac{1}{2}e^{-1/x^2}+K$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida.

$$\int_1^2\frac{f(x)}{x^6}dx=\left[\frac{1}{2}e^{-1/x^2}\right]_1^2=\left[\frac{1}{2}e^{-1/2^2}\right]-\left[\frac{1}{2}e^{-1/1^2}\right]=\boxed{\frac{1}{2e^{1/4}}-\frac{1}{2e}}$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Con un dispositivo láser situado en el punto P (1, 1, 1) se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de *r* y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano *z = 0*.
b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.
c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta *r*.

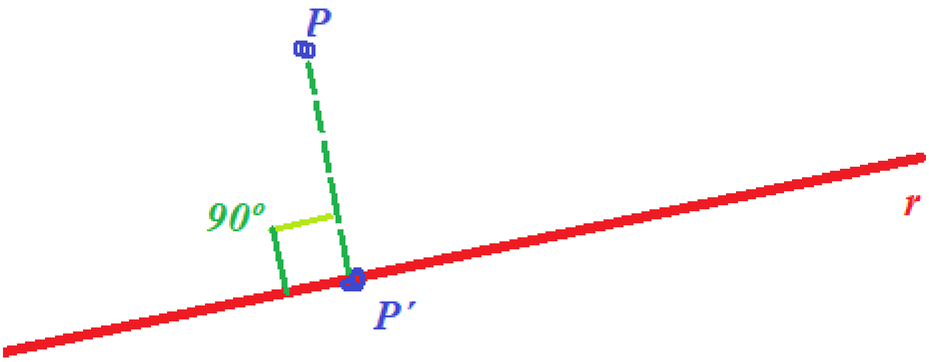
a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = 10 - 2x \\ -z = -90 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -10 + 2x \\ z = 90 + x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -10 + 2t \\ z = 90 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -10, 90) \\ \boxed{\overrightarrow{v_r} = (1, 2, 1)} \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de la recta *r* con el plano *z = 0*

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -10 + 2t \\ z = 90 + t \end{cases} \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -10 + 2t \\ 0 = 90 + t \to t = -90 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -90 \\ y = -10 - 180 = -190 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Q(-90, -190, 0)}$$

b) El punto P´ que se busca es el del dibujo.



Obtenemos el plano π perpendicular a la recta que pasa por P. El punto de corte de recta y plano es el punto P´.

Hallamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{v_r} = (1, 2, 1) \\ P(1,1,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi : x + 2y + z + D = 0 \\ P(1,1,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow \pi : x + 2y + z - 4 = 0$$

Hallamos el punto P´ de intersección de plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : x+2y+z-4=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=-10+2t \\ z=90+t \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow t+2(-10+2t)+90+t-4=0 \Rightarrow t-20+4t+90+t-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6t+66=0 \Rightarrow 6t=-66 \Rightarrow t=-11 \Rightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-10-22=-32 \Rightarrow \boxed{P'(-11,-32,79)} \\ z=90-11=79 \end{cases}$$

c) El plano $x+y=2$ tiene como vector normal $\vec{n}=(1,1,0)$.

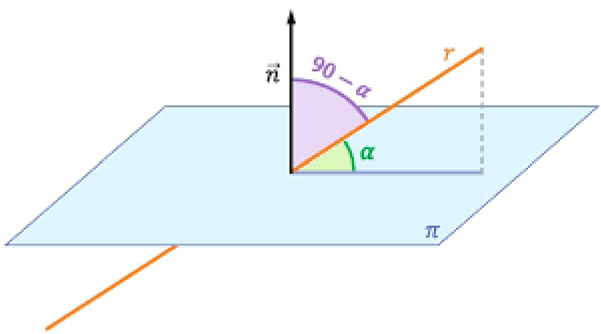
La recta $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=-10+2t \\ z=90+t \end{cases}$ tiene como vector director $\vec{v_r}=(1,2,1)$.

Hallamos el ángulo formado entre el vector normal del plano y el director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(1,2,1) \\ \vec{n}=(1,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{v_r},\vec{n}\right)=\frac{\vec{v_r}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{v_r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{(1,2,1)(1,1,0)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{1+2}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\vec{v_r},\vec{n}\right)=30^{\circ}$$

El ángulo que forman recta y plano es 90º – 30º = 60º.



A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros.
a) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.
b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.
c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina.

Es un problema que resolvemos utilizando la distribución binomial.

Número de repeticiones = *n = 10*. Probabilidad de éxito (sea mujer) = *p = 0.277*.
q = 1 – 0.277 = 0.723

X = Número de mujeres en un grupo de 10. X = B(10, 0.277)

a) Nos piden calcular *P(X = 5)*.

$$P(X=5)=\binom{10}{5}\cdot 0.277^5\cdot 0.723^5=252\cdot 0.277^5\cdot 0.723^5=\boxed{0.0812}$$

b) Que “haya al menos un hombre” es lo mismo que “Haya 9 mujeres o menos”.
Nos piden calcular $P(X\le 9)$

$$P(X\le 9)=\left\{\begin{matrix}P(X=0)+P(X=1)+...+P(X=9)\\ \text{Es muy largo, utilizamos el contrario}\end{matrix}\right\}=1-P(X=10)=$$

$$=1-\binom{10}{10}\cdot 0.277^{10}\cdot 0.723^0=1-0.277^{10}\simeq\boxed{0.999997}$$

c) Pasamos a una binomial X = B(200, 0.277).
El 35 % de 200 consejeros son 0.35 · 200 = 70.

Como $\left.\begin{matrix}np=200\cdot 0.277=55.4>5\\ nq=200\cdot 0.723=144.6>5\end{matrix}\right\}$ entonces la binomial se puede aproximar con una normal de media $\mu=np=55.4$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{200\cdot 0.277\cdot 0.723}\simeq 6.329$

La distribución binomial X = B(200, 0.277) se aproxima con una normal Y = N(55.4, 6.329).

Nos piden calcular $P(X\ge 70)$

$$P(X\ge 70)=\{\text{Correción de Yates}\}=P(Y\ge 69.5)=\{Tipificamos\}=P\left(Z\ge\frac{69.5-55.4}{6.329}\right)=$$

$$=P(Z\ge 2.23)=1-P(Z\le 2.23)=\{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\}=1-0.9871=\boxed{0.0129}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Llamamos "x" a la edad de Pablo, "y" a la edad de Alejandro y "z· a la edad de Alicia.

"*La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia*" → $x+y=2z+3$

"L*a edad de los tres primos juntos es de 45 años*" → $x+y+z=45$

En el reparto del dinero tocan a 9450 / 45 = 210 euros por año.

"*En el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia*" como 420 / 210 = 2, esto significa que Pablo tiene 2 años más que Alicia → $x=z+2$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2z+3 \\ x+y+z=45 \\ x=z+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z+2+y=2z+3 \\ z+2+y+z=45 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=z+1 \\ y=-2z+43 \end{array}\right\} \Rightarrow z+1=-2z+43 \Rightarrow 3z=42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{42}{3}=14} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=14+1=15} \\ \boxed{x=14+2=16} \end{cases}$$

Pablo tiene 16 años, Alejandro 15 y Alicia 14.

Pablo recibe 16 · 210 = 3360 €, Alejandro 15 · 210 = 3150 € y Alicia 14 · 210 = 2940 €

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

a) (0.5 puntos) Compruebe si *f(x)* verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$

b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de *f(x)* en $\mathbb{R}$.

c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje OX en el intervalo $[-1,1]$.

a) La función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ es continua en el intervalo $[-1,1]$. Es un cociente de polinomios, pero el denominador no se anula para ningún valor de *x*.

La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=\dfrac{-1}{(-1)^2+1}=-\dfrac{1}{2}<0 \\ f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}>0 \end{array}\right\}$$

b) Hallamos la derivada y la igualamos a cero, en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{1}=\pm1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores hallados.

En $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2*, la derivada vale $f'(-2)=\dfrac{1-(-2)^2}{\left((-2)^2+1\right)^2}=\dfrac{-3}{25}<0$.

La función decrece en $(-\infty,-1)$.

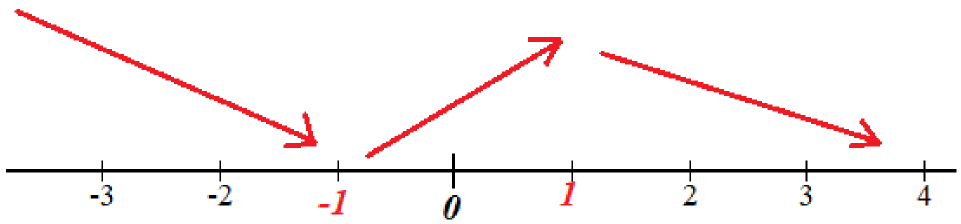
En $(-1,1)$ tomamos *x = 0*, la derivada vale $f'(0)=\dfrac{1-0^2}{\left(0^2+1\right)^2}=1>0$.

La función crece en $(-1,1)$

En $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2*, la derivada vale $f'(2)=\dfrac{1-2^2}{\left(2^2+1\right)^2}=\dfrac{-3}{25}<0$.

La función decrece en $(1,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$.

Como $f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}=\frac{-1}{2}$ y $f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$ el mínimo relativo tiene coordenadas $\left(-1,\frac{-1}{2}\right)$ y el máximo relativo $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

c) Averiguamos si la función corta el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x}{x^2+1} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{x^2+1}=0 \Rightarrow \boxed{x=0\in[-1,1]}$$

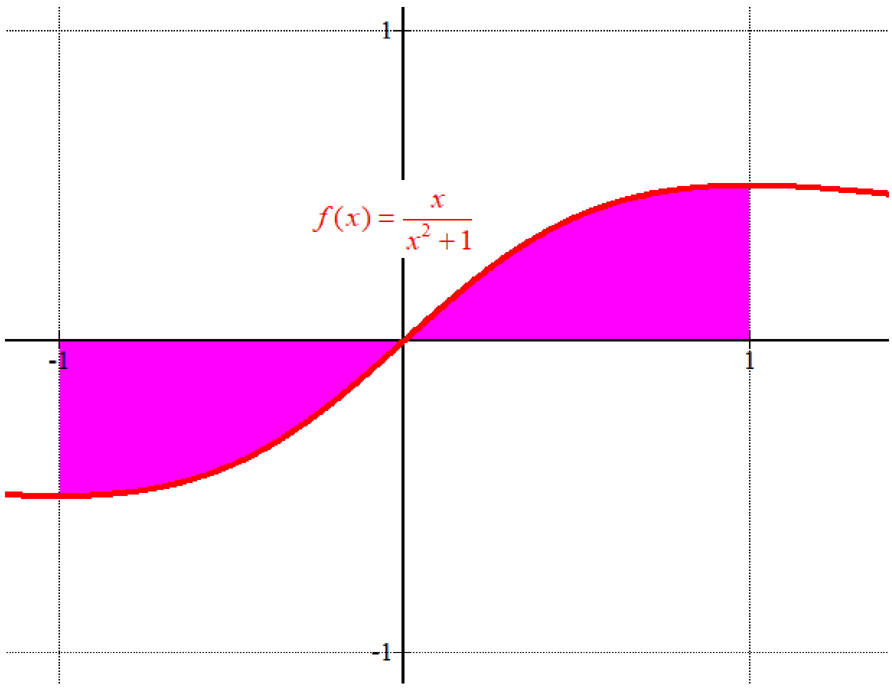
El recinto del cual queremos hallar su área lo dividimos en dos partes.

$$Área=\left|\int_{-1}^{0} f(x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right|=\left|\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2+1}dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}dx\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{2x}{x^2+1}dx\right|+\left|\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{2x}{x^2+1}dx\right|=\left|\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_{0}^{1}\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{1}{2}\ln\left(0^2+1\right)\right]-\left[\frac{1}{2}\ln\left((-1)^2+1\right)\right]\right|+\left|\left[\frac{1}{2}\ln\left(1^2+1\right)\right]-\left[\frac{1}{2}\ln\left(0^2+1\right)\right]\right|=$$

$$=\left|0-\frac{1}{2}\ln 2\right|+\left|\frac{1}{2}\ln 2\right|=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2=\boxed{\ln 2\approx 0.693u^2}$$



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv x+y+z=1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}$ y el punto *P(0, 1, 0)*.

a) (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.

c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

a) Basta comprobar que dos puntos de la recta pertenecen al plano.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \Rightarrow Q_1(1,1,-1) \\ \lambda=1 \Rightarrow R_1(2,0,-1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} ¿Q_1(1,1,-1) \in \pi\,? \\ \pi \equiv x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿1+1-1=1?\ ¡¡¡\mathit{Cierto}!!!$$

$$\left.\begin{array}{l} ¿R_1(2,0,-1) \in \pi\,? \\ \pi \equiv x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿2+0-1=1?\ ¡¡¡\mathit{Cierto}!!!$$

Como los dos puntos Q y R pertenecen al plano la recta está contenida en el plano.

¿El punto P pertenece al plano?

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,\ 1,\ 0) \in \pi\,? \\ \pi \equiv x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿0+1+0=1?\ ¡¡¡\mathit{Cierto}!!!$$

El punto P pertenece al plano.

b) Como la recta pedida debe estar contenida en el plano debe ser perpendicular al vector normal del plano y, a su vez, nos piden que sea perpendicular a r_1 por lo que nos servirá como vector director de la recta pedida el producto vectorial del vector normal del plano y el director de la recta r_1.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z=1 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ r_1 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{u_1}=(1,-1,0) \\ z=-1 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_s}=\vec{n}\times\vec{u_1}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = j-k-k+i=(1,1,-2)$$

Hallamos la ecuación de la recta pedida.

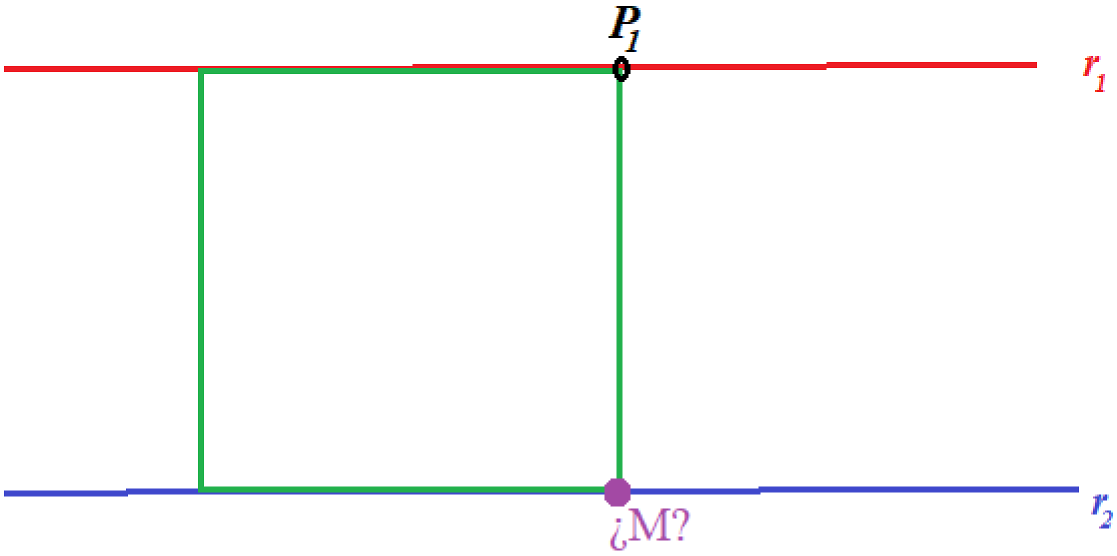
$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_s}=(1,1,-2) \\ P(0,1,0) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}}$$

c) La recta r_2 paralela a r_1 tiene su mismo vector director.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \,,\, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = (1,-1,0) \\ z = -1 \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_1} = (1,-1,0) \\ P(0,1,0)) \in r_2 \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

La situación planteada es la del dibujo.



Basta hallar la distancia entre las dos rectas para hallar el área pedida.
Para calcular esta distancia tomamos un punto P_1 $(1, 1, -1)$ de la recta r_1, calculamos el plano perpendicular a la recta que pasa por P_1, luego hallamos el punto M de corte de la recta r_2 y el plano. La distancia entre las dos rectas será la distancia entre P_1 y M.

El plano perpendicular a r_1 tiene como vector normal a $\overrightarrow{u_1} = (1,-1,0)$.

$$\left.\begin{matrix} \vec{n} = \overrightarrow{u_1} = (1,-1,0) \\ P_1(1,\ 1,\ -1) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \pi \equiv x - y + D = 0 \\ P_1(1,\ 1,\ -1) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1-1+D=0 \Rightarrow \pi \equiv x-y=0$$

Hallamos el punto M de intersección del plano y r_2

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x - y = 0 \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 0 \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda - (1-\lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)} \\ z = 0 \end{cases}$$

Calculamos la distancia entre las dos rectas.

$$d(r_1, r_2) = d(P_1, M) = \left|\overrightarrow{P_1M}\right| = \ldots$$

$$\boxed{\overrightarrow{P_1M} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - (1,1,-1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)}$$

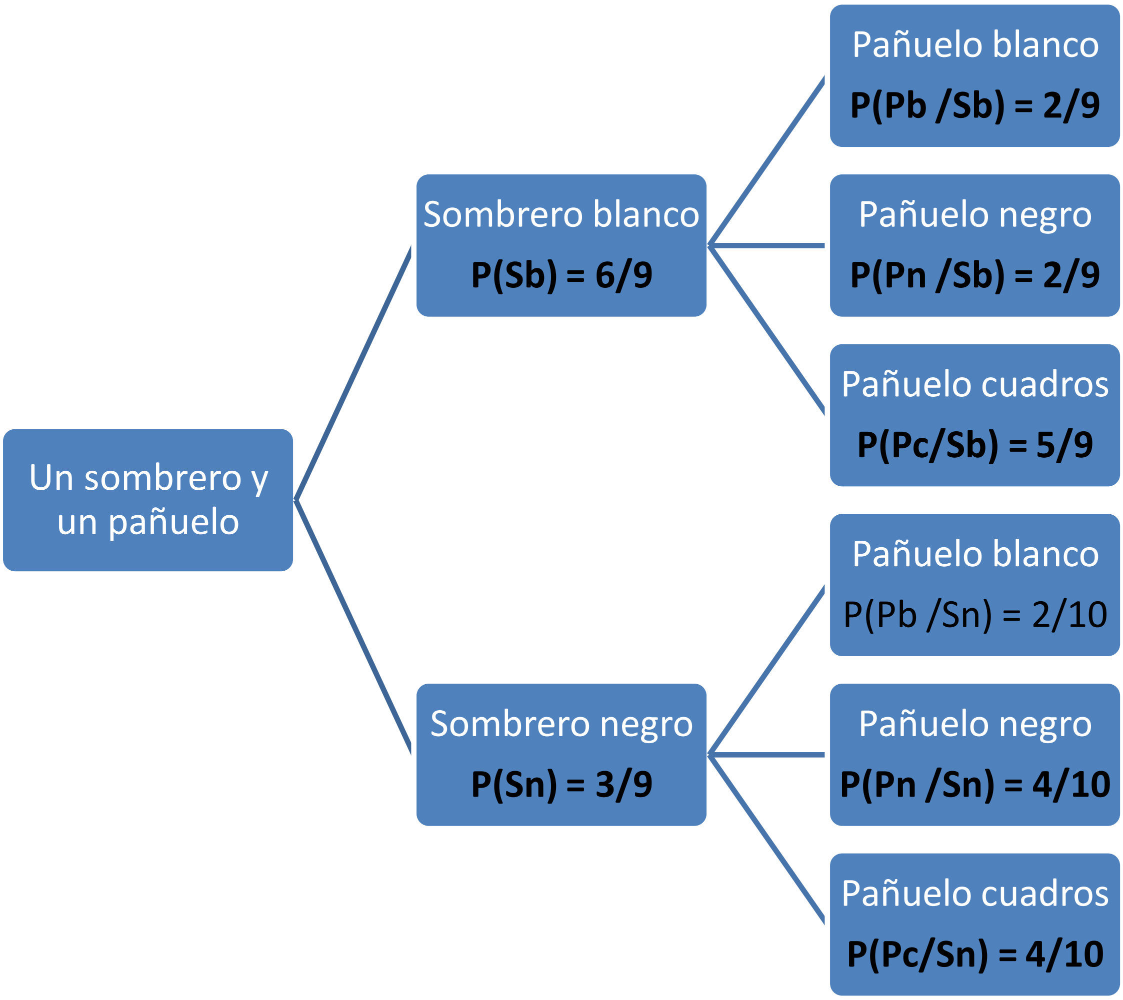
$$\ldots = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Hemos obtenido el valor de la longitud del lado del cuadrado.

El área del cuadrado es $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{2}u^2}$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros
blancos y negros. Se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.
b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.
c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Realizamos un diagrama de árbol.



He llamado Sb al suceso "Elegir sombrero blanco", Sn a "Elegir sombrero negro", Pb a "Elegir pañuelo blanco", Pn a "Elegir pañuelo negro" y Pc a "Elegir pañuelo a cuadros".

a) Interpreto que el suceso del cual se pide calcular la probabilidad es el suceso "Elegir un pañuelo de cuadros o de color distinto al sombrero".

$$P(\text{Elegir pañuelo con un color que no sea del sombrero}) =$$
$$= P(Sb)\cdot P(Pn/Sb) + P(Sb)\cdot P(Pc/Sb) + P(Sn)\cdot P(Pb/Sn) + P(Sn)\cdot P(Pc/Sn) =$$
$$= \frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{6}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{10} + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10} = \frac{42}{81} + \frac{18}{90} = \boxed{\frac{97}{135} \simeq 0.719}$$

b) Como el suceso planteado ocurre de numerosas formas calculamos la probabilidad pedida haciendo uso del suceso contrario.

$$P(\text{Al menos uno de los complementos tiene algo de color negro}) =$$
$$= 1 - P(\text{Ninguno de los complementos tiene algo de color negro}) =$$
$$= 1 - P(Sb)\cdot P(Pb/Sb) = 1 - \frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9} = \boxed{\frac{23}{27} \simeq 0.852}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(Sn/Pc) = \frac{P(Sn \cap Pc)}{P(Pc)} = \frac{P(Sn)P(Pc/Sn)}{P(Sb)P(Pc/Sb) + P(Sn)P(Pc/Sn)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}} = \frac{\frac{12}{90}}{\frac{30}{81} + \frac{12}{90}} = \boxed{\frac{9}{34} \simeq 0.265}$$