EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2022 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: [2,5 p.] La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

2: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

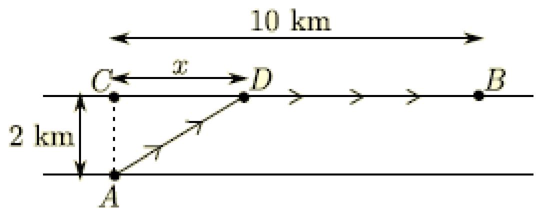
a) **[1 p.]** Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3=-I$ y calcule A^{2023}.

b) **[0,5 p.]** Calcule la inversa de A.

c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX-B^T=A^2$, donde B^T denota la matriz traspuesta de B.

3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 kilómetros de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 kilómetros del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



a) **[1 p.]** Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\dfrac{10-x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.

b) **[1,5 p.]** Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

4: Considere la función $f\left(x\right)=x\ ln\left(x\right)$, definida para $x>0$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.
c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función *f(x)* cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $\left(1,0\right)$.

5: Considere las siguientes rectas:

$$r:\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases} x-z=0 \\ y=1 \end{cases}.$$

a) **[1,5 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

6: Considere los puntos $A=(1,-1,\ 2)$ y $B=\left(3,\ 5,\ 2\right)$.

a) **[1,5 p.]** Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.
b) **[1 p.]** Calcule la distancia del punto A al plano π.

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas verdes, 4 bolas negras y 3 bolas rojas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

a) **[0,75 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea roja.
b) **[0,75 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea verde, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.
c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32% de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

a) **[1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
b) **[1 p.]** Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

SOLUCIONES

1: [2,5 p.] La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

Llamamos "x" a la edad de Carmela, "y" a la edad de Esperanza, "z" a la edad de Aurora.

"*La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años*" → $x+y+z=68$

"*La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora*" → $x=5+\frac{y+z}{2}$

"D*entro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza*" → $z+4=y$

El sistema de ecuaciones queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=68 \\ x=5+\frac{y+z}{2} \\ z+4=y \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=68 \\ x=5+\frac{y+z}{2} \\ z+4=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=68 \\ 2x=10+y+z \\ z+4=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+(z+4)+z=68 \\ 2x=10+(z+4)+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z=64 \\ 2x-2z=14 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z=64 \\ x-z=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z=64 \\ x=7+z \end{array}\right\} \Rightarrow 7+z+2z=64 \Rightarrow 3z=57 \Rightarrow \boxed{z=\frac{57}{3}=19} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=7+19=26} \\ \boxed{y=19+4=23} \end{array}\right.$$

La edad de Carmela es 26, la de Esperanza es 23 y la de Aurora es 19.

2: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3=-I$ y calcule A^{2023}.
b) **[0,5 p.]** Calcule la inversa de A.
c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX-B^T=A^2$, donde B^T denota la matriz traspuesta de B.

a) Comprobamos que $A^3=-I$.

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+3-4 & 0-12+12 & 0-15+16 \\ 0-4+5 & 3+16-15 & 4+20-20 \\ 0+3-4 & -3-12+12 & -4-15+16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0-1 & -3+0+3 & -4+0+4 \\ 0+4-4 & 3-16+12 & 4-20+16 \\ 0-3+3 & -3+12-9 & -4+15-12 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=-I}$$

Calculamos A^{2023}.

$$\begin{array}{r|l} 2023 & 3 \\ \hline 223 & 674 \\ 13 & \\ 1 & \end{array}$$

Tenemos que $2023=3\cdot 674+1$

$$A^{2023}=A^{3\cdot 674+1}=A^{3\cdot 674}\cdot A^1=\left(A^3\right)^{674}\cdot A=\left(-I\right)^{674}\cdot A=\left(-I\right)\cdot ...674veces.....\cdot\left(-I\right)\cdot A=I\cdot A=A$$

$$\boxed{A^{2023}=A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$$

b) Comprobamos si la matriz A es invertible.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0+15+12-16-12-0=-1\neq 0$$

La matriz A es invertible.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -4 & 3\\ 4 & -5 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -4 & 3\\ 4 & -5 & 4\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -5 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & -4\\ 4 & -5\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -5 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & -1\\ -4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -4 & -4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}}$$

También se pude hacer teniendo en cuenta el apartado a).

$$A^3=-I \Rightarrow A^2\cdot A=-I \Rightarrow -A^2\cdot A=I \Rightarrow \left(-A^2\right)\cdot A=I \Rightarrow A^{-1}=-A^2$$

Como A^2 lo hemos calculado en el apartado a), tenemos que:

$$\boxed{A^{-1}=-A^2=-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -4 & -4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}}$$

c) En el apartado anterior se ha calculado la inversa de A, la utilizamos para resolver la ecuación.

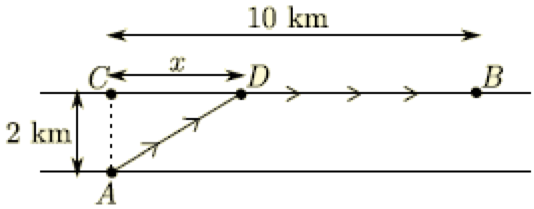
$$AX-B^T=A^2 \Rightarrow AX=B^T+A^2 \Rightarrow X=A^{-1}\left(B^T+A^2\right)$$

$$B^T+A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 5\\ -1 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -4 & -4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 5\\ -1 & -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+1 & 1+0+3 & 2+0+2\\ 0-4+4 & -1-20+12 & -2-20+8\\ 0+3-3 & 1+15-9 & 2+15-6\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 0 & -9 & -14\\ 0 & 7 & 11\end{pmatrix}}$$

3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).
Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 kilómetros de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 kilómetros del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



a) **[1 p.]** Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{10-x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.
b) **[1,5 p.]** Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

Se observa en la figura, la distancia que el triatleta debe nadar es la distancia de A a D y la distancia que debe correr es la distancia de D a B.
La distancia de A a D es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 2 y x km, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$d(A,D)=\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{x^2+4}\,km$$

Como nada a una velocidad de 4 km/h, el tiempo invertido para recorrer esa distancia es:

$$\text{velocidad} = \frac{espacio}{tiempo} \Rightarrow \text{Tiempo nadando } = \frac{espacio}{velocidad} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4}\,horas$$

Por otro lado, a partir de la figura se ve que la distancia de D a B es

$$\text{Distancia}(D,B)=10-x \quad km$$

Como corre a una velocidad de 12 km/h, el tiempo invertido para recorrer esa distancia es

$$\text{Tiempo corriendo} = \frac{espacio}{velocidad} = \frac{10-x}{12}\,horas$$

Por lo tanto, el tiempo total empleado para ir de A a B, en función de x es

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{10-x}{12}\,horas$$

b) Se trata de calcular para qué valor de x se alcanza el mínimo de la función $f(x)$, teniendo en cuenta que los valores "permitidos" de x son de 0 a 10.
Para estudiar el crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ en su dominio, estudiamos en primer lugar su derivada obteniendo sus puntos críticos (candidatos a ser extremos relativos).

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{10-x}{12}=\frac{1}{4}\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{12}(10-x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}}(\cancel{2}x)+\frac{1}{12}(-1)=\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{12}$$

Igualamos a cero la derivada

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{12}=0\Rightarrow\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{12}\Rightarrow 12x=4\sqrt{x^2+4}\Rightarrow 3x=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(3x)^2=\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2=x^2+4\Rightarrow 9x^2=x^2+4\Rightarrow 8x^2=4\Rightarrow 2x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

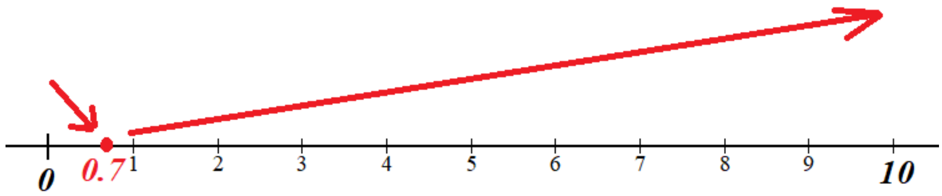
$$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0.707\,km$$

Nos quedamos solo con la raíz positiva porque no tiene sentido una distancia negativa.
Para comprobar si se trata de un mínimo, podemos hacerlo estudiando el signo de la derivada antes y después de $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0.707$

$$f'(0.5)=\frac{0.5}{4\sqrt{0.5^2+4}}-\frac{1}{12}=-0.02<0$$

$$f'(2)=\frac{2}{4\sqrt{2^2+4}}-\frac{1}{12}=0.09>0$$

Por lo que la función sigue el esquema:



La función presenta un mínimo en $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0.707$.

Para tardar el mínimo tiempo posible el triatleta debe ir nadando desde la salida en el punto A hasta el punto D situado aproximadamente a 707 metros del punto C, y a partir de ahí continuar corriendo hasta la meta situada en el punto B. El tiempo que tardaría es $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+4}}{4}+\frac{10-\frac{1}{\sqrt{2}}}{12}\simeq 1.3\,horas$.

Tardaría 1 hora y 18 minutos aproximadamente.

4: Considere la función $f(x) = x\ ln(x)$, definida para $x > 0$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.
c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función *f(x)* cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1,0)$.

a) $f(x) = x\ ln(x) \Rightarrow f'(x) = ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

Averiguamos cuando se anula la derivada para obtener sus puntos críticos.

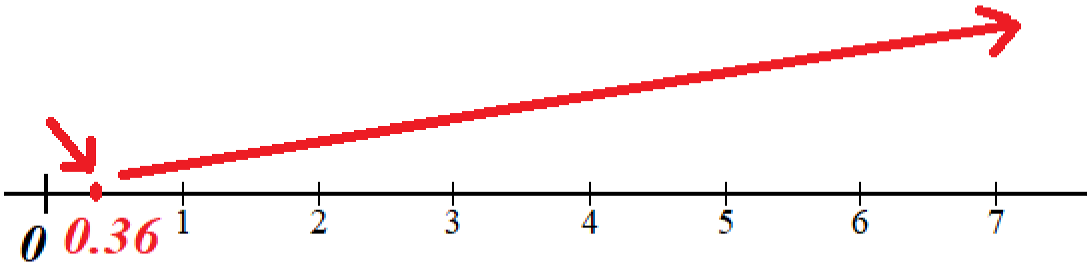
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq 0.368$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

$$f'(0.2) = \ln(0.2) + 1 = -0.6 < 0$$

$$f'(2) = \ln(2) + 1 = 1.69 > 0$$

La función sigue el esquema siguiente



La función decrece en $(0, 1/e)$ y crece en $(1/e, +\infty)$

b) Utilizamos el método de integración por partes.

$$\int f(x)dx = \int x\ ln(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x) \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \to v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C}$$

c) La primitiva es $F(x) = \int f(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$, calculada en el apartado anterior.

Sustituimos el punto $(1,0)$ en la primitiva.

$$F(1) = 0 \Rightarrow \frac{1^2}{2}\ln(1) - \frac{1^2}{4} + C = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{4}}$$

La primitiva es $\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}$

5: Considere las siguientes rectas:

$$r:\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases} x-z=0 \\ y=1 \end{cases}.$$

a) **[1,5 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

a) Obtenemos punto y vector director de cada recta.

$$r:\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{0} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(-2,3,0) \\ \overrightarrow{v_r}=(-1,1,0) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x-z=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} Q_s(0,1,0) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales, por lo que las rectas ni son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{1}\neq\frac{1}{0}\neq\frac{0}{1}$$

Comprobamos si se cortan o cruzan calculando el producto mixto de $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\left.\begin{array}{l} Q_s(0,1,0) \\ P_r(-2,3,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s}=(0,1,0)-(-2,3,0)=(2,-2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(2,-2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0+2+0-0-0-2=0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas se cortan (están en un mismo plano).

b) Hallamos la ecuación del plano que las contiene utilizando los vectores directores de las rectas que también son los directores del plano y un punto cualquiera, por ejemplo $Q_s(0,1,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} Q_s(0,1,0) \\ P_r(-2,3,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s}=(0,1,0)-(-2,3,0)=(2,-2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1) \\ Q_s(0,1,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-z-(-1)(y-1)=0 \Rightarrow \boxed{\pi:x+y-z-1=0}$$

Hallamos el ángulo que forman las rectas que es el ángulo formado por sus vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(-1,1,0)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos(r,s)=\cos\left(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{u_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u_s}\right|}=\frac{\left|(-1,1,0)(1,0,1)\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}$$

$$\cos(r,s)=\frac{|-1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow(r,s)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=60^{\circ}$$

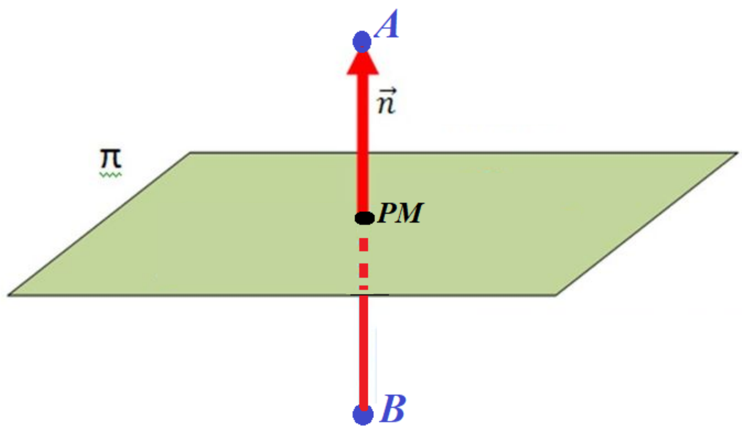
Las rectas forman un ángulo de 60º

6: Considere los puntos $A=(1,-1,\ 2)$ y $B=(3,\ 5,\ 2)$.

a) **[1,5 p.]** Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

b) **[1 p.]** Calcule la distancia del punto A al plano π.

a) La situación planteada es la del dibujo.



Hallamos el punto medio de dicho segmento. $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} A=(1,-1,\ 2) \\ B=(3,\ 5,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow PM = \frac{(1,-1,\ 2)+(3,\ 5,\ 2)}{2} = (2,2,2)$$

Como el plano es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ el vector $\overrightarrow{AB}$ es el vector normal del plano, por lo que su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{l} A=(1,-1,\ 2) \\ B=(3,\ 5,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(3,\ 5,\ 2)-(1,-1,\ 2)=(2,6,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{AB}=(2,6,0) \\ PM=(2,2,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi: 2x+6y+D=0 \\ PM=(2,2,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 4+12+D=0 \Rightarrow D=-16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: 2x+6y-16=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+3y-8=0}$$

b) Utilizamos la fórmula de distancia de un punto a un plano.

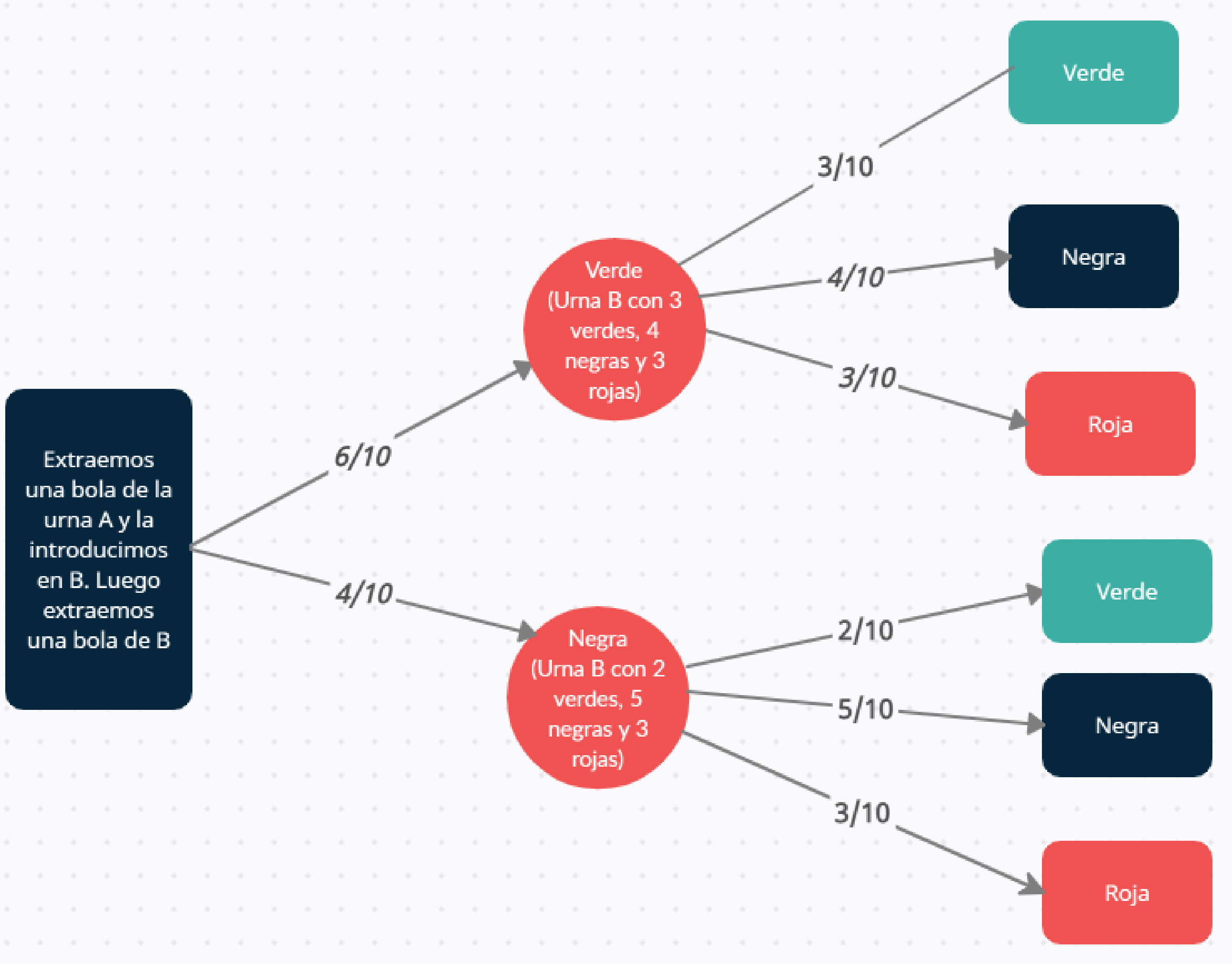
$$\left.\begin{array}{l} A=(1,-1,\ 2) \\ \pi: x+3y-8=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d(A,\pi)=\frac{|1+3(-1)-8|}{\sqrt{1^2+3^2+0^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\,u}$$

También se puede obtener esta distancia como la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=(2,6,0) \Rightarrow \boxed{d(A,\pi)=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}=\frac{\sqrt{2^2+6^2}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}\,u}$$

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas verdes, 4 bolas negras y 3 bolas rojas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:
a) **[0,75 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea roja.
b) **[0,75 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea verde, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.
c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades del experimento.



Llamamos *Va* al suceso “Sacar Verde en urna A”, *Na* al suceso “Sacar Negra en urna A, de la misma manera llamamos *Vb* a “Sacar verde en urna B”, *Nb* a “Sacar Negra en urna B” y *Rb* a “Sacar Roja en urna B”.

a) $P(Rb)=P(Va)\cdot P(Rb/Va)+P(Na)\cdot P(Rb/Na)=\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{10}=\boxed{0.3}$

b) Es una probabilidad a priori que aparece en una de las ramas del diagrama de árbol.

$$P(Vb/Va)=\frac{3}{10}=\boxed{0.3}$$

c) $P(Nb)=P(Va)\cdot P(Nb/Va)+P(Na)\cdot P(Nb/Na)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{44}{100}=\boxed{0.44}$

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32% de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

a) **[1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

b) **[1 p.]** Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

a) X = CI de un estudiante universitario

$X = N(\mu, \sigma)$

"*Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica*" → $\mu = 10\sigma$

"*El 93,32% de los estudiantes tiene un CI menor de 115*" → $P(X \leq 115) = 0.9332$

Obtenemos la ecuación que nos falta del dato de la probabilidad.

$$P(X \leq 115) = 0.9332 \Rightarrow \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{115-\mu}{\sigma}\right) = 0.9332 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{115-\mu}{\sigma}\right) = 0.9332 \Rightarrow \{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\} \Rightarrow \frac{115-\mu}{\sigma} = 1.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 115 - \mu = 1.5\sigma \Rightarrow \mu = 115 - 1.5\sigma$$

Unimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} \mu = 115 - 1.5\sigma \\ \mu = 10\sigma \end{array}\right\} \Rightarrow 115 - 1.5\sigma = 10\sigma \Rightarrow 115 = 11.5\sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{115}{11.5} = 10} \Rightarrow \boxed{\mu = 10 \cdot 10 = 100}$$

La media es 100 y la desviación típica es 10.

b) Es una variable binomial. Determinamos sus parámetros.

Y = Número de estudiantes con un CI mayor de 115

Y = B(n,p)

El número de repeticiones es *n = 5*.

Como $P(X \leq 115) = 0.9332$ entonces $p = P(X > 115) = 1 - P(X \leq 115) = 1 - 0.9332 = 0.0668$

Tenemos que la binomial es *Y = B(5, 0.0668)*

Calculamos $P(Y = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0.0668^3 \cdot (1 - 0{,}0668)^2 \simeq \boxed{0.0026}$