Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2021-2022

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} \left(a^2-1\right)x+ay+a^2z=1 \\ \left(a^2-1\right)x+\left(a+1\right)y+\left(a^2+a\right)z=2 \\ y+\left(a^2+2a\right)z=a+2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Demuestra que se cumple $|A\cdot B|=0$ para toda matriz A de dimensión 3×2, siendo B la siguiente matriz:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha\equiv 2x-y-z-1=0$, sabiendo que contiene al punto P (–1, 2, 1) y que la intersección de ambos planos es paralela a la siguiente recta:

$$r\equiv\begin{cases} x+y-2z-3=0 \\ y-z-3=0 \end{cases}$$

(2.5 puntos)

P4) Encuentra los puntos de la recta $r\equiv\begin{cases} 3x-y+z-6=0 \\ x-y+3z-8=0 \end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi\equiv 2x+2y-z-7=0$

(2.5 puntos)

P5) Sea la función $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\ln\frac{1}{x}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e},e\right]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in\left(\frac{1}{e},e\right)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) utilizado(s). y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P6) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}$$

(1.25 puntos)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\ln(x+1)-x}$$

(1.25 puntos)

P7) Sea la función $f(x)=\ln\left(\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{6}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2,4]$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(2,4)$ tal que $f(\alpha)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P8) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=x^3-3x-2 \quad \text{y} \quad g(x)=x-2$$

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} \left(a^2-1\right)x+ay+a^2z=1 \\ \left(a^2-1\right)x+\left(a+1\right)y+\left(a^2+a\right)z=2 \\ y+\left(a^2+2a\right)z=a+2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

Intentamos simplificar el sistema y obtener otro equivalente de expresión más sencilla.

$$\begin{cases} \left(a^2-1\right)x+ay+a^2z=1 \\ \left(a^2-1\right)x+\left(a+1\right)y+\left(a^2+a\right)z=2 \\ y+\left(a^2+2a\right)z=a+2 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{Ecuación\,2^{a}-Ecuación\,1^{a}} \\ \left(a^2-1\right)x & +\left(a+1\right)y & +\left(a^2+a\right)z & =2 \\ -\left(a^2-1\right)x & -ay & -a^2z & =-1 \\ \hline 0 & y & +az & =1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(a^2-1\right)x+ay+a^2z=1 \\ y+az=1 \\ y+\left(a^2+2a\right)z=a+2 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{Ecuación\,3^{a}-Ecuación\,2^{a}} \\ y & +\left(a^2+2a\right)z & = & a+2 \\ -y & -az & = & -1 \\ \hline 0 & \left(a^2+a\right)z & = & a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(a^2-1\right)x+ay+a^2z=1 \\ y+az=1 \\ \left(a^2+a\right)z=a+1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a^2-1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2+a \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} a^2-1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2+a \end{vmatrix}=\left(a^2-1\right)\left(a^2+a\right)$$

Comprobamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow (a^2-1)(a^2+a)=0 \Rightarrow (a+1)(a-1)a(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=-1} \\ \boxed{a=0} \\ a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

Estudiamos por separado cuatro casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0; a \neq 1 \ y \ a \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

Como $a \neq 0; a \neq 1 \ y \ a \neq -1$ entonces $a \neq 0; a-1 \neq 0 \ y \ a+1 \neq 0$ y podemos resolverlo.

$$\begin{cases} (a^2-1)x+ay+a^2z=1 \\ y+az=1 \\ (a^2+a)z=a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^2-1)x+ay+a^2z=1 \\ y+az=1 \\ \boxed{z=\frac{a+1}{a^2+a}=\frac{a+1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^2-1)x+ay+a^2\frac{1}{a}=1 \\ y+a\frac{1}{a}=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a^2-1)x+ay+a=1 \\ y+1=1 \rightarrow \boxed{y=0} \end{cases} \Rightarrow (a^2-1)x+a\cdot 0+a=1 \Rightarrow (a^2-1)x=1-a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{1-a}{a^2-1}=\frac{-(a-1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{-1}{a+1}}$$

La solución es $x=\frac{-1}{a+1};\ y=0;\ z=\frac{1}{a}$

CASO 2. $a=0$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda $\begin{cases} -x=1 \\ y=1 \\ 0=1 \end{cases} \Rightarrow$ *¡Igualdad imposible!*

El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a=1$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda $\begin{cases} y+z=1 \\ y+z=1 \\ 2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ \boxed{z=1} \end{cases} \Rightarrow y+1=1 \Rightarrow \boxed{y=0}$

El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son $x=t;\ y=0;\ z=1;\ t \in \mathbb{R}$

CASO 4. $a=-1$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda $\begin{cases} -y+z=1 \\ y-z=1 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+z=1 \\ y=1+z \end{cases} \Rightarrow -1-z+z=1 \Rightarrow -1=1$ ¡*Igualdad imposible*!

El sistema es incompatible.

P2) Demuestra que se cumple $|A\cdot B|=0$ para toda matriz A de dimensión 3×2, siendo B la siguiente matriz:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Si $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}$ tenemos que:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & a+2b\\ c & d & c+2d\\ e & f & e+2f\end{pmatrix}$$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}a & b & a+2b\\ c & d & c+2d\\ e & f & e+2f\end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}Columna\,3^{a}-Columna\,1^{a}-2\cdot Columna\,2^{a}\\ \text{El determinante no cambia de valor}\end{array}\right\}=$$

$$=\begin{vmatrix}a & b & 0\\ c & d & 0\\ e & f & 0\end{vmatrix}=\{\text{Una columna con todo ceros}\}=\boxed{0}$$

P3) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$, sabiendo que contiene al punto P (–1, 2, 1) y que la intersección de ambos planos es paralela a la siguiente recta:

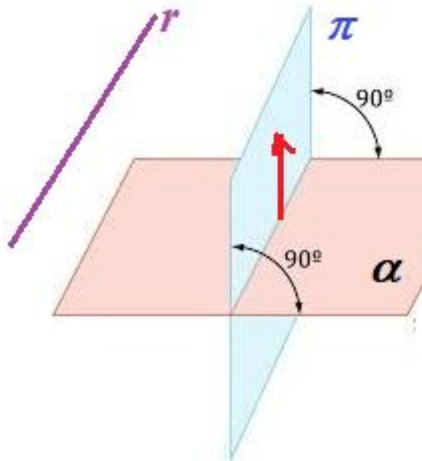
$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

(2.5 puntos)

Hallamos el vector director de la recta *r*.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y = z + 3 \end{cases} \Rightarrow x + z + 3 - 2z - 3 = 0 \Rightarrow x = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \\ P_r\,(0,3,0) \end{cases}$$



El plano π que nos piden hallar tiene como vector director el normal del plano α y su otro vector director es el vector director de la recta.

$$\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2,-1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2,-1,-1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \\ P(-1,2,1) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cancel{x} - 1 - y + \cancel{2} + 2z - \cancel{2} + z - 1 - 2y + 4 + \cancel{x} + 1 = 0 \Rightarrow -3y + 3z + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv y - z - 1 = 0}$$

P4) Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x-y+z-6=0 \\ x-y+3z-8=0 \end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi \equiv 2x+2y-z-7=0$

(2.5 puntos)

El centro de la esfera de radio 3 tangente al plano está a una distancia 3 del plano.
El problema se reduce a determinar que puntos de la recta r están a distancia 3 del plano π.

Pasamos la ecuación implícita de la recta a ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} 3x-y+z-6=0 \\ x-y+3z-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y+z-6=0 \\ -x+y-3z+8=0 \end{cases}$$
$$\overline{2x \qquad -2z+2=0}$$

$$\Rightarrow 2x-2z+2=0 \Rightarrow x-z+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1+z} \Rightarrow 3(-1+z)-y+z-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3+3z-y+z-6=0 \Rightarrow -y+4z-9=0 \Rightarrow \boxed{y=-9+4z} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1+t \\ y=-9+4t \\ z=t \end{cases}$$

Un punto A genérico de la recta tiene coordenadas $A(-1+t,-9+4t,t)$.

Determinamos la expresión de la distancia de A al plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+2y-z-7=0 \\ A(-1+t,-9+4t,t) \end{array}\right\} \Rightarrow d(A,\pi) = \frac{|2(-1+t)+2(-9+4t)-t-7|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A,\pi) = \frac{|-2+2t-18+8t-t-7|}{\sqrt{9}} = \frac{|9t-27|}{3}$$

Igualamos esta distancia a 3.

$$d(A,\pi)=3 \Rightarrow \frac{|9t-27|}{3}=3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9t-27}{3}=3 \rightarrow 9t-27=9 \rightarrow 9t=36 \rightarrow t=4 \\ \dfrac{9t-27}{3}=-3 \rightarrow 9t-27=-9 \rightarrow 9t=18 \rightarrow t=2 \end{cases}$$

$$Si\, t=4 \Rightarrow A(-1+4,-9+16,4) \Rightarrow \boxed{A(3,7,4)}$$

$$Si\, t=2 \Rightarrow A(-1+2,-9+8,2) \Rightarrow \boxed{A(1,-1,2)}$$

Los dos puntos buscados son A(3, 7, 4) y B(1, –1, 2)

P5) Sea la función $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\ln\frac{1}{x}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e},e\right]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in\left(\frac{1}{e},e\right)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) utilizado(s). y justifica su uso.

(1.75 puntos)

a) Si $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ entonces existe $\frac{1}{x}$, además $\frac{1}{x}>0$, por lo que existe $\ln\frac{1}{x}$.
Como la función *f(x)* es composición de funciones continuas la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e},e\right]$.

b) Comprobamos que la función es derivable y que su derivada es continua.

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\ln\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}(\ln 1-\ln x)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}(-\ln x)\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\ln x\right)$$

$$f'(x)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\ln x\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{4x}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\ln x\right)$$

Esta función derivada también es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e},e\right]$

Calculamos el valor de la derivada en los extremos del intervalo.

$$f'\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{\pi}{4\frac{1}{e}}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\ln\frac{1}{e}\right)=-\frac{\pi e}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi e}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi e\sqrt{2}}{8}$$

$$f'(e)=-\frac{\pi}{4e}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\ln e\right)=-\frac{\pi}{4e}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4e}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi\sqrt{2}}{8e}$$

Comprobamos que $\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$ está comprendido entre estos dos valores.

$$¿-\frac{\pi e\sqrt{2}}{8}<\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}<-\frac{\pi\sqrt{2}}{8e}?$$

$$¿-\frac{\pi e}{8}<\frac{e}{1-e^2}<-\frac{\pi}{8e}?$$

$$¿-1.0675<-0.425<-0.1444?$$

Es cierto y por tanto se cumplen las condiciones del teorema de Darboux o de los valores intermedios.

$f'(x) = -\frac{\pi}{4x}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\ln x\right)$ es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} < f'(e)$$

Aplicando el teorema de los valores intermedios existe $\alpha \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$

P6) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} \qquad (1.25 \text{ puntos})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\ln(x+1)-x} \qquad (1.25 \text{ puntos})$$

Primer límite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} = 1^{+\infty} = Indeterminación(n^o\, e) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2}{x^2+x-1}-1\right)^{2x-1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2-x^2-x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{2x-1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{(2x-1)\frac{x^2+x-1}{-x+1}\cdot\frac{-x+1}{x^2+x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{(2x-1)\cdot\frac{-x+1}{x^2+x-1}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}(2x-1)\cdot\frac{-x+1}{x^2+x-1}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+2x+x-1}{x^2+x-1}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1}} = \boxed{e^{-2}}$$

Segundo límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\ln(x+1)-x} = \frac{\left(e^0-1\right)^2}{\ln(0+1)-0} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L\'{}Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^x-1\right)e^x}{\frac{1}{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2e^x}{\frac{1-x-1}{x+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2e^x}{\frac{-x}{x+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(2e^{2x}-2e^x\right)(x+1)}{-x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{2x}-2xe^x+2e^{2x}-2e^x}{-x} = \frac{0-0+2e^0-2e^0}{-0} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L\'{}Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2x2e^{2x}-2e^x-2xe^x+4e^{2x}-2e^x}{-1} = \lim_{x\to 0}\frac{6e^{2x}+4xe^{2x}-2xe^x-4e^x}{-1} =$$

$$= \frac{6e^0+0-0-4e^0}{-1} = \frac{6-4}{-1} = \boxed{-2}$$

P7) Sea la función $f(x)=\ln\left(\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{6}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2,4]$. (1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(2,4)$ tal que $f(\alpha)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.5 puntos)

a) Comprobamos que siendo $x\in[2,4]$ el valor de $\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{6}$ es positivo y por tanto existe $\ln\left(\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{6}\right)$.

$$Si\; x\in[2,4]\Rightarrow 2\le x\le 4\Rightarrow \frac{2\pi}{6}\le\frac{\pi x}{6}\le\frac{\pi 4}{6}\Rightarrow 60^{\circ}=\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi x}{6}\le\frac{2\pi}{3}=120^{\circ}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} Si\;60^{\circ}\le\frac{\pi x}{6}\le 90^{\circ}\to\sin\frac{\pi x}{6}>\cos\frac{\pi x}{6}\to\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{6}>0 \\ Si\;90^{\circ}<\frac{\pi x}{6}\le 120^{\circ}\to\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{6}<0\\ \sin\frac{\pi x}{6}>0\end{cases}\to\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{6}>0\end{cases}$$

Por lo tanto, en el intervalo $[2,4]$ está definido $\ln\left(\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{6}\right)$ y existe $f(x)$.

Además la función es continua pues es composición de funciones continuas.

b) Aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x)=\ln\left(\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{6}\right)$ en el intervalo $[2,4]$.

Se cumplen las condiciones exigidas en el teorema: $f(x)$ es continua en $[2,4]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo.

$$f(2)=\ln\left(\sin\frac{\pi 2}{6}-\cos\frac{\pi 2}{6}\right)=\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}\right)\simeq -0.148<0$$

$$f(4)=\ln\left(\sin\frac{\pi 4}{6}-\cos\frac{\pi 4}{6}\right)=\ln\left(\sin\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}\right)\simeq 0.311>0$$

Según el teorema de Bolzano existe $\alpha\in(2,4)$ tal que $f(\alpha)=0$.

P8) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones:
$f(x)=x^3-3x-2$ y $g(x)=x-2$ (2.5 puntos)

Averiguamos los puntos de intersección de las dos gráficas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^3-3x-2=x-2\Rightarrow x^3-4x=0\Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x^2-4=0\to x^2=4\to x=\sqrt{4}=\pm 2\end{cases}$$

Como coinciden en tres puntos el área de la región que encierran la calculamos con dos integrales definidas, una entre –2 y 0 y la otra entre 0 y 2.

$$\acute{A}rea\,1=\left|\int_{-2}^{0} f(x)-g(x)dx\right|=\left|\int_{-2}^{0} x^3-3x-2-(x-2)dx\right|=\left|\int_{-2}^{0} x^3-3x-2-x+2dx\right|=$$

$$=\left|\int_{-2}^{0} x^3-4xdx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}\right|=\left|\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-2(-2)^2\right]\right|=\left|-(4-8)\right|=\boxed{4u^2}$$

$$\acute{A}rea\,2=\left|\int_{0}^{2} f(x)-g(x)dx\right|=\left|\int_{0}^{2} x^3-4xdx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{2^4}{4}-2\cdot 2^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right]\right|=\left|4-8\right|=\boxed{4u^2}$$

El área de la región del plano limitada por las dos gráficas es igual a la suma de las áreas calculadas y tenemos que vale $4+4=8\,u^2$. Dibujamos las gráficas y la región limitada por ellas.