Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2021-2022

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x+\left(a^2-2a\right)y-z=-a^2 \\ x+\left(a^2-4\right)y+\left(2a-3\right)z=-a^2-2a \\ x+\left(a^2-4a+4\right)y+\left(a^2-2a\right)z=-a^2+a-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26}+A^{25}$ es matriz singular, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $T\equiv\left(1,-5,3\right)$ y corta a las siguientes rectas:

$$r\equiv\begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv\frac{x}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{1}$$

(2.5 puntos)

P4) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P\equiv\left(1,2,-1\right)$, es paralela al plano $\pi\equiv 2x-y+z=0$ y corta a la recta:

$$r\equiv\begin{cases} x-y+2z+2=0 \\ 3x-y-z-3=0 \end{cases}$$

(2.5 puntos)

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$$

(1.25 puntos)

$$\int (3-2x)e^{-2x}dx$$

(1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x)=e^{\frac{1}{\sin x+\cos x}}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0,\pi]$

(0.75 puntos)

b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo.

(1.75 puntos)

P7) Se considera la función $f(x)=\dfrac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2,-1]$.

(0.75 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-2,-1)$ tal que $f\,'(\alpha)=e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=2-|x| \quad \text{y} \quad g(x)=x^2-10$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x+\left(a^2-2a\right)y-z=-a^2 \\ x+\left(a^2-4\right)y+\left(2a-3\right)z=-a^2-2a \\ x+\left(a^2-4a+4\right)y+\left(a^2-2a\right)z=-a^2+a-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 & -a^2-2a \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a & -a^2+a-1 \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 & -a^2-2a \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a & -a^2+a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2ª} - \text{Fila 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 1 & a^2-4 & 2a-3 & -a^2-2a \\ -1 & -a^2+2a & 1 & a^2 \\ \hline 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a \end{array} \to \text{Nueva fila 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3ª} - \text{Fila 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a & -a^2+a-1 \\ -1 & -a^2+2a & 1 & a^2 \\ \hline 0 & -2a+4 & a^2-2a+1 & a-1 \end{array} \to \text{Nueva fila 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a \\ 0 & -2a+4 & a^2-2a+1 & a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3ª + Fila 2ª} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -2a+4 & a^2-2a+1 & a-1 \\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a \\ \hline 0 & 0 & a^2-1 & -a-1 \end{array} \to \text{Nueva fila 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a \\ 0 & 0 & a^2-1 & -a-1 \end{pmatrix}$$

La nueva matriz de coeficientes tiene determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a^2-2a & -1 \\ 0 & 2a-4 & 2a-2 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix}=(2a-4)\left(a^2-1\right)=2(a-2)(a-1)(a+1)$$

Vemos cuando se anula. $|A| = 0 \Rightarrow 2(a-2)(a-1)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1, \quad a \neq 2 \quad y \quad a \neq -1$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido por Gauss anteriormente.

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a \\ 0 & 0 & a^2-1 & -a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+\left(a^2-2a\right)y-z=-a^2 \\ (2a-4)y+\left(2a-2\right)z=-2a \\ \left(a^2-1\right)z=-a-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+\left(a^2-2a\right)y-z=-a^2 \\ 2(a-2)y+2\left(a-1\right)z=-2a \\ \left(a-1\right)\left(a+1\right)z=-\left(a+1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{a+1 \text{ es no nulo}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+\left(a^2-2a\right)y-z=-a^2 \\ 2(a-2)y+2\left(a-1\right)z=-2a \\ \left(a-1\right)z=-1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+\left(a^2-2a\right)y-z=-a^2 \\ (a-2)y+\left(a-1\right)z=-a \\ \boxed{z=\dfrac{-1}{a-1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+\left(a^2-2a\right)y-\dfrac{-1}{a-1}=-a^2 \\ (a-2)y+\cancel{\left(a-1\right)}\dfrac{-1}{\cancel{a-1}}=-a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+\left(a^2-2a\right)y+\dfrac{1}{a-1}=-a^2 \\ (a-2)y-1=-a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+\left(a^2-2a\right)y=-a^2-\dfrac{1}{a-1} \\ (a-2)y=-a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+\left(a^2-2a\right)y=\dfrac{-a^3+a^2-1}{a-1} \\ \boxed{y=\dfrac{-a+1}{a-2}} \end{array}\right\} \Rightarrow x+\left(a^2-2a\right)\frac{-a+1}{a-2}=\frac{-a^3+a^2-1}{a-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+a\cancel{\left(a-2\right)}\frac{-a+1}{\cancel{a-2}}=\frac{-a^3+a^2-1}{a-1} \Rightarrow x+a\left(-a+1\right)=\frac{-a^3+a^2-1}{a-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-a^3+a^2-1}{a-1}-a\left(-a+1\right)=\frac{-a^3+a^2-1+a\left(a-1\right)^2}{a-1}=\frac{-a^3+a^2-1+a\left(a^2+1-2a\right)}{a-1}$$

$$\boxed{x=\frac{-\cancel{a^3}+a^2-1+\cancel{a^3}+a-2a^2}{a-1}=\frac{-a^2+a-1}{a-1}}$$

La solución es $x=\dfrac{-a^2+a-1}{a-1}, \quad y=\dfrac{-a+1}{a-2}, \quad z=\dfrac{-1}{a-1}$

CASO 2. $a=1$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBLIDAD DEL SISTEMA
El sistema equivalente triangular queda:

$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-1\\ -2y \quad =-2\\ 0=-2\end{array}\right\}$ La última ecuación plantea una igualdad imposible.

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a=2$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 3 & -3\end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBLIDAD DEL SISTEMA
El sistema equivalente triangular queda:

$$\left.\begin{array}{r} x-z=-4\\ z=-2\\ 3z=-3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-z=-4\\ z=-2\\ z=-1\end{array}\right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 4. $a=-1$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -1\\ 0 & -3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Y la matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

por lo que el rango de A es 2, el de la ampliada también 2 y es menor que el número de incógnitas. Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos. El sistema equivalente triangular queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-z=-1 \\ -3y-2z=1 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=-1+z \\ -3y=1+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=-1+z \\ \boxed{y=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}z} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}z\right)=-1+z \Rightarrow x-1-2z=-1+z \Rightarrow \boxed{x=3z}$$

La solución es $x=3t;\ y=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t;\ z=t;\quad t\in\mathbb{R}$

P2) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26}+A^{25}$ es matriz singular, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Calculamos la expresión del determinante de $A^{26}+A^{25}$.

$$A^{26}+A^{25}=A^{25}(A+I)\Rightarrow\left|A^{26}+A^{25}\right|=\left|A^{25}\right|\left|A+I\right|=\left|A\right|^{25}\left|A+I\right|$$

Como $|A|=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}=1$ tenemos que $\left|A^{26}+A^{25}\right|=|A|^{25}\left|A+I\right|=1^{25}\left|A+I\right|=\left|A+I\right|$

Para que la matriz $A^{26}+A^{25}$ sea singular su determinante debe ser nulo y para ello debe serlo el determinante de $A+I$.

$$A+I=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

$$\left|A+I\right|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix}=t+1$$

$$\left|A+I\right|=0\Rightarrow t+1=0\Rightarrow \boxed{t=-1}$$

El valor buscado es $t=-1$.

P3) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $T \equiv (1,-5,3)$ y corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

(2.5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ z=10-3x \end{cases} \Rightarrow -x-y-10+3x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-y-7=0 \Rightarrow 2x-7=y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=-7+2t \\ z=10-3t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,2,-3) \\ P_r(0,-7,10) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(-2,-1,1) \\ Q_s(0,-1,2) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,-3) \\ \overrightarrow{v_s}=(-2,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-3}{1}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y el vector $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-2,2)-(0,-7,10) = (0,5,-8)$$

$$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 8+0+30-0-32-5 = 1 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

La recta t que nos piden que hallemos pasa por $T \equiv (1,-5,3)$ y no conocemos su vector director $\overrightarrow{w_t} = (a,b,c)$.

Las rectas r y t se cortan por lo que los vectores $\overrightarrow{w_t}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{P_rT}$ deben tener producto mixto nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{w_t}=(a,b,c) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,2,-3) \\ \overrightarrow{P_rT}=(1,-5,3)-(0,-7,10)=(1,2,-7) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{w_t}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{P_rT}\right]=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14a-3b+2c-2c+7b+6a=0 \Rightarrow -8a+4b=0 \Rightarrow -2a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=2a}$$

Las rectas *s y t* se cortan por lo que los vectores $\overrightarrow{w_t}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{Q_sT}$ deben tener producto mixto nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{w_t}=(a,b,c)\\ \overrightarrow{v_s}=(-2,-1,1)\\ \overrightarrow{Q_sT}=(1,-5,3)-(0,-1,2)=(1,-4,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{w_t},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{Q_sT}\right]=0\Rightarrow\begin{vmatrix}a & b & c\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a+b+8c+c+2b+4a=0\Rightarrow 3a+3b+9c=0\Rightarrow \boxed{a+b+3c=0}$$

Sustituimos *b* por *2a*.

$$\left.\begin{array}{l}a+b+3c=0\\ b=2a\end{array}\right\}\Rightarrow a+2a+3c=0\Rightarrow 3c=-3a\Rightarrow \boxed{c=-a}$$

El vector director de la recta *t* queda $\overrightarrow{w_t}=(a,2a,-a)$, por lo que tomando *a = 1* un vector director sería $\overrightarrow{w_t}=(1,2,-1)$.
Escribimos la ecuación continua de la recta *t.*

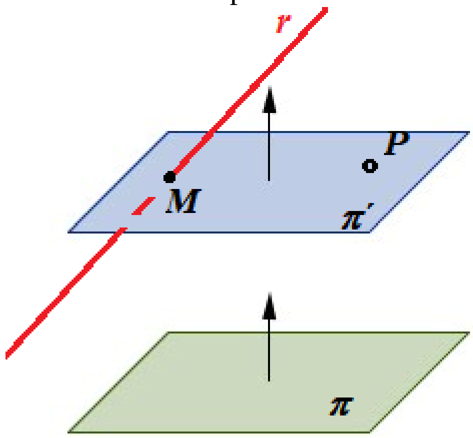
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{w_t}=(1,2,-1)\\ T\equiv(1,-5,3)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{t\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}}$$

P4) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P\equiv(1,2,-1)$, es paralela al plano $\pi\equiv 2x-y+z=0$ y corta a la recta:

$$r\equiv\begin{cases}x-y+2z+2=0\\3x-y-z-3=0\end{cases}$$

(2.5 puntos)

Hacemos un dibujo descriptivo de la situación planteada.



Hallamos el plano π´ paralelo a π que pasa por el punto P. Al ser un plano paralelo solo cambia el término independiente D.

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv 2x-y+z=0\\ \pi//\pi'\\ P(1,2,-1)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi'\equiv 2x-y+z+D=0\\ P(1,2,-1)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow 2-2-1+D=0\Rightarrow D=1\Rightarrow\boxed{\pi'\equiv 2x-y+z+1=0}$$

Hallamos el punto M de corte del plano π´ con la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l}r\equiv\begin{cases}x-y+2z+2=0\\3x-y-z-3=0\end{cases}\\ \pi'\equiv 2x-y+z+1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x-y+2z+2=0\\3x-y-z-3=0\\2x-y+z+1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{\text{Ecuacicón }2^a-3\cdot\text{Ecuación }1^a}\\ 3x & -y & -z & -3=0\\ -3x & +3y & -6z & -6=0\\ \hline 0 & 2y & -7z & -9=0\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{\text{Ecuacicón }3^a-2\cdot\text{Ecuación }1^a}\\ 2x & -y & +z & +1=0\\ -2x & +2y & -4z & -4=0\\ \hline 0 & y & -3z & -3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y+2z+2=0\\2y-7z-9=0\\y-3z-3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{2\cdot\text{Ecuacicón }3^a-\text{Ecuación }2^a}\\ 2y & -6z & -6 & =0\\ -2y & +7z & +9 & =0\\ \hline 0 & z & +3 & =0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y+2z+2=0\\2y-7z-9=0\\z+3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y+2z+2=0\\2y-7z-9=0\\\boxed{z=-3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y-6+2=0\\2y+21-9=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y=4\\2y=-12\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=4 \\ \boxed{y=\frac{-12}{2}=-6} \end{array}\right\} \Rightarrow x+6=4 \Rightarrow \boxed{x=-2} \Rightarrow \boxed{M\left(-2,-6,-3\right)}$$

La recta s que buscamos pasa por el punto $P \equiv (1,2,-1)$ y el punto $M\left(-2,-6,-3\right)$

$$\left.\begin{array}{l} P \equiv (1,2,-1) \\ M\left(-2,-6,-3\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = (-2,-6,-3)-(1,2,-1) = (-3,-8,-2)$$

$$s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = -\overrightarrow{PM} = (3,8,2) \\ P \equiv (1,2,-1) \in s \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{s: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+1}{2}}$$

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$$

(1.25 puntos)

$$\int (3-2x)e^{-2x}dx$$

(1.25 puntos)

Primera integral

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x-1} = t \Rightarrow x-1 = t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 1+t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{\cancel{2}\,\cancel{t}dt}{\cancel{2}\left(1+t^2\right)\cancel{t}} = \int \frac{1}{1+t^2}dt = arctgt = \boxed{arctg\left(\sqrt{x-1}\right)+K}$$

Segunda integral

$$\int (3-2x)e^{-2x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 3-2x \to du = -2dx \\ dv = e^{-2x}dx \to v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int (-2)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right\} =$$

$$= (3-2x)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}(-2)dx = -\frac{3}{2}e^{-2x} + xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int (-2)e^{-2x}dx =$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-2x} + xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} = \boxed{-e^{-2x} + xe^{-2x} + K}$$

P6) Se considera la función $f(x)=e^{\frac{1}{\sin x+\cos x}}$.
a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0,\pi]$ (0.75 puntos)
b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo. (2.5 puntos)

a) La función es composición de funciones continuas, el único problema es comprobar cuando se anula el denominador y si eso ocurre en el intervalo $[0,\pi]$.

$$\sin x+\cos x=0 \Rightarrow \sin x=-\cos x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ángulo del 2º o 4º cuadrante} \\ \text{en la bisectriz de dichos cuadrantes}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}\in[0,\pi] \\ x=\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{4}\notin[0,\pi] \end{cases}$$

La función no está definida en $x=\dfrac{3\pi}{4}$

La función es continua en $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$

b)

$$f(x)=e^{\frac{1}{\sin x+\cos x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{0-(\cos x-senx)}{(\sin x+\cos x)^2}\cdot e^{\frac{1}{\sin x+\cos x}}=\frac{-\cos x+senx}{(\sin x+\cos x)^2}\cdot e^{\frac{1}{\sin x+\cos x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-\cos x+senx}{(\sin x+\cos x)^2}\cdot e^{\frac{1}{\sin x+\cos x}}=0 \Rightarrow -\cos x+senx=0 \Rightarrow senx=\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}\in[0,\pi] \\ x=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}\notin[0,\pi] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada entre $x = 0$ y $x=\dfrac{\pi}{4}$, entre $x=\dfrac{\pi}{4}$ y $x=\dfrac{3\pi}{4}$, y por último entre $x=\dfrac{3\pi}{4}$ y $x=\pi$.

- En el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ tomamos $x=\dfrac{\pi}{8}$ y la derivada vale

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{-\cos\frac{\pi}{8}+sen\frac{\pi}{8}}{\left(\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}\cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}}}<0$$. La función decrece en $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

- En el intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ tomamos $x=\frac{\pi}{2}$ y la derivada vale

$f´\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\cos\frac{\pi}{2}+sen\frac{\pi}{2}}{\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}\cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}}}>0$. La función crece en $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

- En el intervalo $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ tomamos $x=\frac{7\pi}{8}$ y la derivada vale

$f´\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\frac{-\cos\frac{7\pi}{8}+sen\frac{7\pi}{8}}{\left(\sin\frac{7\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)^2}\cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{7\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}}}<0$. La función decrece en $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

La función presenta un mínimo relativo en $x=\frac{\pi}{4}$. Como $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}}=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\simeq 2.03$

Las coordenadas del mínimo relativo son $\left(\frac{\pi}{4},e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$

.

P7) Se considera la función $f(x)=\dfrac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2,-1]$.

(0.75 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha\in(-2,-1)$ tal que $f\,'(\alpha)=e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

a) La función es composición de funciones continuas. El único problema es en *x = 0* que se anula el denominador del exponente, pero $0\notin[-2,-1]$.

La función es continua en $[-2,-1]$

b) Utilizando el teorema de los valores intermedios (Teorema de Darboux):

Sea f continua en $[a,b]$ y sea *m* tal que $f(a)<m<f(b)$ entonces existe un valor $c\in[a,b]$ tal que *f(c) = m.*

$$f\,'(x)=\frac{2xe^{x^2-2}x-e^{x^2-2}}{x^2}=\frac{2x^2e^{x^2-2}-e^{x^2-2}}{x^2}=\frac{\left(2x^2-1\right)e^{x^2-2}}{x^2}$$

Consideramos la función $f\,'(x)=\dfrac{\left(2x^2-1\right)e^{x^2-2}}{x^2}$ se cumple que es continua en $[-2,-1]$

Como $f\,'(-1)=\dfrac{\left(2(-1)^2-1\right)e^{(-1)^2-2}}{(-1)^2}=e^{-1}\simeq 0.368$ y $f\,'(-2)=\dfrac{\left(2(-2)^2-1\right)e^{(-2)^2-2}}{(-2)^2}=\dfrac{7e^2}{4}\simeq 12.93$.

Tenemos que $f\,'(-1)\simeq 0.368<e\simeq 2.72<f\,'(-2)\simeq 12.93$.

Aplicando el teorema de los valores intermedios existe $c\in(-2,-1)$ tal que $f\,'(c)=e$

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=2-|x| \quad \text{y} \quad g(x)=x^2-10$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 2-|x|=x^2-10\Rightarrow\begin{cases}2-x=x^2-10 \; si \;\; x>0\to x^2+x-12=0\\ o\\ 2+x=x^2-10 \; si \;\; x<0\to x^2-x-12=0\end{cases}$$

$$1^a\, opción\ (x>0)\to x^2+x-12=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-12)}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}\frac{-1+7}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{-1-7}{2}=-4<0.\text{ No vale}\end{cases}$$

$$2^a\, opción\,(x<0)\to x^2-x-12=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-12)}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}=\begin{cases}\frac{1+7}{2}=4>0.\text{ No vale}\\ \frac{1-7}{2}=\boxed{-3=x}\end{cases}$$

El área se encuentra entre $x = -3$ y $x = 3$. Dividimos su cálculo en dos partes pues la función valor absoluto cambia de definición en $x = 0$.

$$Área\ 1=\left|\int_{-3}^{0} f(x)-g(x)\,dx\right|=\left|\int_{-3}^{0}(2+x)-(x^2-10)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_{-3}^{0}-x^2+x+12dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+12x\right]_{-3}^{0}\right|=\left|\left[-\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}+12\cdot 0\right]-\left[-\frac{(-3)^3}{3}+\frac{(-3)^2}{2}+12(-3)\right]\right|=$$

$$=\left|-9-\frac{9}{2}+36\right|=\boxed{22.5u^2}$$

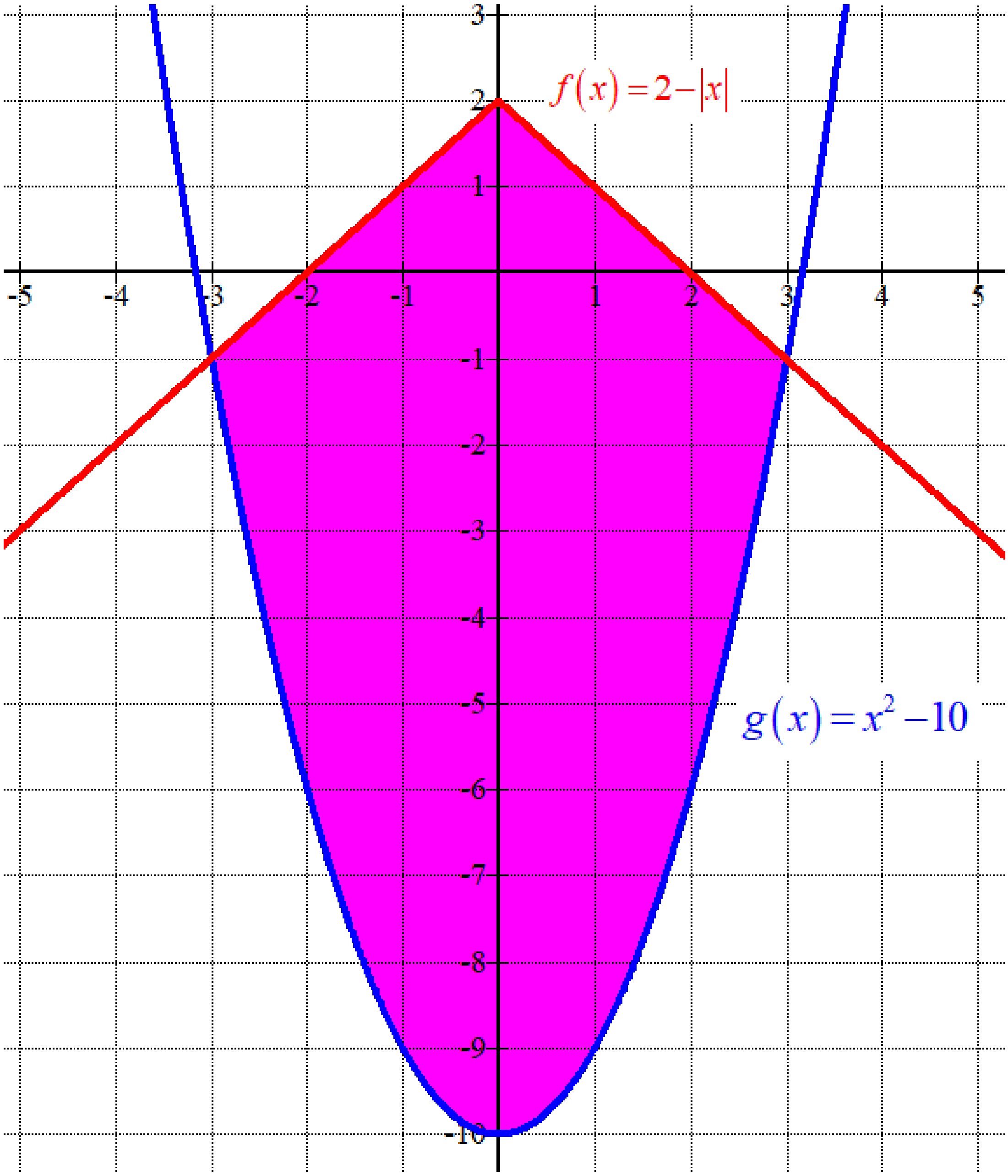
$$Área\ 2=\left|\int_{0}^{3} f(x)-g(x)\,dx\right|=\left|\int_{0}^{3}(2-x)-(x^2-10)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_{0}^{3}-x^2-x+12dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+12x\right]_{0}^{3}\right|=\left|\left[-\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}+12\cdot 3\right]-\left[-\frac{0^3}{3}-\frac{0^2}{2}+12\cdot 0\right]\right|=$$

$$=\left|-9-\frac{9}{2}+36\right|=\boxed{22.5u^2}$$

Sale el mismo valor de área ya que las funciones son simétricas.

Área total = 45 u^2



$f(x)=2-|x|$
$g(x)=x^2-10$
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10