PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA. CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)
c) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
d) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

a) **(1.5 puntos)** Determine la matriz X que verifica $A\cdot X+B=A^2\cdot C$.

b) **(1 punto)** Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que

$$A\cdot P^t+C=C\cdot(Q\cdot B)$$

EJERCICIO 2

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y-2x\leq 7;\quad -x+3y\leq 21;\quad x+2y\leq 19;\quad x+y\leq 14$$

a) **(1.4 puntos)** Represente dicho recinto y determine sus vértices.

b) **(0.6 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=x+4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

c) **(0.5 puntos)** ¿Podrá tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1 punto)** Se considera la función $f(x)=x^3+bx^2+cx-1$, donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x=\frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto (–2, –3).

b) **(1.5 puntos)** Dada la función $g(x)=-x^3-x^2+x+1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dado por la siguiente función:

$$B(x)=-0.02x^2+1.3x-15,\quad x\geq 0$$

a) **(0.75 puntos)** Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.

b) **(0.5 puntos)** ¿Para qué valores de x la finca no tiene pérdidas?
c) **(0.5 puntos)** ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?
d) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000 €?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60 % procedían de la universidad A, el 30 % de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0.4 y para un estudiante de B es 0.5.
a) (1.5 puntos) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0.395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

.

EJERCICIO 6

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que:

$$P(A\cup B)=\frac{3}{7},\ P(A^C)=\frac{5}{7},\ P(B^C)=\frac{2}{3}$$

a) **(1 punto)** ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

b) **(0.75 puntos)** Calcule $P(A^C\cap B^C)$.

c) **(0.75 puntos)** Calcule $P(B/A^C)$.

BLOQUE D

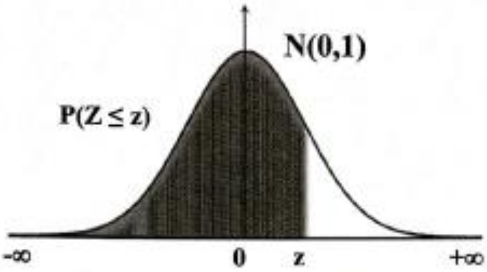
EJERCICIO 7

Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1500 tornillos, resultando que 1425 cumplen las especificaciones del fabricante.
a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97%.
b) **(1 punto)** Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

EJERCICIO 8

El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.
a) **(1 punto)** Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8.1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la media poblacional.
b) **(1 punto)** Con un nivel de confianza del 92%, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.
c) **(1 punto)** Suponiendo $\mu = 7.61 días$ y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria *Z* , con distribución N(0,1), esté por debajo del valor *z* .

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

a) **(1.5 puntos)** Determine la matriz X que verifica $A\cdot X+B=A^2\cdot C$.

b) **(1 punto)** Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que $A\cdot P^t+C=C\cdot(Q\cdot B)$

a) Despejamos la matriz X en la ecuación matricial.

$$A\cdot X+B=A^2\cdot C\Rightarrow A\cdot X=A^2\cdot C-B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot A\cdot A\cdot C-A^{-1}\cdot B\Rightarrow \boxed{X=A\cdot C-A^{-1}\cdot B}$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=+4-2+1=3\neq 0\rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & -1 & -5\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Sustituimos las matrices y calculamos la matriz X.

$$X=A\cdot C-A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & -1 & -5\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1-1-4 & 2-1+6\\ -2-2 & -4+3\\ 1+2 & 1-3\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2-3 & 1-1+2\\ 4-3 & -2-1-10\\ -4+3 & 2+1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 7\\ -4 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5/3 & -2/3\\ -1/3 & 13/3\\ 1/3 & -7/3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-4+5/3 & 7-2/3\\ -4-1/3 & -1+13/3\\ 3+1/3 & -2-7/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/3 & 19/3\\ -13/3 & 10/3\\ 10/3 & -13/3\end{pmatrix}}$$

b) Sea P una matriz de dimensiones m x n y Q una matriz de dimensiones r x s.
La matriz P^t es de dimensiones n x m.

Miramos el primer miembro de la ecuación matricial.

Para que sea posible el primer producto tenemos que:

$$\begin{array}{c} A \cdot P^t \\ 3 \times \boxed{3 \cdot n} \times m \longrightarrow 3 \times m \end{array}$$

debe ser $n = 3$ y se obtiene una matriz de dimensiones $3 \times m$.

Para poder sumar la matriz resultante de dimensiones $3 \times m$ del producto con la matriz C de dimensiones 3×2 deben de coincidir sus dimensiones → $m = 2$.

<u>La matriz P debe tener dimensiones 2 x 3</u>.

Miramos el otro miembro de la ecuación matricial.

Para que sea posible el producto Q · B debe cumplirse:

$$\begin{array}{c} Q \cdot B \\ r \times \boxed{s \cdot 3} \times 2 \longrightarrow r \times 2 \end{array}$$

debe ser $s = 3$ y se obtiene una matriz de dimensiones r x 2.

Para poder hacer el producto $C \cdot (Q \cdot B)$ debe cumplirse:

$$\begin{array}{c} C \cdot (Q \cdot B) \\ 3 \times \boxed{2 \cdot r} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2 \end{array}$$

debe ser $r = 2$ y se obtiene una matriz 3 x 2, al igual que en el primer miembro de la ecuación matricial.

<u>La matriz Q debe tener dimensiones 2 x 3</u>.

EJERCICIO 2

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y-2x\le 7;\quad -x+3y\le 21;\quad x+2y\le 19;\quad x+y\le 14$$

a) **(1.4 puntos)** Represente dicho recinto y determine sus vértices.

b) **(0.6 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=x+4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

c) **(0.5 puntos)** ¿Podrá tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y-2x=7$

x	$y=2x+7$
0	7
1	9

$-x+3y=21$

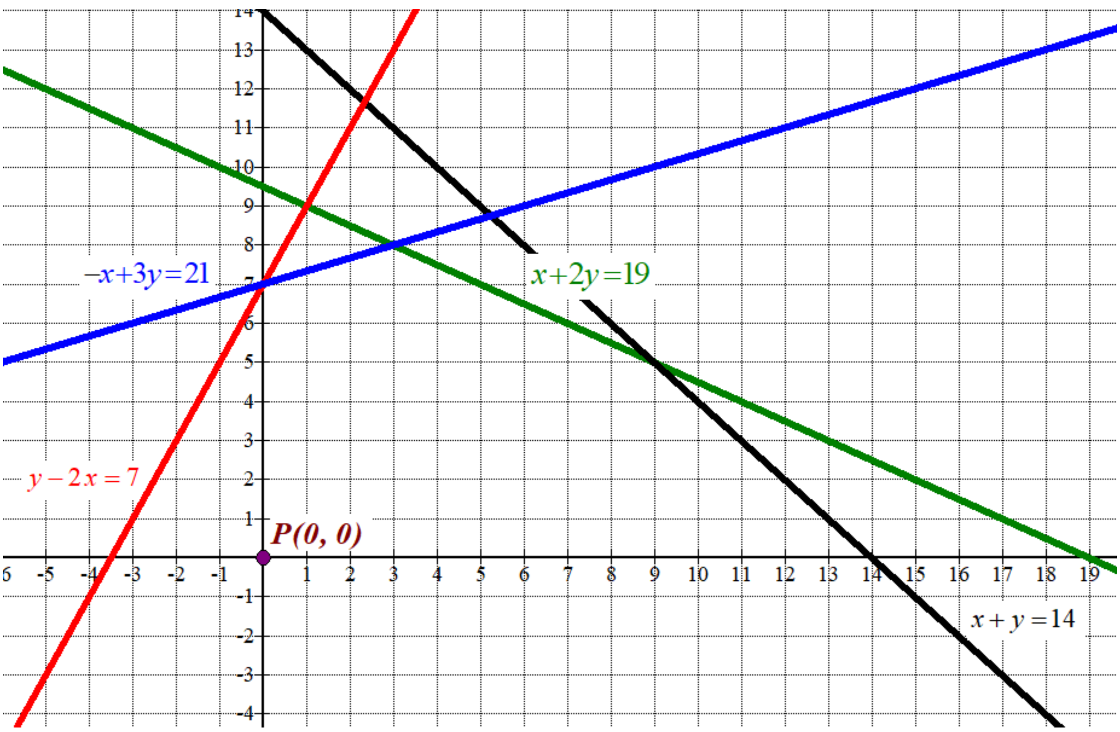
x	$y=\dfrac{21+x}{3}$
0	7
3	8

$x+2y=19$

x	$y=\dfrac{19-x}{2}$
0	9.5
9	5

$x+y=14$

x	$y=14-x$
0	14
9	5

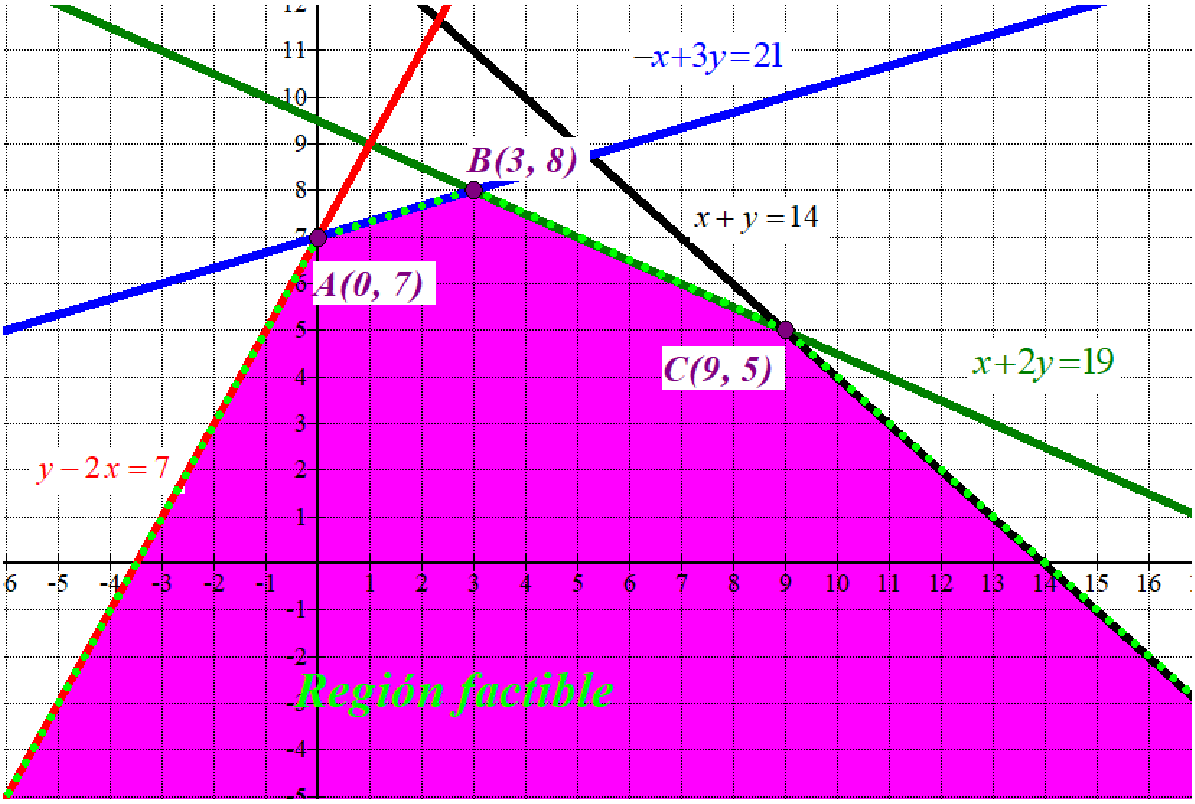


Como las restricciones son $-2x+y\le 7;\quad -x+3y\le 21;\quad x+2y\le 19;\quad x+y\le 14$ la región factible es la región del plano que está por debajo de todas las rectas.

Comprobamos que el punto P(0, 0) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$0-2\cdot 0\le 7;\quad -0+3\cdot 0\le 21;\quad 0+2\cdot 0\le 19;\quad 0+0\le 14$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices de la región factible son A(0, 7), B(3, 8) y C(9, 5)

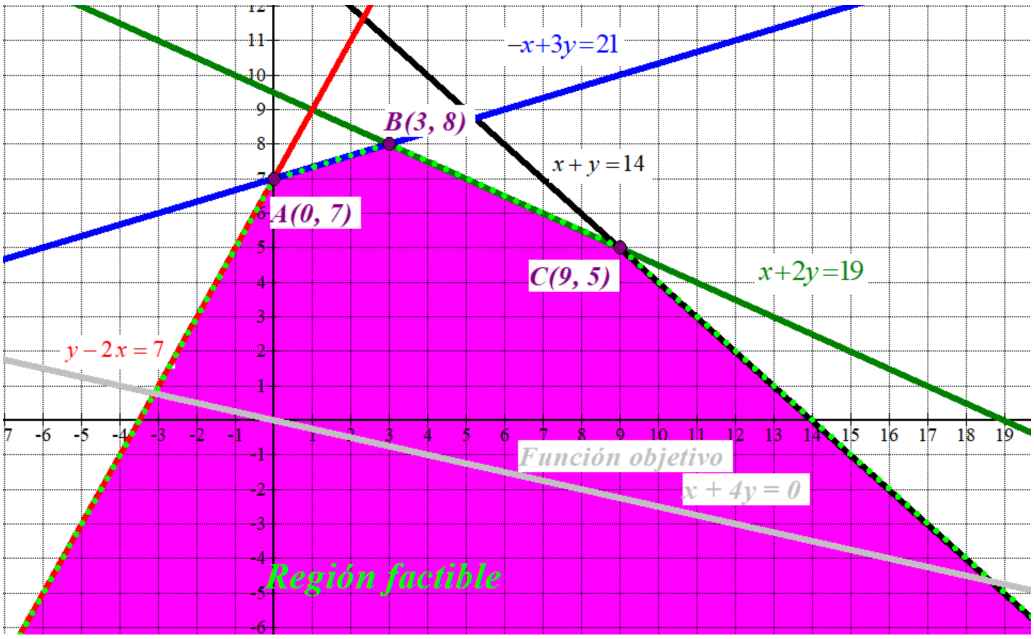
b) Valoramos la función objetivo $F(x,y)=x+4y$ en cada vértice.

A(0, 7) → $F(0,7)=0+28=28$

B(3, 8) → $F(3,8)=3+32=35$ ¡Máximo!

C(9, 5) → $F(9,5)=9+20=29$

Como la región factible no es acotada no podemos asegurar que el valor mínimo y máximo de la función objetivo esté situado en los vértices de la región.
Dibujamos la recta de la función objetivo con valor 0, es decir, $x+4y=0$, se observa que la función objetivo alcanza el valor 0 en muchos puntos de la región.
Por lo tanto no hay valor mínimo de la función objetivo, aunque sí hay valor máximo.

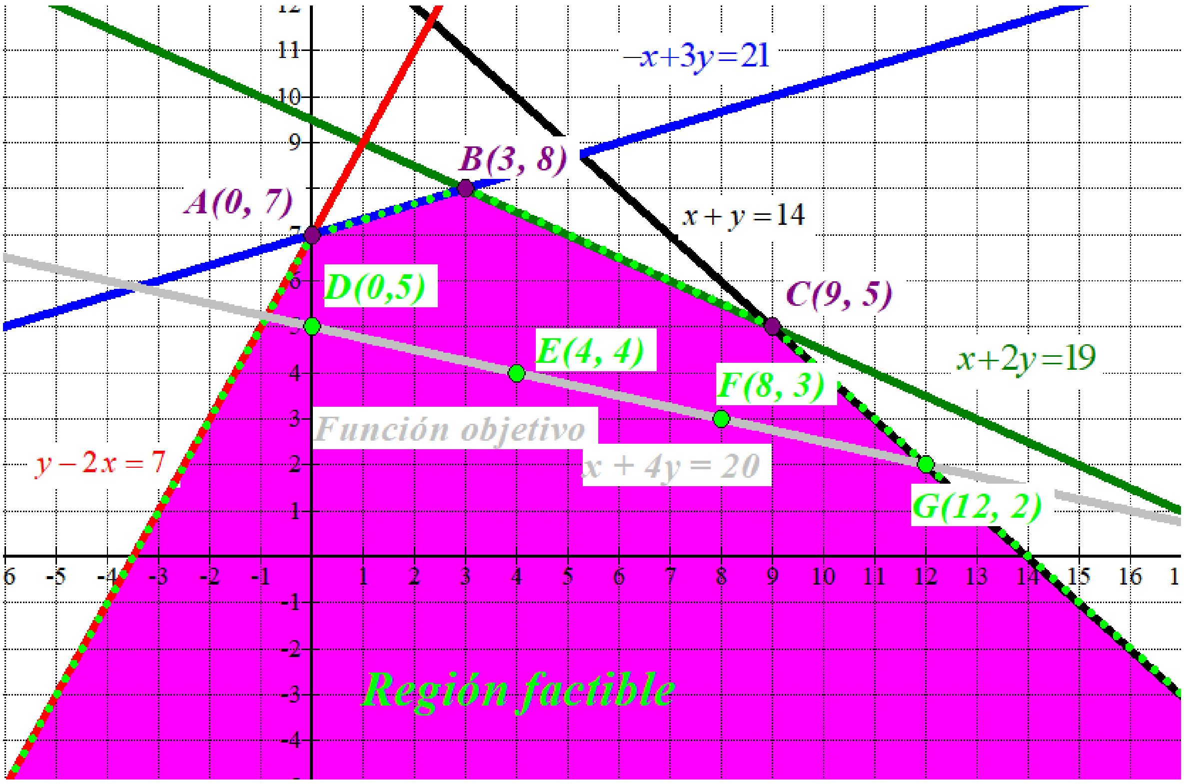


El máximo se alcanza en el vértice B(3, 8) y este valor máximo de la función es 35.

No existe valor mínimo de la función en los puntos de la región factible pues esta función puede alcanza valores todo lo pequeños que se quiera (región factible no acotada).

c) ¿Podrá tomar la función objetivo *F* el valor 40 en algún punto de la región factible? No puede alcanzar un valor superior al máximo (35).
¿Y el valor 20? Si.
Dibujamos la recta que representa la función objetivo con valor 20.

El valor 20 se alcanza en muchos puntos de la región factible.
Por ejemplo en los puntos D(0, 5), E(4, 4), F(8, 3) y G(12, 2).



BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1 punto)** Se considera la función $f(x)=x^3+bx^2+cx-1$, donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x=\frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto (–2, –3).

b) **(1.5 puntos)** Dada la función $g(x)=-x^3-x^2+x+1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

a) Que la función f pase por el punto (–2, –3) significa que $f(-2)=-3$.

$$f(-2)=(-2)^3+b(-2)^2+c(-2)-1=-3 \Rightarrow -8+4b-2c-1=-3 \Rightarrow 4b-2c=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b-c=3 \Rightarrow \boxed{c=2b-3}$$

Que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x=\frac{1}{3}$ significa que $f'\left(\frac{1}{3}\right)=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3x^2+2bx+c \\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^2+2b\left(\frac{1}{3}\right)+c=0 \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{2}{3}b+c=0 \Rightarrow \boxed{1+2b+3c=0}$$

Unimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} c=2b-3 \\ 1+2b+3c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+2b+3(2b-3)=0 \Rightarrow 1+2b+6b-9=0 \Rightarrow 8b=8 \Rightarrow \boxed{b=1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=2-3=-1}$$

Los valores buscados son $b = 1$ y $c = -1$.

b) Puntos de corte.

$$x=0 \Rightarrow g(0)=-0^3-0^2+0+1=1 \Rightarrow P(0,1)$$

$$y=0 \Rightarrow 0=g(x)=-x^3-x^2+x+1.$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & & 1 & +1 \\ \hline & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} -1 & & +1 \\ \hline & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Los puntos de corte son Q(1, 0) y R(–1,0)

Monotonía.

Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{r} g'(x) = -3x^2 - 2x + 1 \\ g'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2(-3)} = \frac{2 \pm 4}{-6} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{-6} = -1 = x \\ \dfrac{2-4}{-6} = \dfrac{1}{3} = x \end{cases}$$

Existen dos puntos críticos.
Valoramos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

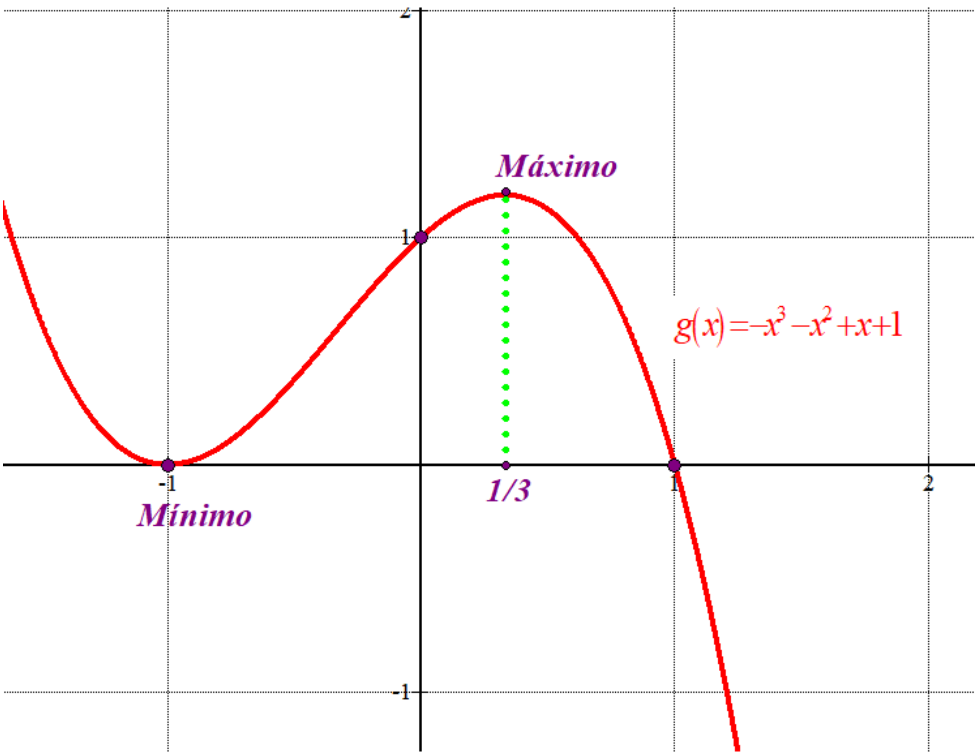
En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $g'(-2) = -3(-2)^2 - 2(-2) + 1 = -7 < 0$. La función decrece en $(-\infty, -1)$.

En el intervalo $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $g'(0) = 1 > 0$. La función crece en $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

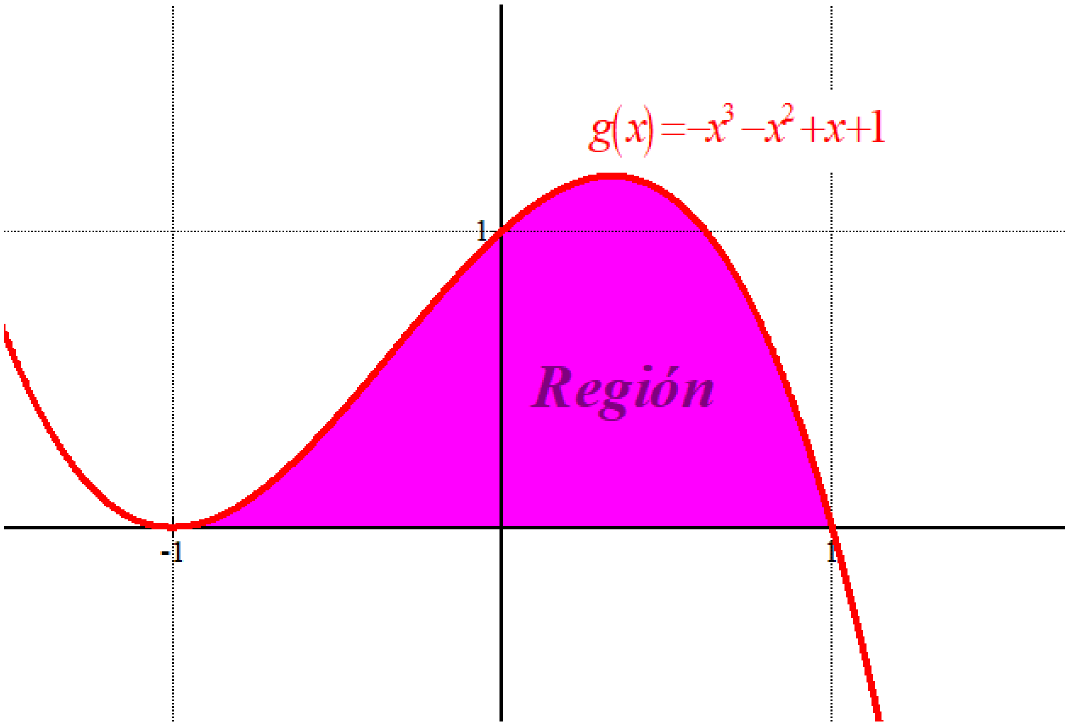
En el intervalo $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $g'(1) = -3 - 2 + 1 = -4 < 0$. La función decrece en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

La función decrece en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ y crece en $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

Dibujamos la gráfica de $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$



c) Nos piden calcular el área de la región del dibujo coloreada de rosa.



Calculamos su área con la integral definida entre –1 y 1 de la función $g(x)=-x^3-x^2+x+1$.

$$Área=\int_{-1}^{1}-x^3-x^2+x+1dx=\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\left[-\frac{1^4}{4}-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+1\right]-\left[-\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}-1\right]=$$

$$=-\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{3}+\cancel{\frac{1}{2}}+1+\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{2}}+1=2-\frac{2}{3}=\boxed{\frac{4}{3}\simeq 1.33u^2}$$

EJERCICIO 4

El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dado por la siguiente función:

$$B(x) = -0.02x^2 + 1.3x - 15, \quad x \geq 0$$

a) **(0.75 puntos)** Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.
b) **(0.5 puntos)** ¿Para qué valores de *x* la finca no tiene pérdidas?
c) **(0.5 puntos)** ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?
d) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000 €?

a) Puntos de corte.

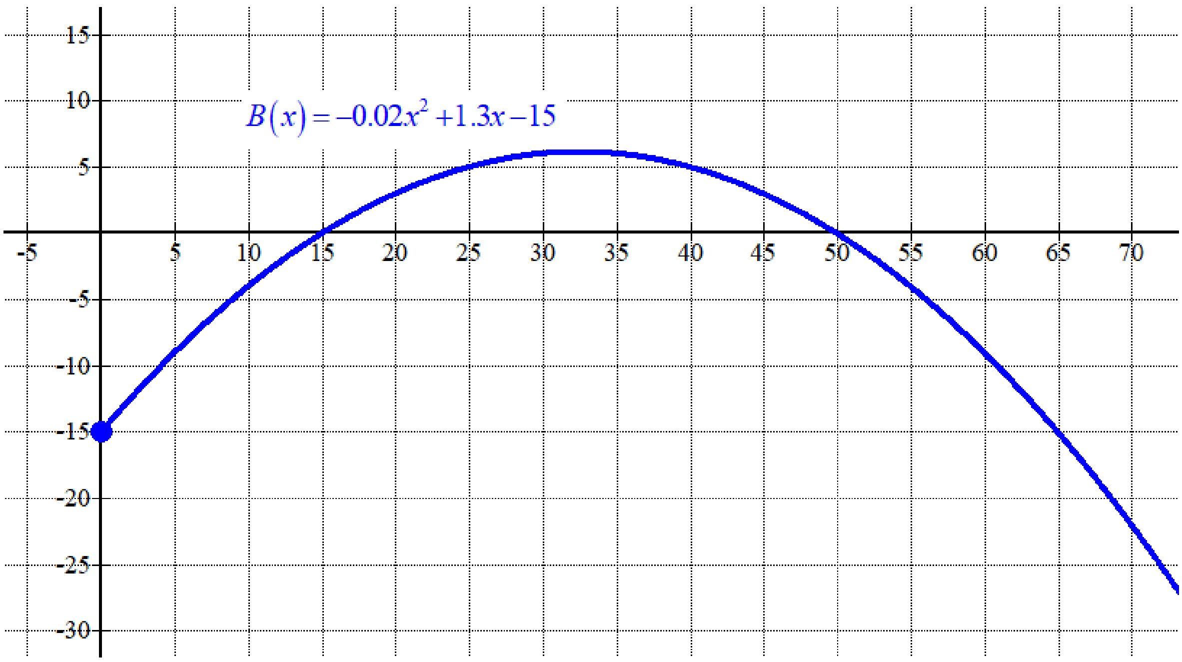
$$\left.\begin{array}{r} B(x) = -0.02x^2 + 1.3x - 15 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -0.02x^2 + 1.3x - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1.3 \pm \sqrt{1.3^2 - 4(-0.02)(-15)}}{2(-0.02)} = \frac{-1.3 \pm 0.7}{-0.04} = \begin{cases} \dfrac{-1.3+0.7}{-0.04} = 15 = x \\ \dfrac{-1.3-0.7}{-0.04} = 50 = x \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje OX son (15, 0) y (50, 0).
La gráfica es la de una parábola.
Hallamos también el vértice de la parábola.

$$\left.\begin{array}{r} B'(x) = -0.04x + 1.3 \\ B'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -0.04x + 1.3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1.3}{0.04} = 32.5$$

Como $B''(x) = -0.04 \Rightarrow B''(32.5) = -0.04 < 0$ en x = 32.5 hay un máximo de la función.



b) La finca no tiene pérdidas con la venta de 15000 a 50000 kilos de aceitunas, pues la función beneficio es positiva o cero en el intervalo [15, 50].

c) Lo he calculado en el apartado a) el máximo está en *x = 32.5*.

Como $B(32.5) = -0.02 \cdot 32.5^2 + 1.3 \cdot 32.5 - 15 = 6.125$ podemos decir que con la venta de 32.500 kilogramos de aceitunas se consigue un beneficio máximo de 6.125 €.

d) Igualamos la función beneficio a 5.

$$B(x) = 5 \Rightarrow -0.02x^2 + 1.3x - 15 = 5 \Rightarrow -0.02x^2 + 1.3x - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1.3 \pm \sqrt{1.3^2 - 4(-0.02)(-20)}}{2(-0.02)} = \frac{-1.3 \pm 0.3}{-0.04} = \begin{cases} \dfrac{-1.3+0.3}{-0.04} = 25 = x \\ \dfrac{-1.3-0.3}{-0.04} = 40 = x \end{cases}$$

El beneficio de 5000 € se puede conseguir con la venta de 25.000 kilos de aceitunas y también con la venta de 40.000 kilos de aceitunas.

BLOQUE C

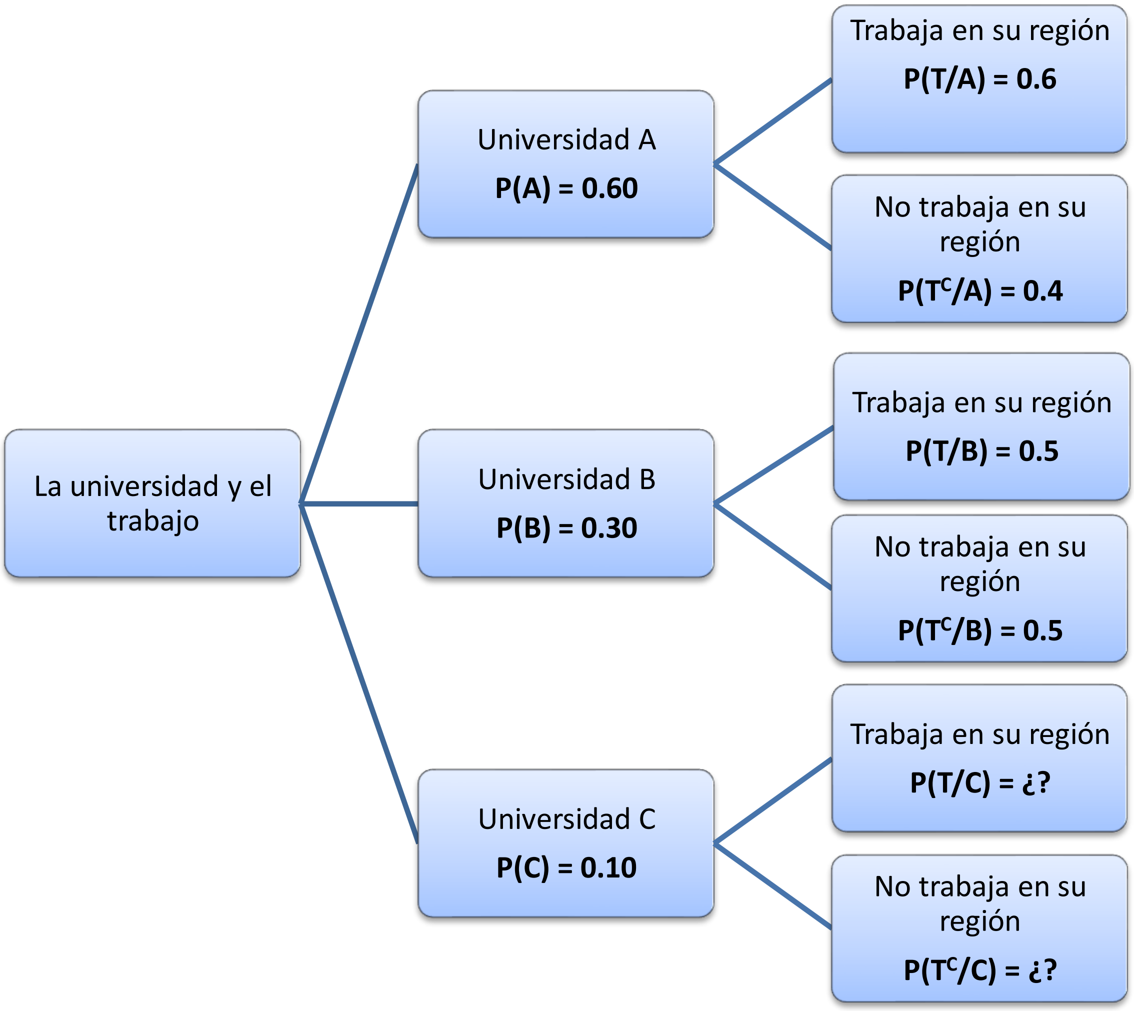
EJERCICIO 5

En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60 % procedían de la universidad A, el 30 % de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0.4 y para un estudiante de B es 0.5.

a) (1.5 puntos) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0.395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.
Llamamos A = "estudiar en la universidad A", B = "estudiar en la universidad B" y C = "estudiar en la universidad C". T = Trabajar en su región"



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total tenemos que:

$$P\left(T^C\right)=P(A)P\left(T^C/A\right)+P(B)P\left(T^C/B\right)+P(C)P\left(T^C/C\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.395=0.6\cdot 0.4+0.3\cdot 0.5+0.1\cdot P\left(T^C/C\right)\Rightarrow 0.395=0.39+0.1\cdot P\left(T^C/C\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.1\cdot P\left(T^C/C\right)=0.005\Rightarrow \boxed{P\left(T^C/C\right)=\frac{0.005}{0.1}=0.05}$$

La probabilidad de que un alumno de la universidad C no encuentre trabajo en su región es 0.05, por lo que la probabilidad de encontrar trabajo en su región es de 1 – 0.05 = 0.95.

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(\left(A\cup B\right)/T^C\right)=\frac{P\left(\left(A\cup B\right)\cap T^C\right)}{P\left(T^C\right)}=\frac{P\left(A\right)P\left(T^C/A\right)+P\left(B\right)P\left(T^C/B\right)}{P\left(T^C\right)}=$$

$$=\frac{0.6\cdot 0.4+0.3\cdot 0.5}{0.395}=\frac{0.39}{0.395}=\boxed{\frac{78}{79}\simeq 0.987}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Utilizamos el suceso contrario al pedido.

Calculamos la probabilidad de que que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad C.

$$P\left(C/T^C\right)=\frac{P\left(C\cap T^C\right)}{P\left(T^C\right)}=\frac{P\left(C\right)P\left(T^C/C\right)}{P\left(T^C\right)}=\frac{0.1\cdot 0.05}{0.395}=\frac{1}{79}$$

Entonces la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B es de $1-\frac{1}{79}=\boxed{\frac{78}{79}\simeq 0.987}$

EJERCICIO 6

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que:

$$P(A\cup B)=\frac{3}{7},\ P(A^C)=\frac{5}{7},\ P(B^C)=\frac{2}{3}$$

a) **(1 punto)** ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

b) **(0.75 puntos)** Calcule $P(A^C\cap B^C)$.

c) **(0.75 puntos)** Calcule $P(B/A^C)$.

a) Calculamos la probabilidad de A, de B y de la intersección.

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$$
$$P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{3}{7}=\frac{2}{7}+\frac{1}{3}-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{7}+\frac{1}{3}-\frac{3}{7}=\frac{4}{21}$$

Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=\dfrac{4}{21}\\ P(A)P(B)=\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{21}\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{4}{21}\neq\frac{2}{21}=P(A)P(B)$$

Como no se cumple la igualdad los sucesos A y B no son independientes.

Para que dos sucesos sean incompatibles debe ser $A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cap B)=0$

En nuestros sucesos A y B no ocurre pues $P(A\cap B)=\frac{4}{21}\neq 0$

A y B no son incompatibles.

b) Aplicando las leyes de Morgan.

$$P(A^C\cap B^C)=P\left((A\cup B)^C\right)=1-P(A\cup B)=1-\frac{3}{7}=\boxed{\frac{4}{7}}$$

c)

$$P(B/A^C)=\frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(A^C)}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{4}{21}}{\frac{5}{7}}=\frac{\frac{3}{21}}{\frac{5}{7}}=\boxed{\frac{1}{5}}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1500 tornillos, resultando que 1425 cumplen las especificaciones del fabricante.

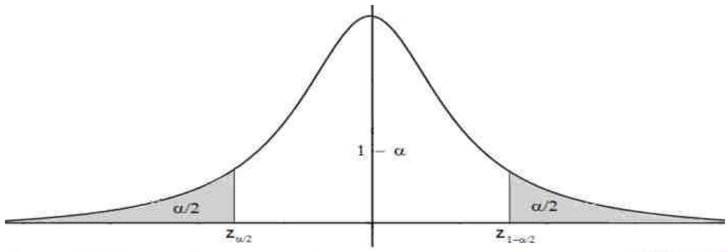
a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97%.

b) **(1 punto)** Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

Tamaño de la muestra es $n = 1500$. $pr = \dfrac{1425}{1500} = 0.95$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.95 = 0.05$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.95 \cdot 0.05}{1500}} = 0.0122$$

El error máximo cometido es de 0.0122.

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.95 - 0.0122,\quad 0.95 + 0.0122) = (0.9378,\ 0.9622)$$

b) ¿n? Con error 0.01

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.01 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.95 \cdot 0.05}{n}} \Rightarrow \frac{0.01}{2.17} = \sqrt{\frac{0.95 \cdot 0.05}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.01}{2.17}\right)^2 = \frac{0.95 \cdot 0.05}{n} \Rightarrow n = \frac{0.95 \cdot 0.05}{\left(\frac{0.01}{2.17}\right)^2} = 2236.7275$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 2237 tornillos.

EJERCICIO 8

El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) **(1 punto)** Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8.1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la media poblacional.

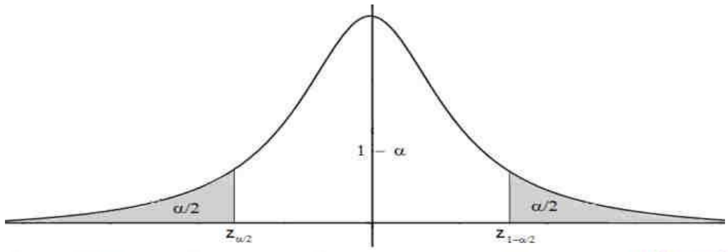
b) **(1 punto)** Con un nivel de confianza del 92%, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.

c) **(1 punto)** Suponiendo $\mu = 7.61 días$ y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

a) X = El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo.
X = N(μ,3)

Con un nivel de confianza del 97%

1 – ∝ = 0,97 → ∝ = 0,03 →∝/2 = 0’015 →1 – ∝/2 = 0,985 → $z_{\alpha/2}$ = **2.17**



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884

Tamaño de muestra n = 100. Media muestral $\bar{x} = 8.1$

Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} = 0.651 días$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = (8.1 - 0.651,\ 8.1 + 0.651) = (7.449,\ 8.751)$$

b) Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 1.

Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0{,}92 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow \alpha/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,[illegible]199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,[illegible]596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,[illegible]987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,[illegible]368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,[illegible]736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,[illegible]088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,[illegible]422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,[illegible]734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,[illegible]023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,[illegible]289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,[illegible]531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,[illegible]749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,[illegible]944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,[illegible]115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,[illegible]265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,[illegible]394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,[illegible]505
1,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9599
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.75 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.75 \cdot 3 \Rightarrow n = (1.75 \cdot 3)^2 \simeq 27.5625$$

El tamaño mínimo debe ser entero y superior al hallado, por lo tanto es de 28 titulados.

c) X = N(7.61, 3)

n = 36 → $\overline{X_{36}}$ es una distribución normal de la misma media que X y de desviación típica $\sigma = \frac{3}{\sqrt{36}} = 0.5$.

La variable media muestral es $\overline{X_{36}} = N(7.61, 0.5)$

$$P\left(\overline{X_{36}} > 8\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{8 - 7.61}{0.5}\right) = P(Z > 0.78) =$$

$$= 1 - P(Z < 0.78) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0.7823 = \boxed{0.2177}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,[illegible]319	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,[illegible]714	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6[illegible]03	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6[illegible]80	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6[illegible]44	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7[illegible]90	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	[illegible]	0,7
0,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7823	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	[illegible]	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8