Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2022
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además solamente puede fabricar un máximo de 1200 pares de zapatillas.
a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
b) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

2. La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco. Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche y estos últimos cuestan 50 céntimos menos que los de chocolate blanco.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada tipo de bombón. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & si \quad x\le c \\ -(x-3)^2+2 & si \quad x>c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 1$. (0.75 puntos)

2. La función $f(x)=ax^4+bx^2+c$ tiene un mínimo en el punto (–1, 0) y corta al eje OY en el punto de ordenada y = 1. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. El 70% de los turistas que visitan una determinada ciudad se alojan en el centro, y el resto lo hace en las afueras. El 60% de los que se alojan en el centro y el 40% de los que se alojan en las afueras lo hacen en hoteles de 3 o más estrellas, mientras que el resto lo hace en establecimientos de menor calidad.
a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya alojado en un hotel de 3 o más estrellas? (0.75 puntos)
b) Si se sabe que una persona se ha alojado en un establecimiento de menor calidad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona se haya alojado en el centro? (0.75 puntos)

4. El número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 50 pacientes. Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 semanas y se ha registrado el número de pacientes atendidos, proporcionando una media de 322 pacientes.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pacientes atendidos con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. En un programa de televisión hay tres secciones: magia, humor y noticias. La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia. El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias y la duración total de programa es de 1 hora y 55 minutos.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto tiempo se dedica a cada una de las tres secciones del programa. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. a) Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $A \cdot X = B$ y $B = X \cdot A$? ¿De qué propiedad estamos hablando? (0.5 puntos)

b) Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2 × 5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante? (0.5 puntos).

c) Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3} E^T$ (1 punto)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. El 40% de las personas que acuden a una consulta médica lo hacen para diagnosticar una enfermedad, el 30% para solicitar recetas y un 10% para ambas cosas, diagnosticar enfermedad y solicitar recetas.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acuda a solicitar recetas o a diagnosticar una enfermedad o ambos? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que una persona ha acudido a diagnosticar una enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona también solicite recetas? (0.75 puntos)

6. El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año sigue una distribución normal de media desconocida y varianza σ^2 = 6 libros2: Se ha tomado una muestra de 10 estudiantes de Bachillerato y el número de libros que han leído han sido 4, 8, 2, 9, 3, 7, 5, 6, 7 y 4 libros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de libros leídos con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)

b) Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 64 estudiantes y un nivel de confianza del 95:96 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

<u>Bloque 2</u>

5. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+t+1)^2 & si\ x<-1\\ 1 & si\ x=-1\\ -x^2+(t+2)x+5 & si\ x>-1\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua $x = -1$? (0.5 puntos)
b) Para $t = 0$; calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo (–1, ∞). (0.5 puntos)
c) Para $t = 0$; calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en (–1, ∞). (0.5 puntos)

6. El número de socios de una protectora de animales durante los cinco primeros años de su existencia viene dado por la siguiente función $P(x)=x^3-6x^2+9x+4$ con x = años y $1\le x\le 5$.

a) ¿En qué intervalos aumenta el número de socios? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 puntos)
b) ¿Cuándo hay mayor número de socios y cuántos son? (0.75 puntos)
c) ¿En qué año son menos socios y cuántos hay? (0.75 puntos)

SOLUCIONES

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además solamente puede fabricar un máximo de 1200 pares de zapatillas.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)

b) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

a) Llamemos "x" al número de zapatillas de mujer e "y" al número de zapatillas de hombre.

La función objetivo es el beneficio que queremos maximizar: $B(x,y)=28x+30y$

Las restricciones son:

"*Tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre*" → $100 \leq y \leq 600$

"*Tiene que fabricar un mínimo de 400 pares de mujer*" → $x \geq 400$

"*Solamente puede fabricar un máximo de 1200 pares de zapatillas*" → $x+y \leq 1200$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 100 \leq y \leq 600 \\ x \geq 400 \\ x+y \leq 1200 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 100 \leq y \leq 600 \\ x \geq 400 \\ x+y \leq 1200 \end{array}\right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$x+y=1200$

x	$y=1200-x$
0	1200
1200	0

$y=100$

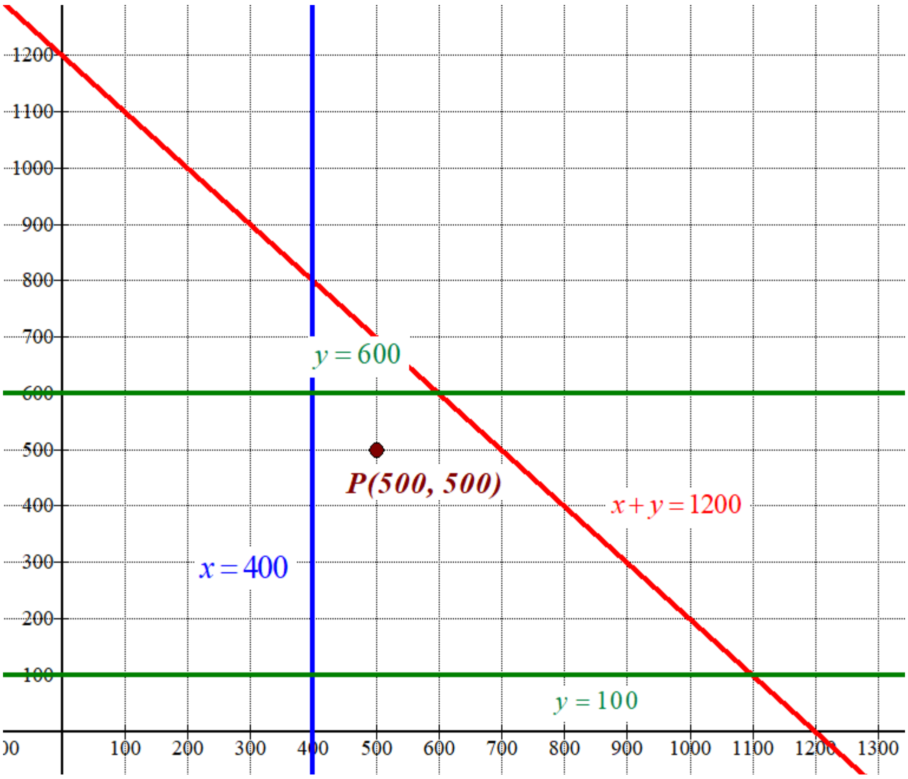
Recta horizontal

$y=600$

Recta horizontal

$x=400$

Recta vertical

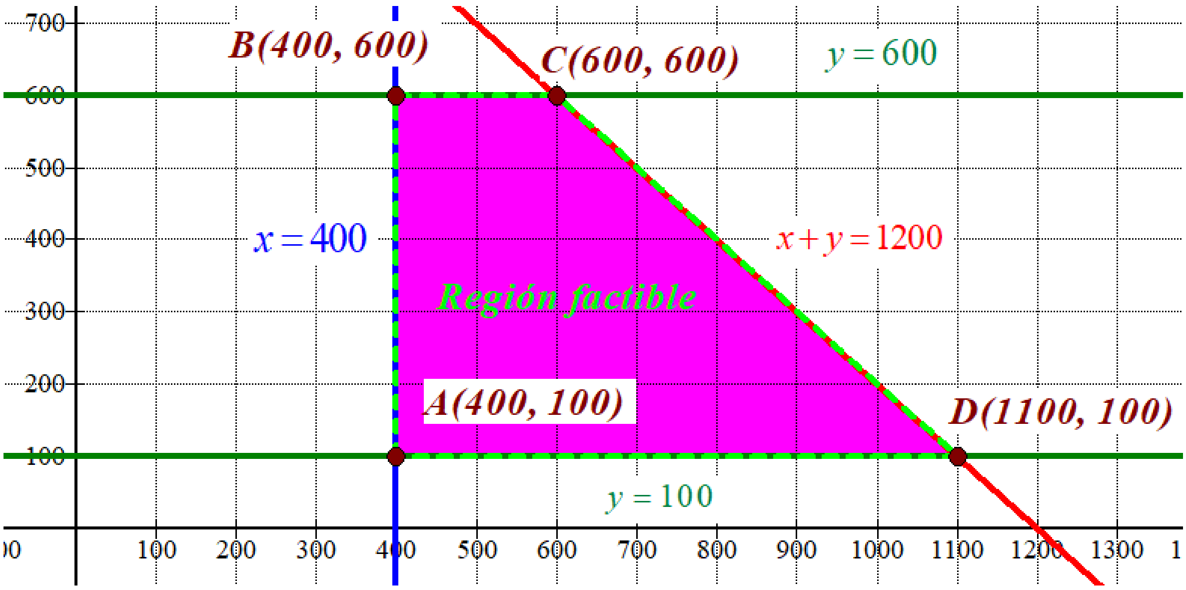


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 100 \leq y \leq 600 \\ x \geq 400 \\ x+y \leq 1200 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada entre las rectas horizontales verdes, a la derecha de la recta vertical azul y por debajo de la recta roja.

Comprobamos si el punto P(500, 500) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 100 \leq 500 \leq 600 \\ 500 \geq 400 \\ 500+500 \leq 1200 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



b) Valoramos el beneficio en cada vértice de la región factible.

A(400, 100) → $B(400,100) = 28 \cdot 400 + 3000 = 14200$

B(400, 600) → $B(400,600) = 28 \cdot 400 + 30 \cdot 600 = 29200$

C(600, 600) → $B(600,600) = 28 \cdot 600 + 30 \cdot 600 = 34800$ ¡*Máximo*!

D(1100, 100) → $B(1100,100) = 28 \cdot 1100 + 30 \cdot 100 = 33800$

El beneficio máximo se produce en el vértice C(600, 600).

Vendiendo 600 zapatillas de hombre y otras 600 de mujer se obtiene un beneficio máximo de 34800 €.

2. La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco. Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche y estos últimos cuestan 50 céntimos menos que los de chocolate blanco.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada tipo de bombón. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos "x" al precio de un bombón de chocolate negro, "y" al precio de un bombón de chocolate con leche y "z" al precio de un bombón de chocolate blanco.

"*La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco*" → $12x+6y+6z=51$

"*Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche*" → $x=y+1$

"Cada bombón de chocolate con leche cuesta 50 céntimos menos que los de chocolate blanco" → $y=z-0.5$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 12x+6y+6z=51 \\ x=y+1 \\ y=z-0.5 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 12x+6y+6z=51 \\ x=y+1 \\ y=z-0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12x+6(z-0.5)+6z=51 \\ x=z-0.5+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12x+6z-3+6z=51 \\ x=z+0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12x+12z=54 \\ x=z+0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+2z=9 \\ x=z+0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(z+0.5)+2z=9 \Rightarrow 2z+1+2z=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4z=8 \Rightarrow \boxed{z=2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=2+0.5=2.5} \\ \boxed{y=2-0.5=1.5} \end{array}\right.$$

Cada bombón de chocolate negro cuesta 2.5 €, cada uno de chocolate con leche cuesta 1.5 € y cada uno de chocolate blanco cuesta 2 €.

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & si \;\; x\le c \\ -(x-3)^2+2 & si \;\; x>c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 1$. (0.75 puntos)

a) Para que sea continua en c deben de coincidir los limites laterales y el valor de la función en c.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^-} 2x-4=2c-4 \\ \lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+} -(x-3)^2+2=-(c-3)^2+2=-(c^2+9-6c)+2 \\ f(c)=2c-4 \\ f(x)\, continua\, en\, x=c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2c-4=-(c^2+9-6c)+2 \Rightarrow 2c-4=-c^2-9+6c+2 \Rightarrow c^2-4c+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} \frac{4+2}{2}=3=c \\ \frac{4-2}{2}=1=c \end{cases}$$

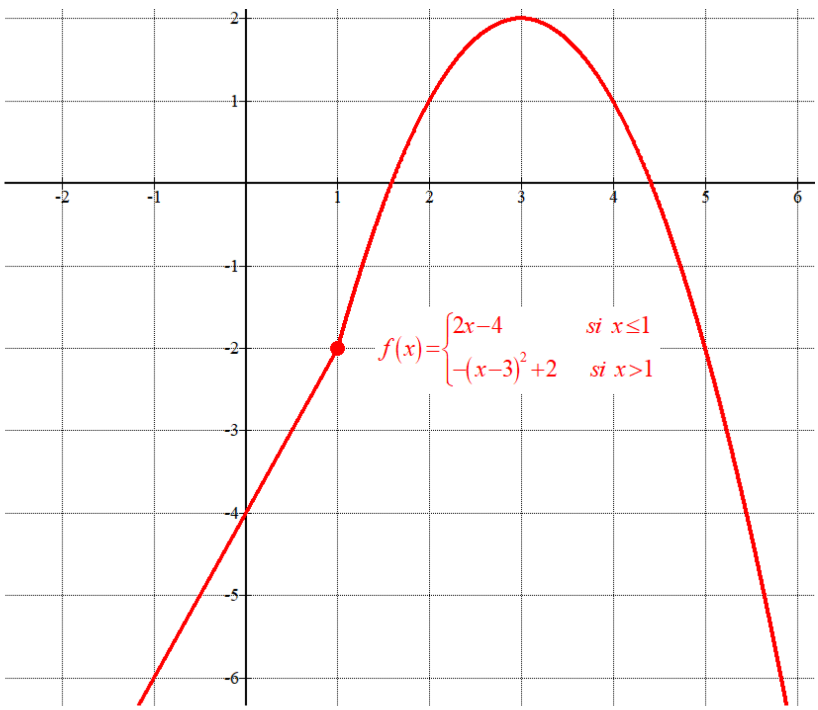
Para $c = 3$ y $c = 1$ la función es continua en $x = c$.

b) Hacemos una tabla de valores para cada rama de la función y la representamos. La gráfica es un trozo de recta y un trozo de parábola.

Para c = 1 la función queda $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & si \;\; x\le 1 \\ -(x-3)^2+2 & si \;\; x>1 \end{cases}$

$x\le 1$	$y=2x-4$
0	-4
1	-2

$x>1$	$y=-(x-3)^2+2$
1	-2 No se incluye
2	1
3	2
4	1
5	-2



2. La función $f(x)=ax^4+bx^2+c$ tiene un mínimo en el punto (–1, 0) y corta al eje OY en el punto de ordenada y = 1. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*. (1.5 puntos)

Si la función tiene un mínimo en el punto (–1, 0) significa dos cosas: *f(–1) = 0* y que *f ´(–1) = 0.*

$$f(-1)=0 \Rightarrow a\cdot(-1)^4+b\cdot(-1)^2+c=0 \Rightarrow \boxed{a+b+c=0}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^4+bx^2+c \Rightarrow f'(x)=4ax^3+2bx \\ f'(-1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a(-1)^3+2b(-1)=0 \Rightarrow -4a-2b=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2a+b=0}$$

Además, la función corta al eje OY en el punto de ordenada y = 1. Por lo que se cumple que $f(0)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f(x)=ax^4+bx^2+c \end{array}\right\} \Rightarrow 1=a\cdot 0^4+b\cdot 0^2+c \Rightarrow \boxed{c=1}$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 2a+b=0 \\ \boxed{c=1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+1=0 \\ 2a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-1-a \\ 2a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a-1-a=0 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=-1-1=-2}$$

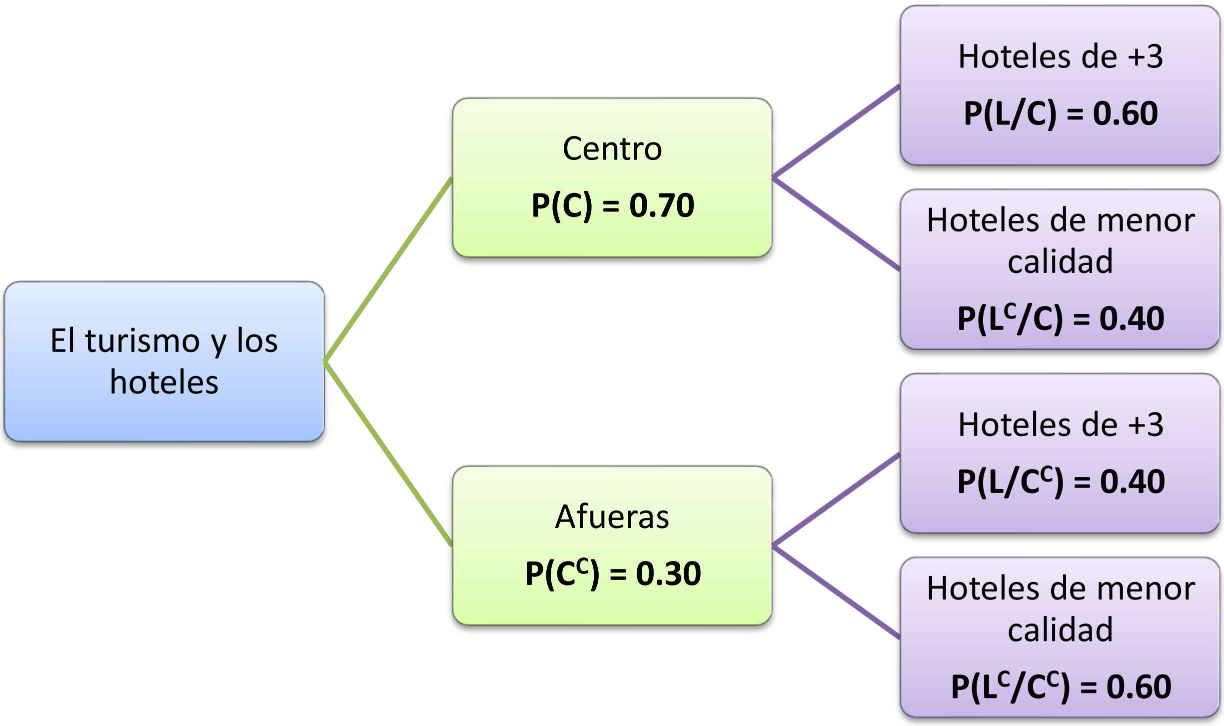
Los valores buscados son *a = 1*; *b = –2* y *c = 1.*

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. El 70% de los turistas que visitan una determinada ciudad se alojan en el centro, y el resto lo hace en las afueras. El 60% de los que se alojan en el centro y el 40% de los que se alojan en las afueras lo hacen en hoteles de 3 o más estrellas, mientras que el resto lo hace en establecimientos de menor calidad.
a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya alojado en un hotel de 3 o más estrellas? (0.75 puntos)
b) Si se sabe que una persona se ha alojado en un establecimiento de menor calidad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona se haya alojado en el centro? (0.75 puntos)

Llamamos C = "Alojarse en el centro", L = "Alojarse en hoteles de 3 estrellas o más".
C^C = "Alojarse en las afueras" y L^C = "Alojarse en hoteles de menor calidad"

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(L) = P(C)P(L/C) + P(C^C)P(L/C^C) = 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = \boxed{0.54}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C/L^C) = \frac{P(C \cap L^C)}{P(L^C)} = \frac{P(C)P(L^C/C)}{1 - P(L)} = \frac{0.7 \cdot 0.4}{1 - 0.54} = \boxed{\frac{14}{23} \simeq 0.609}$$

4. El número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 50 pacientes. Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 semanas y se ha registrado el número de pacientes atendidos, proporcionando una media de 322 pacientes.
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pacientes atendidos con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)
b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)
c) ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

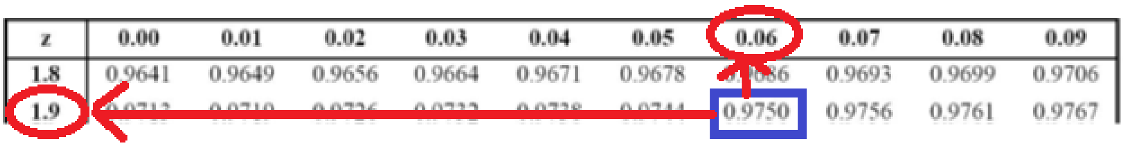
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

X = Número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana.
Desviación típica = σ = 50 pacientes
X = N(μ, 50)

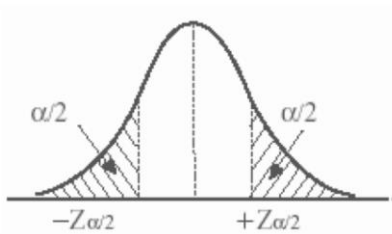
$Media\ muestral = \bar{x} = 322$. Tamaño de la muestra = n = 25

a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{50}{\sqrt{25}} = 19.6$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(322 - 19.6, 322 + 19.6\right) = \left(302.4, 341.6\right)$$

b) Si aumentamos el tamaño de la muestra (n) el error o amplitud del intervalo de confianza será menor, pues $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

c) Con un nivel de confianza del 99 % mayor del 95 % obtendremos un $z_{\alpha/2}$ mayor y el $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ será mayor (amplitud del intervalo de confianza mayor).

Como 330 está en el intervalo de confianza con un 95 % de nivel de confianza también lo estará en el del 99 %.
Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %.

Bloque 2

3. En un programa de televisión hay tres secciones: magia, humor y noticias. La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia. El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias y la duración total de programa es de 1 hora y 55 minutos.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto tiempo se dedica a cada una de las tres secciones del programa. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos "x" a los minutos que dura la sección de humor, "y" a lo que dura la sección de magia y "z" a la duración de la sección de noticias.

"La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia" → $x = y + 5$

"El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias" → $x + y = \frac{z}{4}$

"La duración total de programa es de 1 hora y 55 minutos = 115 minutos" → $x + y + z = 115$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 5 \\ x + y = \frac{z}{4} \\ x + y + z = 115 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 5 \\ x + y = \frac{z}{4} \\ x + y + z = 115 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y + 5 + y = \frac{z}{4} \\ y + 5 + y + z = 115 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y + 5 = \frac{z}{4} \\ 2y + z = 110 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y + 5 = \frac{z}{4} \\ 2y = 110 - z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 110 - z + 5 = \frac{z}{4} \Rightarrow 115 = z + \frac{z}{4} \Rightarrow 115 = \frac{5z}{4} \Rightarrow 460 = 5z \Rightarrow \boxed{z = \frac{460}{5} = 92} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 110 - 92 = 18 \Rightarrow \boxed{y = \frac{18}{2} = 9} \Rightarrow \boxed{x = 9 + 5 = 14}$$

La sección de humor dura 14 minutos, la de magia 9 y la de noticias 92 minutos.

4. a) Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $A \cdot X = B$ y $B = X \cdot A$? ¿De qué propiedad estamos hablando? (0.5 puntos)

b) Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante? (0.5 puntos).

c) Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3}E^T$ (1 punto)

a) En general no se cumple pues no es lo mismo $A \cdot X$ que $X \cdot A$. El producto de matrices no es conmutativo, se puede cumplir en casos particulares.

b)

$$M \cdot N \cdot P$$

$$\xrightarrow{3\times \boxed{m \cdot 2} \times \boxed{5 \cdot p} \times p} 3\times p$$

Para poder realizarse el producto M · N debe ser $m = 2$ obteniendo una matriz de orden 3 x 5.
Y para poderse realizar el producto de la matriz resultante por la matriz P debe ser $5 = p$.
Si se pueden realizar los dos productos la matriz resultante tiene dimensión 3 x 5.

c) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3}E^T \Rightarrow X \cdot C = D^2 + \frac{1}{3}E^T \Rightarrow X = \left(D^2 + \frac{1}{3}E^T\right)C^{-1}$$

Comprobamos que existe la inversa de la matriz C y la calculamos.

$$|C| = \begin{vmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 11 = 1 \neq 0 \quad \text{Existe la inversa}$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{Adj\left(C^T\right)}{|C|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y terminamos de resolver.

$$D^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E^T = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^2+\frac{1}{3}E^T=\begin{pmatrix}25 & 0\\ -7 & 4\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9 & -9\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 0\\ -7 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28 & -3\\ -8 & 5\end{pmatrix}$$

$$X=\left(D^2+\frac{1}{3}E^T\right)C^{-1}=\begin{pmatrix}28 & -3\\ -8 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -11\\ -1 & -4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-81 & -296\\ 19 & 68\end{pmatrix}}$$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. El 40% de las personas que acuden a una consulta médica lo hacen para diagnosticar una enfermedad, el 30% para solicitar recetas y un 10% para ambas cosas, diagnosticar enfermedad y solicitar recetas.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acuda a solicitar recetas o a diagnosticar una enfermedad o ambos? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que una persona ha acudido a diagnosticar una enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona también solicite recetas? (0.75 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia para obtener los porcentajes restantes.

	Recetas	No recetas	
Diagnosticar enfermedad	**10**		**40**
No diagnosticar enfermedad			
	30		**100**

Completamos la tabla.

	Recetas	No recetas	
Diagnosticar enfermedad	**10**	**30**	**40**
No diagnosticar enfermedad	**20**	**40**	**60**
	30	**70**	**100**

Con estos datos obtenidos respondemos a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

a) $$P\left(\text{A por recetas o a diagnosticar enfermedad o ambas}\right)=\frac{10+20+30}{100}=\boxed{0.60}$$

También se puede resolver utilizando el suceso contrario.

$$P\left(\text{A por recetas o a diagnosticar enfermedad o ambas}\right)=$$

$$=1-P\left(\text{Ni a por recetas ni a diagnosticar enfermedad}\right)=1-\frac{40}{100}=\boxed{0.60}$$

b) Son 40 las personas que acuden a diagnosticar enfermedad (casos posibles).
De esos 40 solo 10 acuden también a por recetas (casos favorables).

$$P\left(\text{Solicite recetas/ Acude a diagnosticar enfermedad}\right)=\frac{10}{40}=\boxed{0.25}$$

6. El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año sigue una distribución normal de media desconocida y varianza σ^2 = 6 libros^2: Se ha tomado una muestra de 10 estudiantes de Bachillerato y el número de libros que han leído han sido 4, 8, 2, 9, 3, 7, 5, 6, 7 y 4 libros.
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de libros leídos con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)
b) Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 64 estudiantes y un nivel de confianza del 95:96 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

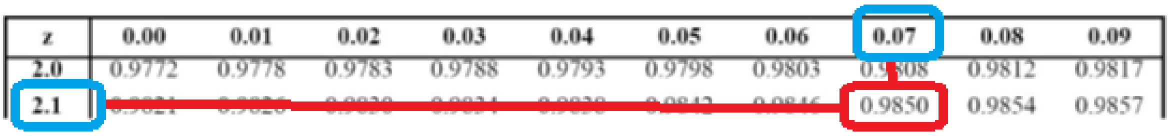
X = El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año.
Desviación típica = σ = $\sqrt{6}$ libros
X = N(μ, $\sqrt{6}$)

$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{4+8+2+9+3+7+5+6+7+4}{10} = 5.5\,libros$$

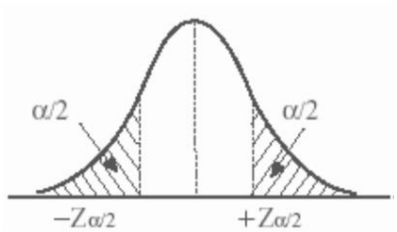
Tamaño de la muestra = n = 10

a) Con un nivel de confianza del 97 %

$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	[illegible]	0.9812	0.9817
2.1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9850	0.9854	0.9857



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} \simeq 1.6809$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

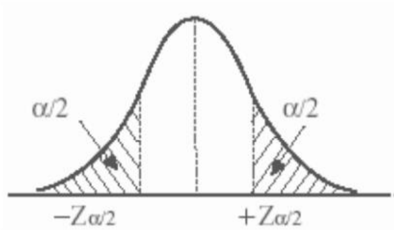
$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(5.5 - 1.6809, 5.5 + 1.6809\right) = \left(3.8191, 7.1809\right)$$

a) Para aumentar la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que aumentar el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y como σ es un valor dado, la única opción es disminuir el tamaño de muestra.

b) Con un nivel de confianza del 95.96 %

$1 - \alpha = 0{,}9596 \rightarrow \alpha = 0{,}0404 \rightarrow \alpha/2 = 0'0202 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9798 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.05}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.05 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{64}} \simeq \boxed{0.628}.$$

El error máximo es de aproximadamente 0.628 libros.

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+t+1)^2 & si\ x<-1\\ 1 & si\ x=-1\\ -x^2+(t+2)x+5 & si\ x>-1\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua *x = –1*? (0.5 puntos)
b) Para *t = 0*; calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo (–1, ∞). (0.5 puntos)
c) Para *t = 0*; calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en (–1, ∞). (0.5 puntos)

a) La función es continua si coinciden los limites laterales con el valor de la función en *x = –1*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x+t+1)^2=(-1+t+1)^2=t^2\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}-x^2+(t+2)x+5=-(-1)^2+(t+2)(-1)+5=-1-t-2+5=2-t\\ f(-1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2=2-t=1\Rightarrow\begin{cases}t^2=1\Rightarrow t=\sqrt{1}=\pm 1\\ 2-t=1\Rightarrow t=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{t=1}$$

b) En el intervalo (–1, ∞) la función es $f(x)=-x^2+(t+2)x+5$.

Para *t = 0* la función queda $f(x)=-x^2+2x+5$.

Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

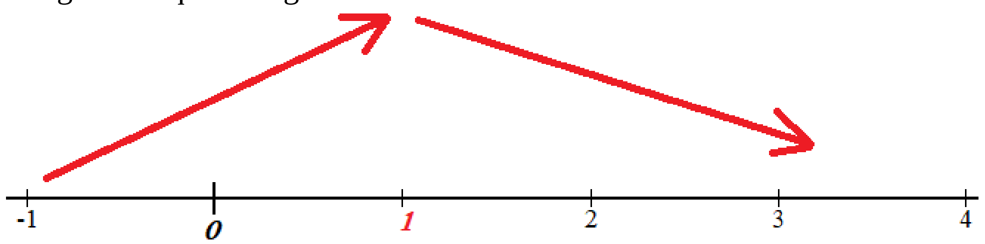
$$\left.\begin{array}{r}f(x)=-x^2+2x+5\Rightarrow f'(x)=-2x+2\\ f'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow -2x+2=0\Rightarrow 2x=2\Rightarrow\boxed{x=1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor obtenido.

En $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=2>0$. La función crece en $(-1,1)$

En $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(3)=-6+2=-4<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en *x = 1*.

Como $f(1)=-1^2+2+5=6$ las coordenadas del máximo relativo son (1, 6)

c) Por lo visto en el apartado anterior la función crece en $(-1,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$.

6. El número de socios de una protectora de animales durante los cinco primeros años de su existencia viene dado por la siguiente función $P(x)=x^3-6x^2+9x+4$ con x = años y $1\leq x\leq 5$.

a) ¿En qué intervalos aumenta el número de socios? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 puntos)
b) ¿Cuándo hay mayor número de socios y cuántos son? (0.75 puntos)
c) ¿En qué año son menos socios y cuántos hay? (0.75 puntos)

a) Derivamos e igualamos a cero.

$$P(x)=x^3-6x^2+9x+4 \Rightarrow P'(x)=3x^2-12x+9 \Rightarrow$$

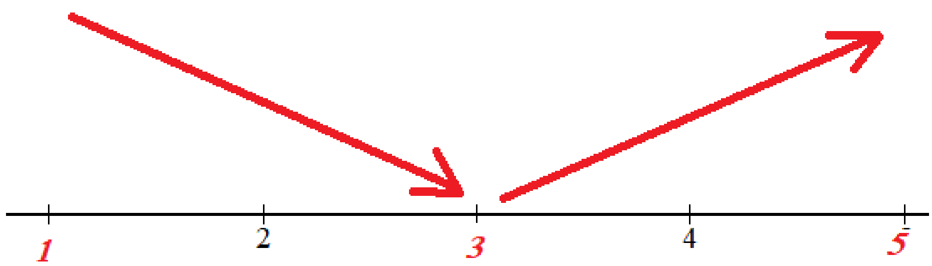
$$\Rightarrow P'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x+9=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

Vemos como es el signo de la derivada en (1. 3) y en (3, 5).

En (1. 3) tomamos *x = 2* y la derivada vale $P'(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+9=-3<0$. La función decrece en (1. 3).
En (3. 5) tomamos *x = 4* y la derivada vale $P'(4)=3\cdot 4^2-12\cdot 4+9=9>0$. La función crece en (3. 5).

La función sigue el esquema siguiente:



El número de socios aumenta entre los 3 y los 5 años. Disminuye entre el año1 y año 3.

b) El valor máximo estará situado en los extremos del intervalo.
Valoramos la función en los extremos del intervalo para averiguar en cual de esos valores es mayor.

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=1^3-6\cdot 1^2+9\cdot 1+4=8 \\ P(5)=5^3-6\cdot 5^2+9\cdot 5+4=24 \end{array}\right\}$$

El mayor número de socios es 24 y se produce en el año 5.

c) Mirando el esquema del apartado a) el menor número de socios se produce en el año 3.
Como $P(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3+4=4$ el número mínimo de socios es 4 en el año 3.