CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade Convocatoria ordinaria 2022	Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Para dos matrices A y B se verifica que:

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad 2A+B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices A y B

b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A\cdot X - B = X$ y calcule su valor.

EJERCICIO 2. Álgebra. En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €

a) Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

b) Represente gráficamente la región la región factible y calcule sus vértices.

c) Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

EJERCICIO 3. Análisis. Los costes de una empresa, en cientos de miles de euros, vienen dados por la función:

$C(t)=t^3-\dfrac{21}{2}t^2+30t-12$, t es el tiempo en años y $1\le t\le 6$

a) Calcule los costes máximos alcanzados. ¿En qué momento se producen?

b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de los costes. Determine el coste mínimo y en qué momento se alcanza.

c) ¿Cuáles son los costes al inicio y al final del periodo en estudio?

EJERCICIO 4. Análisis. Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & si\ x\le 1 \\ 2x-a & si\ x>1 \end{cases}$

a) Calcule el valor de parámetro *a* para que la función *f(x)* sea continua en todo R.

b) Para *a = 2* calcule los extremos relativos de la función *f(x)* y represéntela.

c) Calcule el área de la región delimitada por la función *f(x)*, para *a = 2*, y las rectas Y=0, X=0 y X=2.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. Un estudio revela que el 70% de las personas de una población sigue la serie de televisión A, el 60% sigue la serie B y el 30% sólo sigue la serie A.

a) ¿Qué porcentaje de la población sigue las dos series?

b) Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga alguna de las dos series?

c) Si elegimos al azar una persona que sigue la serie A, ¿cuál es la probabilidad de que siga también la serie B?

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Se sabe que la edad de los trabajadores en las fábricas de una zona sigue una distribución normal de desviación típica 10 años. Con una muestra de trabajadores de la zona el intervalo de confianza al 90% para la media de edad obtenido es (39.25, 44.75),

a) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada?
b) ¿Cuánto vale la media muestral?
c) ¿Cuál sería el error cometido a un nivel de confianza del 95%?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. Álgebra. Para dos matrices A y B se verifica que:

$A-B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$ y $2A+B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}$.

a) Calcule las matrices A y B

b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A\cdot X-B=X$ y calcule su valor.

a) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}A-B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}\\ 2A+B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}A-B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}\\ B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}-2A\end{array}\right\}\Rightarrow A-\left[\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}-2A\right]=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}+2A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow 3A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ -3 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & 3\\ -3 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}}\Rightarrow \boxed{B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X en la ecuación.

$$A\cdot X-B=X\Rightarrow A\cdot X-X=B\Rightarrow (A-I)X=B\Rightarrow \boxed{X=(A-I)^{-1}B}$$

Comprobamos que la matriz $A-I$ tiene inversa y la calculamos.

$$A-I=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow |A-I|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2+1=3\neq 0$$

$$(A-I)^{-1}=\frac{Adj\left((A-I)^T\right)}{|A-I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituimos y calculamos la matriz X.

$$X=(A-I)^{-1}B\Rightarrow X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2-4 & -1\\ 1+4 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-2/3 & -1/3\\ 5/3 & 1/3\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2. Álgebra. En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €

a) Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

b) Represente gráficamente la región la región factible y calcule sus vértices.

c) Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

a) Llamamos x = número de motores para motos, y = número de motores para coches.

Hacemos una tabla para organizar la información.

	Tiempo en trabajo manual	Tiempo en trabajo de máquina	Beneficio
Nº motores de moto (x)	$60x$	$20x$	$1500x$
Nº de motores de coche (y)	$45y$	$40y$	$2000y$
TOTAL	$60x+45y$	$20x+40y$	$1500x+2000y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como:

$$B(x,y)=1500x+2000y$$

Las restricciones son:

"*la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina*" → $60x+45y\le 120\cdot 60=7200;\quad 20x+40y\le 90\cdot 60=5400$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{r}60x+45y\le 7200\\ 20x+40y\le 5400\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}4x+3y\le 480\\ x+2y\le 270\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$4x+3y=480$

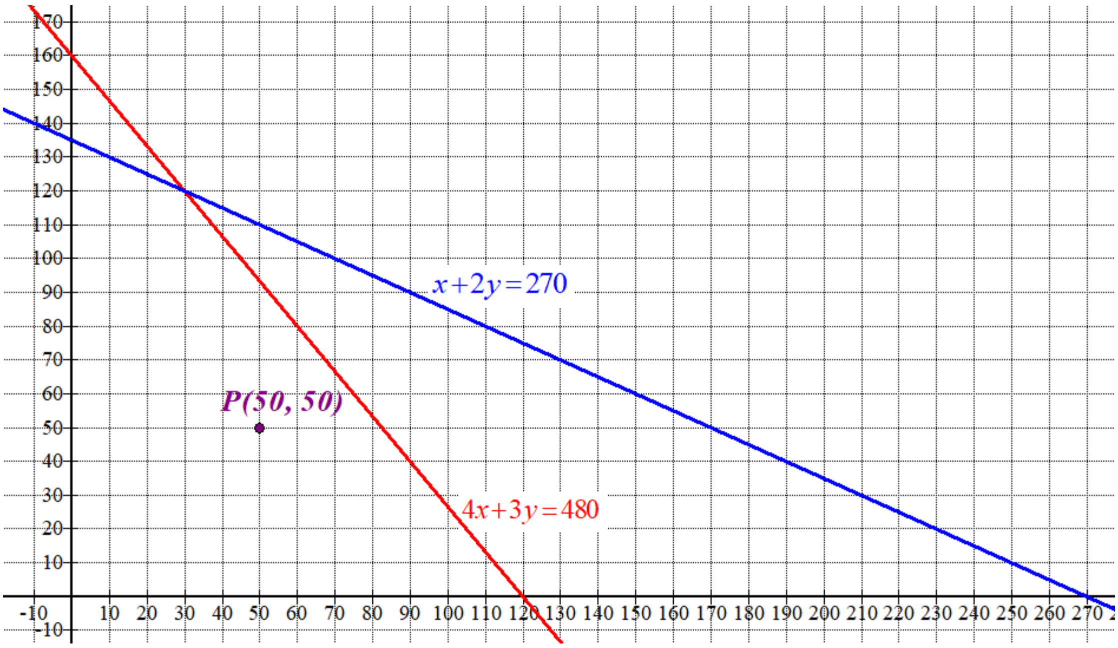
x	$y=\dfrac{480-4x}{3}$
0	160
30	120
120	0

$x+2y=270$

x	$y=\dfrac{270-x}{2}$
0	135
30	120
270	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

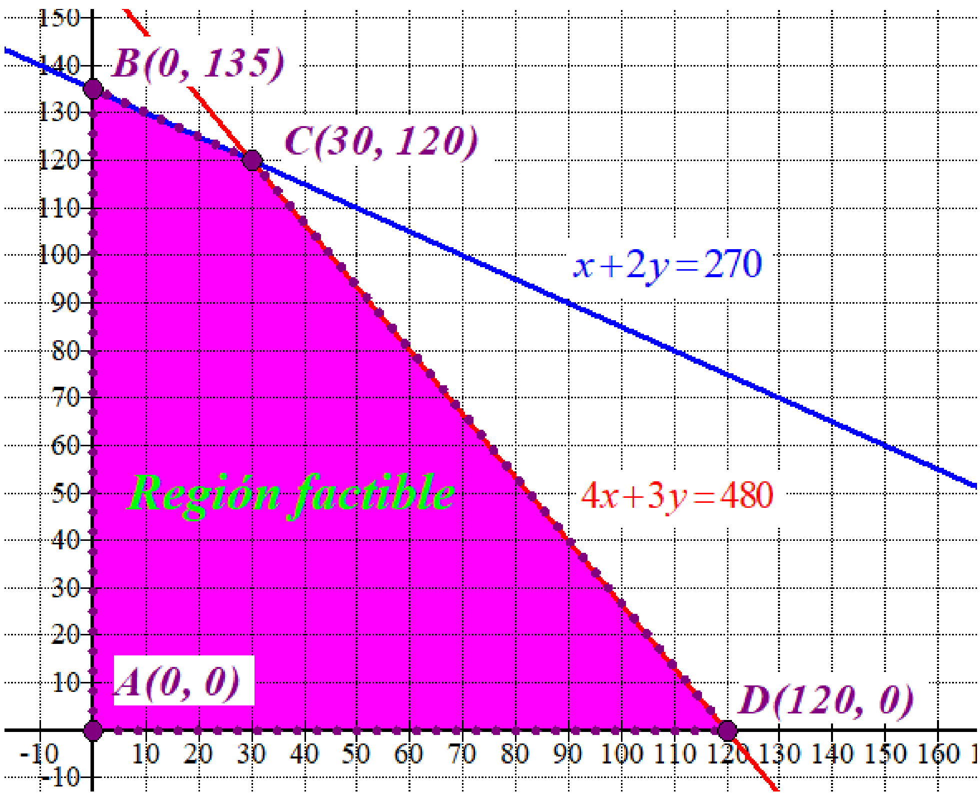


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{r} 4x+3y \le 480 \\ x+2y \le 270 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(50, 50) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 200+150 \le 480 \\ 50+100 \le 270 \\ 50 \ge 0;\ 50 \ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son A(0, 0); B(0, 135); C(30, 120) y D(120, 0).

c) Valoramos la función objetivo $B(x,y)=1500x+2000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0,0) → $B(0,0)=0$

B(0, 135) → $B(0,135)=0+270000=270.000$

C(30, 120) → $B(30,120)=45000+240000=$ 285.000 ¡Máximo!

D(120, 0) → $B(120,0)=180000+0=180.000$

El máximo beneficio es de 285.000 € y se produce en el vértice C (30, 120) que significa ensamblar mensualmente 30 motores de moto y 120 de coche.

EJERCICIO 3. Análisis. Los costes de una empresa, en cientos de miles de euros, vienen dados por la función:

$C(t)=t^3-\frac{21}{2}t^2+30t-12$, t es el tiempo en años y $1\le t\le 6$

a) Calcule los costes máximos alcanzados. ¿En qué momento se producen?
b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de los costes. Determine el coste mínimo y en qué momento se alcanza.
c) ¿Cuáles son los costes al inicio y al final del periodo en estudio?

a) Derivamos e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$C´(t)=3t^2-\frac{21}{2}2t+30=3t^2-21t+30$$

$$C´(t)=0\Rightarrow 3t^2-21t+30=0\Rightarrow t^2-7t+10=0\Rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{7+3}{2}=5=t\\ \frac{7-3}{2}=2=t\end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $[1,2)$ tomamos *t = 1.5* y la derivada vale

$C´(1.5)=3\cdot 1.5^2-21\cdot 1.5+30=5.25>0$. La función crece en $[1,2)$.

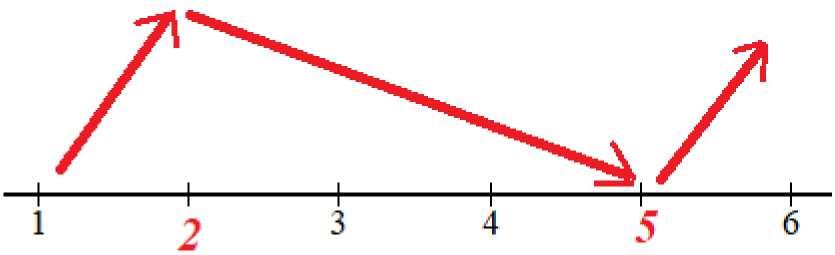
En el intervalo $(2,5)$ tomamos *t = 3* y la derivada vale $C´(3)=3\cdot 3^2-21\cdot 3+30=-6<0$.

La función decrece en $(2,5)$.

En el intervalo $(5,6]$ tomamos *t = 5.5* y la derivada vale

$C´(5.5)=3\cdot 5.5^2-21\cdot 5.5+30=5.25>0$. La función crece en $(5,6]$.

La función sigue el esquema siguiente:



En *t = 2* hay un máximo relativo.
Para obtener el máximo absoluto del coste comparamos el coste en *t = 2* y en *t = 6*.

Como $C(2)=2^3-\frac{21}{2}2^2+30\cdot 2-12=14$ y $C(6)=6^3-\frac{21}{2}6^2+30\cdot 6-12=6$

El máximo absoluto del coste se produce en *t = 2*.

El coste máximo es de 1.400.000 € y se produce el segundo año.

b) Según el esquema del apartado a) la función crece en $[1,2)\cup(5,6]$ y decrece en $(2,5)$.

Los costes crecen entre el primer y el segundo año, descienden entre el segundo y el quinto año y vuelven a crecer entre el quinto y el sexto año.

El coste mínimo se produce en *t = 1* o en *t = 5*. Comparamos los costes en esos años.

$$C(1)=1^3-\frac{21}{2}1^2+30\cdot 1-12=8.5 \quad \text{y} \quad C(5)=5^3-\frac{21}{2}5^2+30\cdot 5-12=0.5$$

El coste mínimo se produce en $t = 5$.

El coste mínimo es de 50.000 € y se produce el quinto año.

c) Como $C(1)=8.5$ y $C(6)=6$ el coste inicial es de 850.000 € y el final de 600.000 €.

EJERCICIO 4. Análisis. Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & si\ \ x\leq 1\\ 2x-a & si\ \ x>1\end{cases}$

a) Calcule el valor de parámetro *a* para que la función *f(x)* sea continua en todo R.
b) Para *a* = *2* calcule los extremos relativos de la función *f(x)* y represéntela.
c) Calcule el área de la región delimitada por la función *f(x)*, para *a* = *2*, y las rectas Y=0, X=0 y X=2.

a) Para que sea continua en R debe serlo en *x* = *1*.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} -x^2+1=-1^2+1=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x-a=2-a\\ f(1)=-1^2+1=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow 2-a=0\Rightarrow \boxed{a=2}$$

b) Para *a* = *2* la función es $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & si\ \ x\leq 1\\ 2x-2 & si\ \ x>1\end{cases}$ y es continua.

Calculamos la derivada en $\mathbb{R}-\{1\}$ y vemos cuando se anula.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & si\ \ x<1\\ 2 & si\ \ x>1\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}-2x=0\Rightarrow x=0\in(-\infty,1)\\ 2=0\quad \text{¡Imposible!}\qquad si\ \ x>1\end{cases}$$

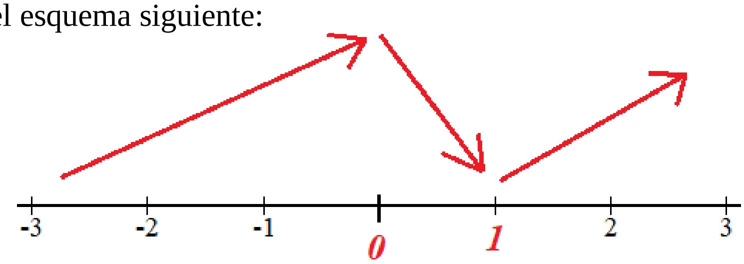
Tenemos un punto crítico en *x* = *0*. Estudiamos el signo de la derivada antes de 0, entre 0 y 1, y después de 1.

En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f'(-1)=-2(-1)=2>0$. La función es creciente en $(-\infty,0)$.

En el intervalo $(0,1)$ tomamos *x* = *0.5* y la derivada vale $f'(0.5)=-2\cdot 0.5=-1<0$. La función es decreciente en $(0,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x* = *2* y la derivada vale $f'(2)=2>0$. La función es creciente en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:

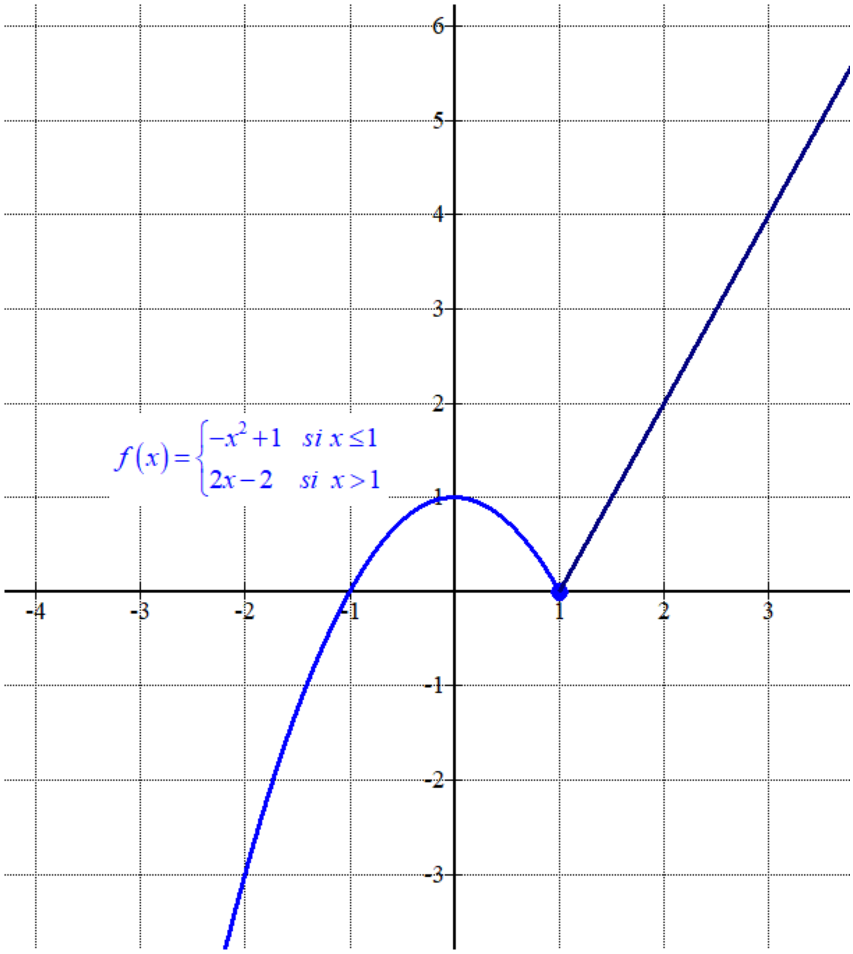


La función presenta un máximo relativo en *x* = *0*. Como $f(0)=-0^2+1=1$ el máximo relativo tiene coordenadas (0, 1).

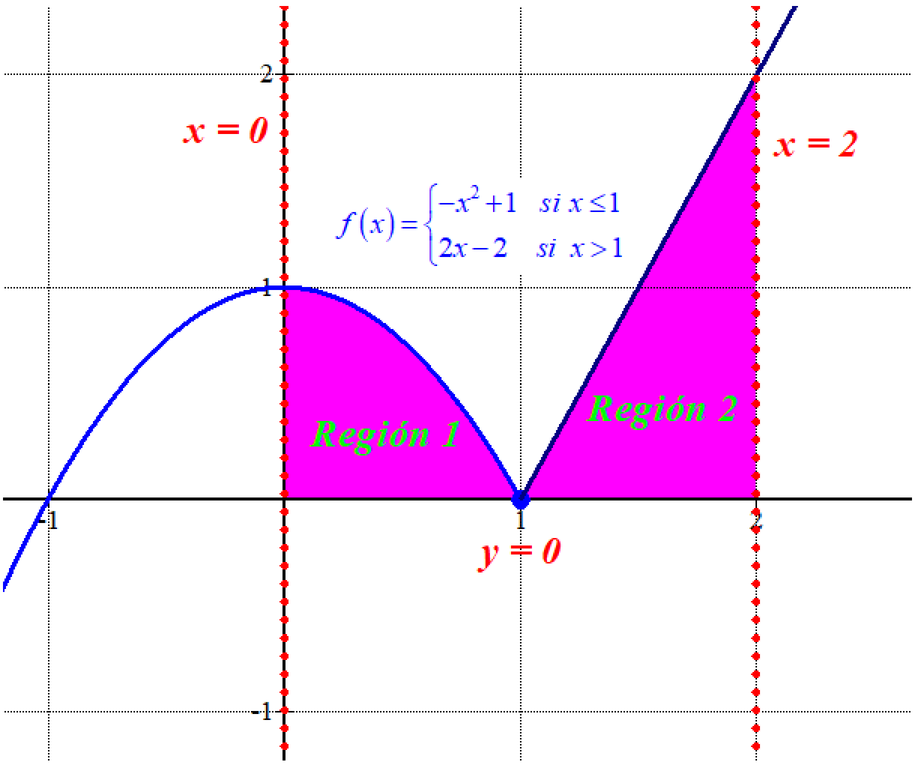
La función presenta un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = -1^2 + 1 = 0$ el mínimo relativo tiene coordenadas (1, 0).

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$f(x)$
-1	0
0	1
1	0
2	2



c) Nos piden hallar el área de la región del plano pintada de color rosa.



Hallamos el área de cada una de las regiones y el área pedida es la suma del valor de ambas.

$$Área\,1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 -x^2 + 1\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \left[-\frac{1^3}{3} + 1 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 0 \right] = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}u^2}$$

$$Área\,2 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 2x - 2\,dx = \left[x^2 - 2x \right]_1^2 = \left[2^2 - 4 \right] - \left[1^2 - 2 \right] = \boxed{1u^2}$$

$$\boxed{Área\,total = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \simeq 1.67\,u^2}$$

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. Un estudio revela que el 70% de las personas de una población sigue la serie de televisión A, el 60% sigue la serie B y el 30% sólo sigue la serie A.
a) ¿Qué porcentaje de la población sigue las dos series?
b) Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga alguna de las dos series?
c) Si elegimos al azar una persona que sigue la serie A, ¿cuál es la probabilidad de que siga también la serie B?

Hacemos una tabla de contingencia con los datos del ejercicio.

	Sigue la serie B	No sigue la serie B	
Sigue la serie A		**30**	**70**
No sigue la serie A			
	60		**100**

Completamos la tabla.

	Sigue la serie B	No sigue la serie B	
Sigue la serie A	**40**	**30**	**70**
No sigue la serie A	**20**	**10**	**30**
	60	**40**	**100**

a) Mirando en la tabla el 40 % sigue las dos series.

b) Mirando en la tabla sumamos los porcentajes de los que siguen las dos, los que siguen la A y no la B y los que siguen la B y no la A: 40 + 30 + 20 = 90.

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad es $\frac{90}{100} = \boxed{0.9}$

c) Hay 70 % que sigue la serie A y un 40 % sigue la serie A y la B.

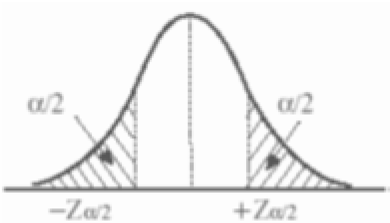
Aplicando la regla de Laplace la probabilidad es $\frac{n^o\, seguidores\ serie\ A\ y\ B}{n^o\, seguidores\ serie\ A} = \frac{40}{70} = \boxed{\frac{4}{7} \simeq 0.571}$

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Se sabe que la edad de los trabajadores en las fábricas de una zona sigue una distribución normal de desviación típica 10 años. Con una muestra de trabajadores de la zona el intervalo de confianza al 90% para la media de edad obtenido es (39.25, 44.75),
a) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada?
b) ¿Cuánto vale la media muestral?
c) ¿Cuál sería el error cometido a un nivel de confianza del 95%?

X = La edad de los trabajadores en las fábricas de una zona.
X = N(**μ**, 10)

a) Con un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow \alpha/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}645}$$



El intervalo de confianza es $\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right)$. El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza → $Error = \dfrac{44.75 - 39.25}{2} = 2.75$

Aplicamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.75 = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.75\sqrt{n} = 16.45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{16.45}{2.75} \Rightarrow n = \left(\frac{16.45}{2.75}\right)^2 \simeq 35.78$$

El tamaño de la muestra es de 36 trabajadores.

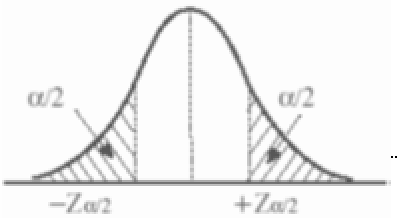
b) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza ya que el intervalo de confianza es $\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right)$.

El intervalo de confianza es (39.25, 44.75) → $\bar{x} = \dfrac{39.25 + 44.75}{2} = 42$

La media muestral es de 42 años.

c) Con un nivel de confianza del 95 %

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{36}} \simeq \boxed{3.267\,años}$$