UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2021 - 2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.
En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.
Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.
Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.
Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.
El tiempo disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Usamos una balanza de brazos muy sensible para pesar tres tipos de piezas (A, B y C) comparando su peso con el de una barrita que sabemos que pesa 13 gramos. Todas las piezas de un mismo tipo pesan igual. Descubrimos que:
(i) La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas;
(ii) tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B;
(iii) una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B.
¿Cuánto pesan las piezas de cada tipo? **[1.75 puntos]**
Si la relación (iii) hubiera sido que una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, al resolver el problema nos daríamos cuenta de que alguna relación debería ser falsa. ¿Por qué? **[0.75 puntos]**

1.2.- Una matriz cuadrada A se dice *idempotente* si $A^2 = A$.
(i) Estudia si hay matrices idempotentes 2 x 2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de *a* y *b*. **[2 puntos]**
(ii) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia A^{2022}. **[0.5 puntos]**

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos *(x, y)* que cumplen

$$\begin{aligned} &0 \le y,\ 0 \le x, \\ &x + y \le 6, \\ &2x + y \le 10,\ y \\ &x + 2y \le 10. \end{aligned}$$

[1 punto]

Averigua el valor máximo que alcanza en dicha región la función dada por

$$f(x,y) = 4x + 3y.$$

[1 punto]

Si dicho valor máximo se alcanza en el punto (x_0, y_0), ¿sabrías expresar una función cuyo máximo lo alcance en (y_0, x_0)? **[0.5 puntos]**

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Consideramos la función *f* dada (en los valores reales *x* donde la expresión tiene sentido) por

$$f(x)=\frac{3x-2}{x-1}$$

(i) ¿Cuál es el dominio de dicha función? **[0.3 puntos]**

(ii) Calcula la derivada *f ´(x)*. ¿En qué puntos *x* es $f\,'(x)=-1$? ¿En cuáles es $f\,'(x)=1$? ¿Tiene extremos relativos? **[1.1 puntos]**

(iii) Dibuja la gráfica de *f*, señalando los cortes con los ejes y las asíntotas horizontales y verticales. **[1.1 puntos]**

2.2.- Encuentra los valores de *a* y *b* que hacen que la función dada por

$$f(x)=x^3-ax^2-bx+1$$

cumpla las dos propiedades siguientes:

(i) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.

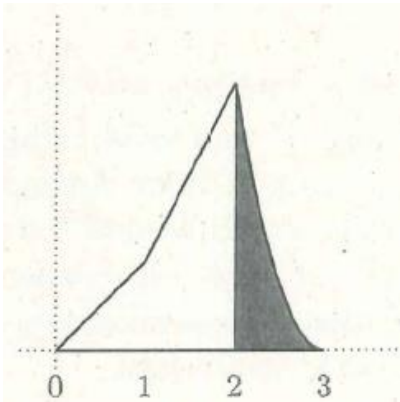
(ii) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

[1.75 puntos]

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y=f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene *f* en –1? **[0.75 puntos]**

2.3.- El diseño del nuevo logo de Climbing Sports se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x & si\ \ 0\le x<1,\\ 2x+a & si\ 1\le x<2,\\ b(x-3)^2 & si\ 2\le x\le 3.\end{cases}$$



(i) Calcula los valores de *a* y *b*. **[1 punto]**

(ii) El material de la parte más oscura elevará el coste de producción de las pruebas de la marca. ¿Cuánto vale el área de dicha parte? **[1.5 puntos]**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Un amigo meteorólogo nos ha facilitado algunas probabilidades de lluvia en la mañana del próximo sábado, concretamente para los siguientes sucesos:

A = ”hay lluvia entre las 8 y las 9”;

B = “hay lluvia entre las 8 y las 10”

C = “hay lluvia entre las 10 y las 14”.

Nos ha dicho que P(A) = 0.4, P(B) = 0.5 y P(C) = 0.7. A nosotros nos interesa sobre todo la probabilidad de D = “hay lluvia entre las 9 y las 10”. No nos la ha dado, pero nos ha dicho que $P(A\cap D)=0.35$

(i) ¿Cómo interpretarías $P(B)-P(A)$? Calcula entonces el valor de P(D). ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva de 9 a 10? **[1.5 puntos]**

(ii) Nos dice además que B y C son independientes, porque estará despejado entre las 10 y las 12. Calcula entonces la probabilidad de que llueva durante la mañana (entre las 8 y las 14).

[1 puntos]

3.2.- Al 40 % de la población española no le gusta el vino. En España, de cada 1000 personas 7 son riojanas, pero entre quienes gustan del vino la proporción de personas es 1/120.

Escogemos una persona española al azar y resulta que es riojana. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el vino? **[2.5 puntos]**

3.3.- En los poblados maruba utiliza el punde como media de distancia, y toman lo largo de una valla para fijar su valor. Este es distinto en cada poblado. Queremos estimar el valor medio de los distintos pundes en metros, considerando que la distribución es normal con desviación típica de 4 metros y que las medidas en todos los poblados son independientes entre sí. A partir de una muestra de 25 pundes calculamos un intervalo de confianza para situar dicho valor medio, y resulta el intervalo $(74.864, 77.496)$.

(i) ¿Cuál es el valor promedio de nuestra muestra? **[0.5 puntos]**

(ii) ¿Con qué nivel de confianza hemos obtenido el intervalo? **[1.5 puntos]**

(iii) ¿Cuántos pundes necesitaríamos medir para reducir el error muestral a la mitad, con el mismo nivel de confianza? **[0.5 puntos]**

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Usamos una balanza de brazos muy sensible para pesar tres tipos de piezas (A, B y C) comparando su peso con el de una barrita que sabemos que pesa 13 gramos. Todas las piezas de un mismo tipo pesan igual. Descubrimos que:
(i) La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas;
(ii) tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B;
(iii) una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B.
¿Cuánto pesan las piezas de cada tipo? **[1.75 puntos]**
Si la relación (iii) hubiera sido que una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, al resolver el problema nos daríamos cuenta de que alguna relación debería ser falsa. ¿Por qué? **[0.75 puntos]**

Llamamos "x" al peso de cada pieza A, "y" al peso de cada pieza B, "z" al peso de cada pieza C.

"La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas" → $13 = z + 2y$
"tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B" → $3x = 2y$
"una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B" → $z = 2x + y$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 13 = z + 2y \\ 3x = 2y \\ z = 2x + y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 13 = 2x + y + 2y \\ 3x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 13 = 2x + 3y \\ 3x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 13 = 2x + 3y \\ x = \dfrac{2y}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 = 2\frac{2y}{3} + 3y \Rightarrow 39 = 4y + 9y \Rightarrow 39 = 13y \Rightarrow \boxed{y = \frac{39}{13} = 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{6}{3} = 2} \Rightarrow \boxed{z = 4 + 3 = 7}$$

Cada pieza A pesa 2 gramos, cada pieza B pesa 3 gramos y cada pieza C pesa 7 gramos.

Si cambiamos la tercera ecuación por la nueva condición:

"una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C" → $y = 2x + z$ nos queda el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 13 = z + 2y \\ 3x = 2y \\ y = 2x + z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 13 = z + 2(2x + z) \\ 3x = 2(2x + z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 13 = z + 4x + 2z \\ 3x = 4x + 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 13 = 4x + 3z \\ 0 = x + 2z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 13 = 4x + 3z \\ -2z = x \end{array}\right\} \Rightarrow 13 = 4(-2z) + 3z \Rightarrow 13 = -8z + 3z \Rightarrow 13 = -5z \Rightarrow \boxed{z = \frac{-13}{5}}$$

No es posible pues sale un peso **negativo** para la pieza C. Alguna de las afirmaciones debe ser errónea pues nos lleva a una solución ilógica.

1.2.- Una matriz cuadrada A se dice *idempotente* si $A^2 = A$.

(i) Estudia si hay matrices *idempotentes* 2 x 2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de *a* y *b*. **[2 puntos]**

(ii) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia A^{2022}. **[0.5 puntos]**

(i)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+a & 2+b \\ 2a+ab & a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 4+a=2 \\ 2+b=1 \\ 2a+ab=a \\ a+b^2=b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \boxed{a=-2} \\ \boxed{b=-1} \\ 2a+ab=a \\ a+b^2=b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2(-2)+(-2)(-1)=-2 \\ -2+(-1)^2=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -4+2=-2 \\ -2+1=-1 \end{matrix}\right\} \text{¡Se cumplen!}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

En el primer tipo de matriz si es posible y los valores son *a = –2* y *b = –1*.
Repetimos este razonamiento para el segundo tipo de matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+ab & 2b+b \\ 2a+a & ab+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 4+ab=2 \\ 3b=b \\ 3a=a \\ ab+1=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4+ab=2 \\ 2b=0 \rightarrow \boxed{b=0} \\ 2a=0 \rightarrow \boxed{a=0} \\ ab+1=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4+0\cdot 0=2 \\ 0\cdot 0+1=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4+0=2 \\ 0+1=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

En este segundo caso no es posible que una matriz de esa forma sea idempotente.

(ii) Calculamos las potencias sucesivas de una matriz A idempotente.

$$\begin{aligned} &A^2 = A \\ &A^3 = A^2A = A\cdot A = A^2 = A \\ &A^4 = A^3A = A\cdot A = A^2 = A \\ &A^5 = A^4A = A\cdot A = A^2 = A \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ &A^{2022} = A^{2021}A = A\cdot A = A^2 = A \end{aligned}$$

Se cumple que $A^{2022} = A$.

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos *(x, y)* que cumplen

$$\begin{array}{l} 0 \le y,\ 0 \le x, \\ x + y \le 6, \\ 2x + y \le 10,\ y \\ x + 2y \le 10. \end{array}$$ **[1 punto]**

Averigua el valor máximo que alcanza en dicha región la función dada por

$$f(x, y) = 4x + 3y.$$ **[1 punto]**

Si dicho valor máximo se alcanza en el punto (x_0, y_0), ¿sabrías expresar una función cuyo máximo lo alcance en (y_0, x_0)? **[0.5 puntos]**

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos *(x, y)* que satisfacen las inecuaciones.

$x \ge 0;\ y \ge 0$ *El primer cuadrante*

$x + y = 6$

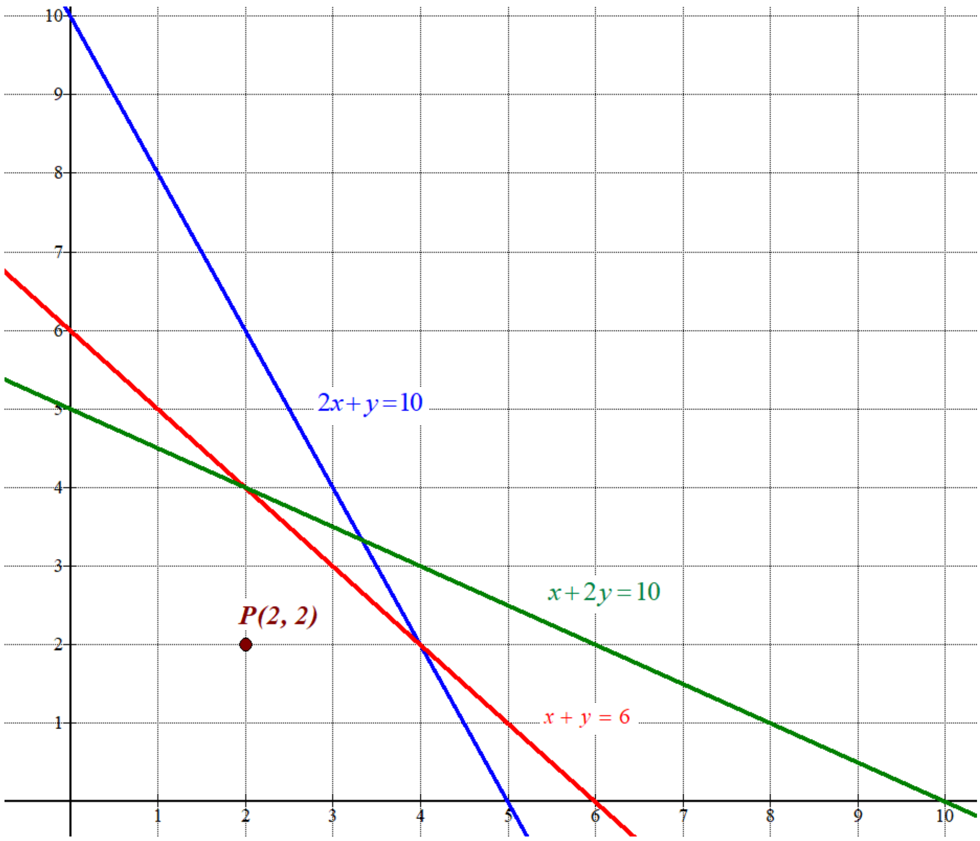
x	$y = 6 - x$
0	6
6	0

$2x + y = 10$

x	$y = 10 - 2x$
0	10
5	0

$x + 2y = 10$

x	$y = \frac{10 - x}{2}$
0	5
10	0

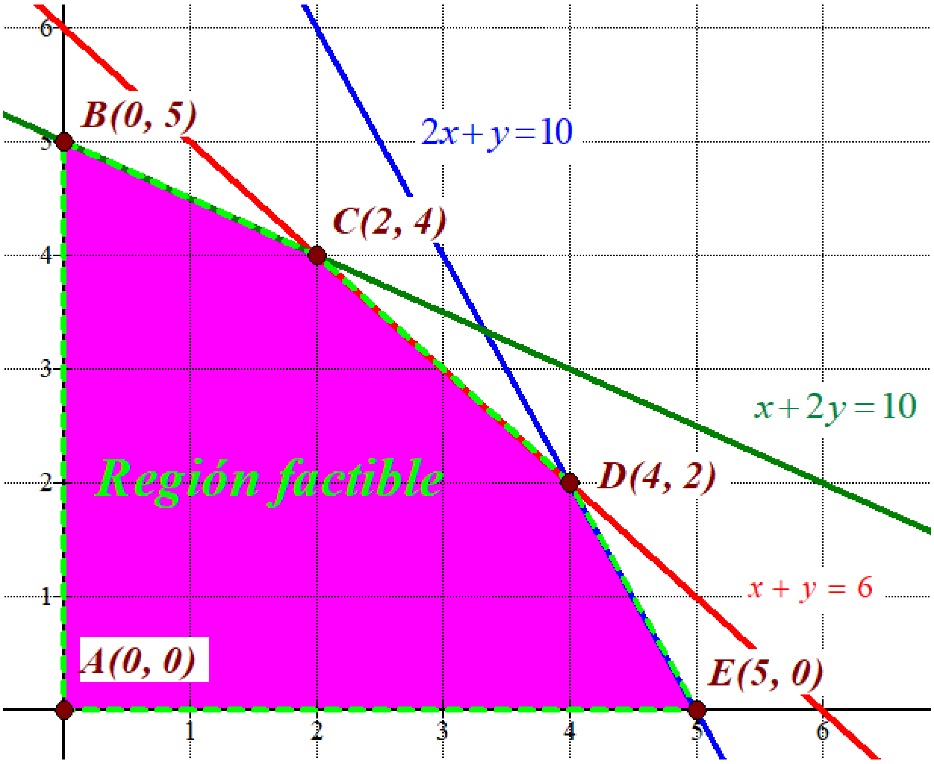


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 0 \le y,\ 0 \le x, \\ x + y \le 6, \\ 2x + y \le 10, \\ x + 2y \le 10. \end{array}\right\}$ la región del plano que cumple las inecuaciones es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja, verde y azul.

Comprobamos que el punto P(2, 2) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le 2,\ 0 \le 2, \\ 2+2 \le 6, \\ 2\cdot 2+2 \le 10, \\ 2+2\cdot 2 \le 10. \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de rosa la región factible.



Valoramos la función objetivo $f(x,y)=4x+3y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $f(0,0)=0$

B(0, 5) → $f(0,5)=15$

C(2, 4) → $f(2,4)=8+12=20$

D(4, 2) → $f(4,2)=16+6=22$ ¡Máximo!

E(5, 0) → $f(5,0)=20+0=20$

El máximo valor de $f(x,y)=4x+3y$ en la región factible es 22.

Si deseamos que el máximo pase de ser (x_0,y_0) a ser (y_0,x_0) debemos de cambiar el papel de la "x" y la "y" en la función objetivo. Podría ser la función $g(x,y)=4y+3x$. Esta función tendrá el máximo valor en C(2, 4) en lugar de D(4, 2) que es donde se alcanza el máximo valor de $f(x,y)=4x+3y$.

Lo comprobamos: $g(0,0)=0$, $g(0,5)=20$, $g(2,4)=16+6=22$¡Máximo!, $g(4,2)=8+12=20$, $g(5,0)=15$.

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Consideramos la función *f* dada (en los valores reales *x* donde la expresión tiene sentido) por

$$f(x)=\frac{3x-2}{x-1}$$

(i) ¿Cuál es el dominio de dicha función? **[0.3 puntos]**

(ii) Calcula la derivada *f ´(x)*. ¿En qué puntos *x* es $f'(x)=-1$? ¿En cuáles es $f'(x)=1$? ¿Tiene extremos relativos? **[1.1 puntos]**

(iii) Dibuja la gráfica de *f*, señalando los cortes con los ejes y las asíntotas horizontales y verticales. **[1.1 puntos]**

(i) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x)=\frac{3x-2}{x-1}\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow \boxed{Dominio\ f(x)=\mathbb{R}-\{1\}}$$

(ii)

$$f'(x)=\frac{3(x-1)-1\cdot(3x-2)}{(x-1)^2}=\frac{3x-3-3x+2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}}$$

$$f'(x)=-1\Rightarrow\frac{-1}{(x-1)^2}=-1\Rightarrow\frac{1}{(x-1)^2}=1\Rightarrow 1=(x-1)^2\Rightarrow\begin{cases}x-1=1\to\boxed{x=2}\\x-1=-1\to\boxed{x=0}\end{cases}$$

$$f'(x)=1\Rightarrow\frac{-1}{(x-1)^2}=1\Rightarrow -1=(x-1)^2\Rightarrow \text{¡No es posible!}$$

Para que tenga extremos relativos debe ser *f ´(x)* = 0. Esto no es posible pues $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$.

La derivada de la función tiene un valor siempre negativo. La función siempre es decreciente. No tiene extremos relativos.

(iii)

Puntos de corte con los ejes.

$$x=0\Rightarrow f(0)=\frac{3\cdot 0-2}{0-1}=2\Rightarrow(0,2)$$

$$y=0\Rightarrow\frac{3x-2}{x-1}=0\Rightarrow 3x-2=0\Rightarrow 3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}\Rightarrow\left(\frac{2}{3},0\right)$$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{3x-2}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

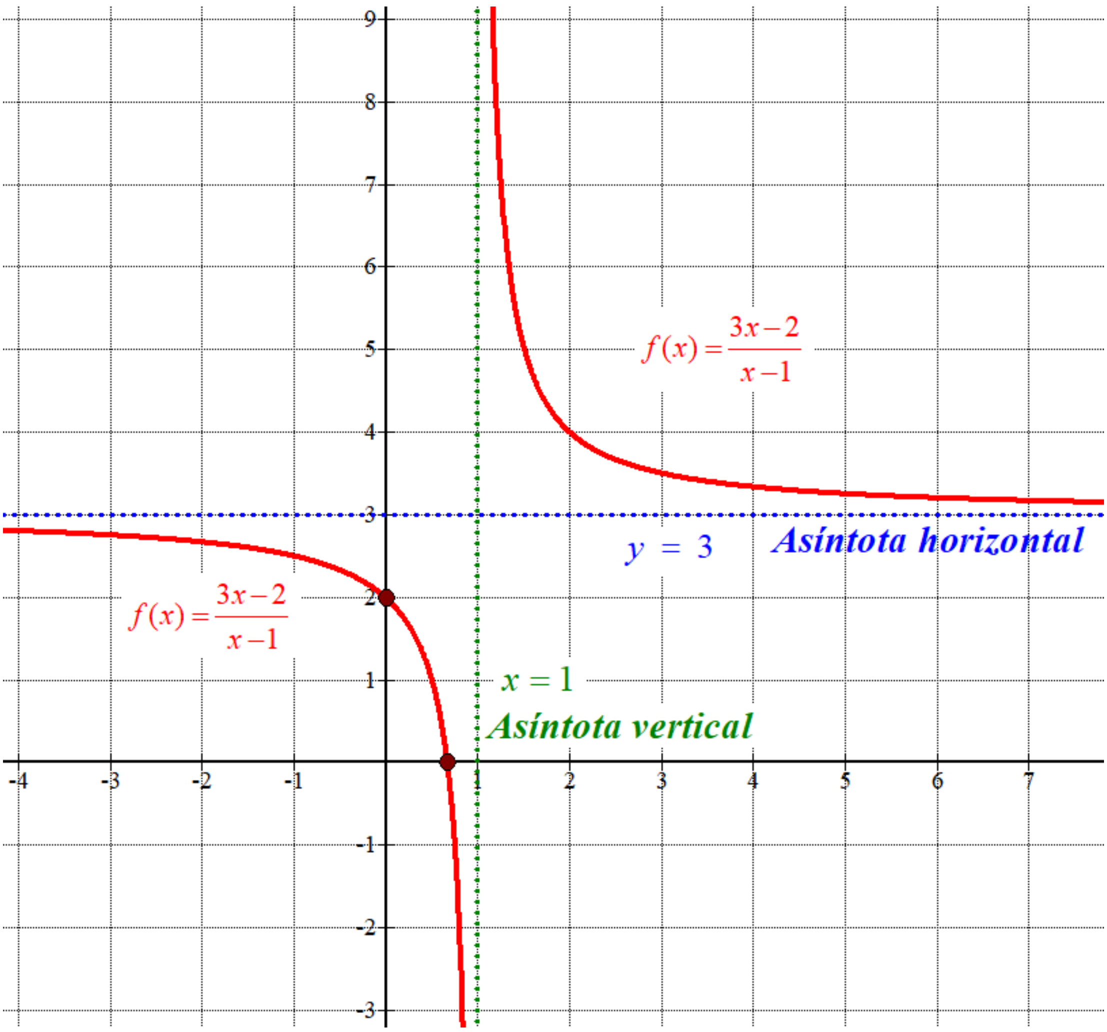
Asíntota horizontal. $y=b$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x-1} = 3$$

$y=3$ es asíntota horizontal.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$y=\frac{3x-2}{x-1}$
-1	-2.5
0	2
$2/3$	0
2	4
3	3.5



2.2.- Encuentra los valores de *a* y *b* que hacen que la función dada por

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$$

cumpla las dos propiedades siguientes:
(i) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.
(ii) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

[1.75 puntos]

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene *f* en –1? **[0.75 puntos]**

Si su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax - b \\ f'(0) = f'(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 0^2 - 2a\cdot 0 - b = 3\cdot 1^2 - 2a\cdot 1 - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b = 3 - 2a - b \Rightarrow 3 = 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

Si tiene un extremo relativo en $x = -1$ significa que la derivada se anula en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x) = 3x^2 - 3x - b \\ f'(-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(-1)^2 - 3(-1) - b = 0 \Rightarrow 3 + 3 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

Los valores buscados son $a = \frac{3}{2}$ y $b = 6$.

Las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1 son paralelas pues tienen el mismo valor de derivada (pendiente de la recta tangente).

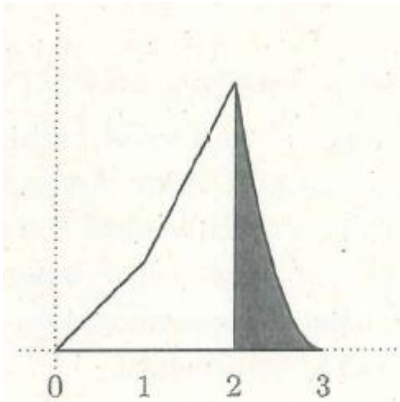
Para ver que tipo de extremo hay en –1 hallamos la derivada segunda y vemos el signo de la misma en dicho valor.

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f''(x) = 6x - 3 \Rightarrow f''(-1) = 6(-1) - 3 = -9 < 0$$

La función presenta un máximo relativo en $x = -1$.

2.3.- El diseño del nuevo logo de Climbing Sports se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x & si\ \ 0\le x<1, \\ 2x+a & si\ 1\le x<2, \\ b(x-3)^2 & si\ \ 2\le x\le 3. \end{cases}$$



(i) Calcula los valores de *a* y *b*. **[1 punto]**
(ii) El material de la parte más oscura elevará el coste de producción de las pruebas de la marca. ¿Cuánto vale el área de dicha parte? **[1.5 puntos]**

La función debe ser continua.

En $x = 1$ es continua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+a=2+a \\ f(1)=2+a \\ Continua\ en\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=2+a \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

En $x = 2$ es continua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 2x-1=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} b(x-3)^2=b \\ f(2)=b(2-3)^2=b \\ Continua\ en\ x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=3}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 3$.

La función queda $f(x)=\begin{cases} x & si\ \ 0\le x<1, \\ 2x-1 & si\ 1\le x<2, \\ 3(x-3)^2 & si\ \ 2\le x\le 3. \end{cases}$

Entre 2 y 3 la función es $f(x)=3(x-3)^2=3(x^2-6x+9)=3x^2-18x+27$

El área de la región indicada es la integral definida entre 2 y 3 de la función.

$$Área=\int_2^3 3x^2-18x+27dx=\left[x^3-9x^2+27x\right]_2^3=\left[3^3-9\cdot 3^2+27\cdot 3\right]-\left[2^3-9\cdot 2^2+27\cdot 2\right]=$$

$$=27-81+81-8+36-54=\boxed{1u^2}$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Un amigo meteorólogo nos ha facilitado algunas probabilidades de lluvia en la mañana del próximo sábado, concretamente para los siguientes sucesos:

A = ”hay lluvia entre las 8 y las 9”;

B = “hay lluvia entre las 8 y las 10”

C = “hay lluvia entre las 10 y las 14”.

Nos ha dicho que P(A) = 0.4, P(B) = 0.5 y P(C) = 0.7. A nosotros nos interesa sobre todo la probabilidad de D = “hay lluvia entre las 9 y las 10”. No nos la ha dado, pero nos ha dicho que $P(A\cap D)=0.35$

(i) ¿Cómo interpretarías $P(B)-P(A)$? Calcula entonces el valor de P(D). ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva de 9 a 10? **[1.5 puntos]**

(ii) Nos dice además que B y C son independientes, porque estará despejado entre las 10 y las 12. Calcula entonces la probabilidad de que llueva durante la mañana (entre las 8 y las 14). **[1 puntos]**

(i) $P(B)-P(A)$ es la probabilidad de que llueva entre las 9 y las 10, pero no entre las 8 y las 9.

Como el suceso A está contenido en B tenemos que $P(B\cap \overline{A})=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)$

Calculamos P(D).

$$\left.\begin{array}{r} B=A\cup D\Rightarrow P(B)=P(A\cup D)=P(A)+P(D)-P(A\cap D)\\ P(A)=0.4\\ P(B)=0.5\\ P(A\cap D)=0.35 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5=0.4+P(D)-0.35\Rightarrow \boxed{P(D)=0.5-0.4+0.35=0.45}$$

Que “no llueva entre las 9 y las 10” es el suceso contrario de D.

$$P(\text{No llueva entre las 9 y las 10})=P(\overline{D})=1-P(D)=1-0.45=\boxed{0.55}$$

(ii) B y C son independientes implica que $P(B\cap C)=P(B)P(C)=0.5\cdot 0.7=0.35$.

Que llueva entre las 8 y las 14 es el suceso $B\cup C$.

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=0.5+0.7-0.35=\boxed{0.85}$$

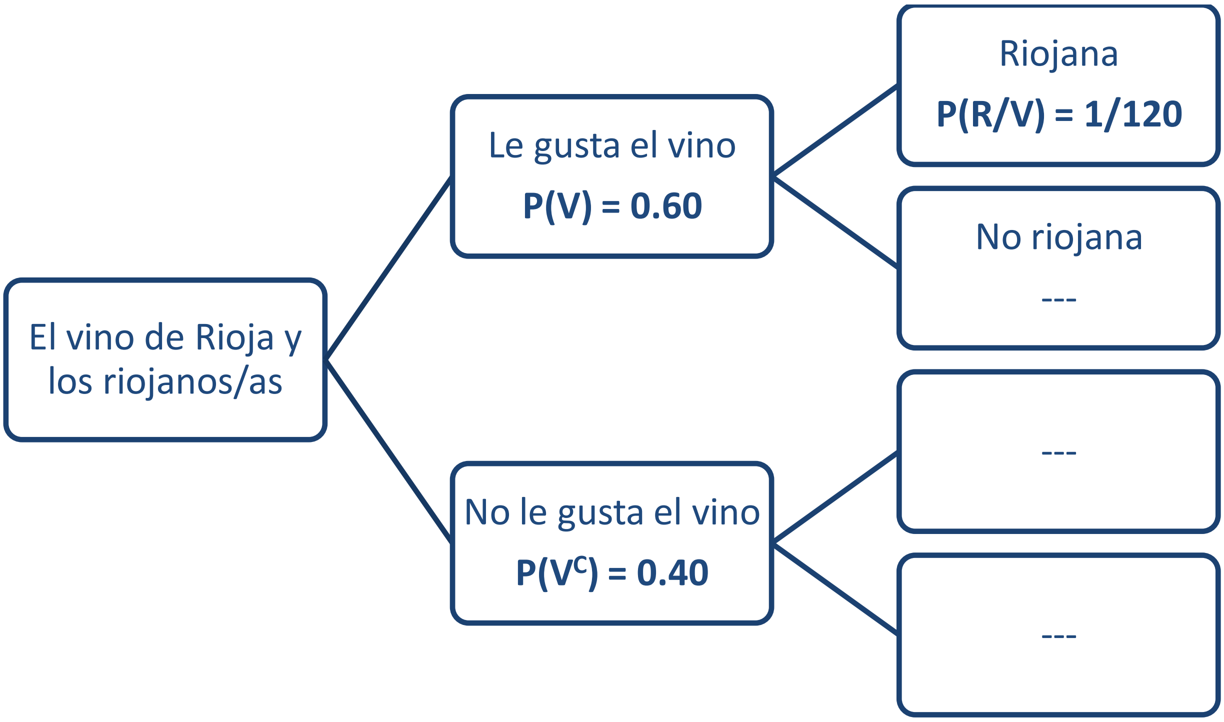
3.2.- Al 40 % de la población española no le gusta el vino. En España, de cada 1000 personas 7 son riojanas, pero entre quienes gustan del vino la proporción de personas es 1/120.

Escogemos una persona española al azar y resulta que es riojana. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el vino? **[2.5 puntos]**

Llamamos R = "ser riojano" y V = "le gusta el vino".

Los datos del ejercicio son $P(V^C) = 0.40$, $P(R) = 7/1000$, $P(V/R) = 1/120$

Hacemos un diagrama de árbol.



Nos piden una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/R) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{P(V)P(R/V)}{P(R)} = \frac{0.60 \cdot \frac{1}{120}}{\frac{7}{1000}} = \boxed{\frac{5}{7} \simeq 0.71}$$

3.3.- En los poblados maruba utiliza el punde como media de distancia, y toman lo largo de una valla para fijar su valor. Este es distinto en cada poblado. Queremos estimar el valor medio de los distintos pundes en metros, considerando que la distribución es normal con desviación típica de 4 metros y que las medidas en todos los poblados son independientes entre sí. A partir de una muestra de 25 pundes calculamos un intervalo de confianza para situar dicho valor medio, y resulta el intervalo $(74.864, 77.496)$.

(i) ¿Cuál es el valor promedio de nuestra muestra? **[0.5 puntos]**

(ii) ¿Con qué nivel de confianza hemos obtenido el intervalo? **[1.5 puntos]**

(iii) ¿Cuántos pundes necesitaríamos medir para reducir el error muestral a la mitad, con el mismo nivel de confianza? **[0.5 puntos]**

X = "medida en metros del punde". $X = N(\mu, 4)$

Tamaño de la muestra = n = 25.

(i) El promedio muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{74.864 + 77.496}{2} = 76.18\,metros$$

Calculamos el error del intervalo de confianza como la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \bar{x} = \frac{77.496 - 74.864}{2} = 1.316\,metros$$

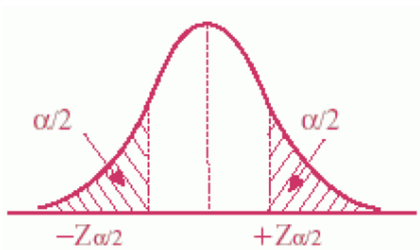
Utilizamos la fórmula del error para hallar el valor de $z_{\alpha/2}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.316 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{4}{\sqrt{25}} \Rightarrow 1.316 = z_{\alpha/2} \cdot 0.8 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.316}{0.8} = 1.645$$

Averiguamos el nivel de confianza a partir del valor de $z_{\alpha/2} = 1.645$.

$$z_{\alpha/2} = 1.645 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos} \\ \text{en la tabla}\end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{0.9495 + 0.95053}{2} \simeq 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.90$$



El nivel de confianza es del 90 %.

iii) Para que el error sea de la mitad debería ser de $\frac{1.316}{2} = 0.658$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.658 = 1.645 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.658\sqrt{n} = 1.645 \cdot 4 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.645 \cdot 4}{0.658} = 10 \Rightarrow \boxed{n = 100}$$

Para reducir el error a la mitad necesitamos tomar una muestra de 100 pundes.

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	[illegible]	[illegible]	0.5
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	[illegible]	[illegible]	0.5
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	[illegible]	[illegible]	0.6
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	[illegible]	[illegible]	0.6
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	[illegible]	[illegible]	0.6
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	[illegible]	[illegible]	0.7
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	[illegible]	[illegible]	0.7
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	[illegible]	[illegible]	0.77
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	[illegible]	[illegible]	0.80
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	[illegible]	[illegible]	0.83
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	[illegible]	[illegible]	0.85
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	[illegible]	[illegible]	0.87
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	[illegible]	[illegible]	0.89
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	[illegible]	[illegible]	0.91
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	[illegible]	[illegible]	0.92
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	[illegible]	[illegible]	0.94
1.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.94950	0.95053	0.95
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96