uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2021-2022** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.

b) Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A-B)X=Y$.

A.2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por

$$7y-8x\le 3400, \qquad 3x-8y\le 2000, \qquad 11x+14y\ge 9500, \qquad x\le 1200, \qquad y\le 1000$$

a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x,y)=2x+y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

A.3. (2 puntos) Considere las funciones reales de variable real $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=-x^2+ax+3$.

a) Se define *h(x)* de la siguiente manera:

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & si\ x\le 1 \\ g(x), & si\ x>1 \end{cases}$$

¿Qué valor debe darle a la constante $a\in\mathbb{R}$ para que la función h sea continua en $\mathbb{R}$?

b) Para $a = 2$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de f y de g.

A.4. (2 puntos) Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatorio es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E=A\cup B$. Además, suponga que $P(A\cap B)=0,2$ y $P(B)=0,7$.

a) Calcule $P(A^C)$.

b) Calcule $P(A^C\cup B^C)$.

Nota: A^C y B^C son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

A.5. (2 puntos) Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95% para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.

a) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.

b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

B.1. (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} x+ay+z&=2 \\ x-az&=0 \\ x+y+z&=2 \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelva el sistema para *a = 0*.

B.2. (2 puntos)

a) Determine los valores de los parámetros $a,b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ verifique que *f(2) = 4* y *f ´(2) = 0.*

b) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

B.3. (2 puntos) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, I(x), en miles de euros, vienen expresados por la función

$$I(x) = x\frac{170-0.85x}{5}$$

en la que *x* representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.

a) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda *x* y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

b) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $C(x)/x$, no supere los diez mil euros.

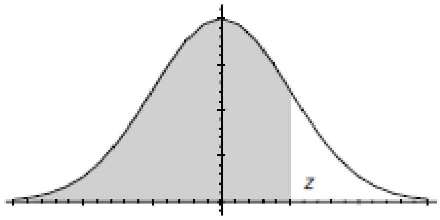
Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

B.4. (2 puntos) Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30% de las invitaciones, Berta el 40% y Carla las restantes. El 2% de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3% y 1%, respectivamente.
a) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.
b) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

B.5. (2 puntos) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.
a) Calcule el valor de la media muestral.
b) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real *a* para que A tenga inversa.
b) Calcule, para *a = 1*, la solución del sistema $(A-B)X = Y$.

a) Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + 0 + a + 0 + a = 4a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

La matriz A tiene inversa cuando *a* sea distinto de 0.

b) Para *a = 1* existe la inversa de A. Comprobamos si existe la inversa de $A - B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - B| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Calculamos su inversa para resolver el sistema con cálculo matricial.

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-B)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{Adj\left((A-B)^T\right)}{|A-B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$(A-B)X=Y \Rightarrow X=(A-B)^{-1}Y$$

Sustituimos el valor de las matrices y resolvemos.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}-1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{4} \\ z=-2 \end{cases}}$$

A.2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por

$$7y-8x\le 3400,\qquad 3x-8y\le 2000,\qquad 11x+14y\ge 9500,\qquad x\le 1200,\qquad y\le 1000$$

a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x,y)=2x+y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

a) Representamos las rectas asociadas a cada inecuación que delimitarán la región S.

$7y-8x=3400$

x	$y=\frac{3400+8x}{7}$
100	600
800	1400

$3x-8y=2000$

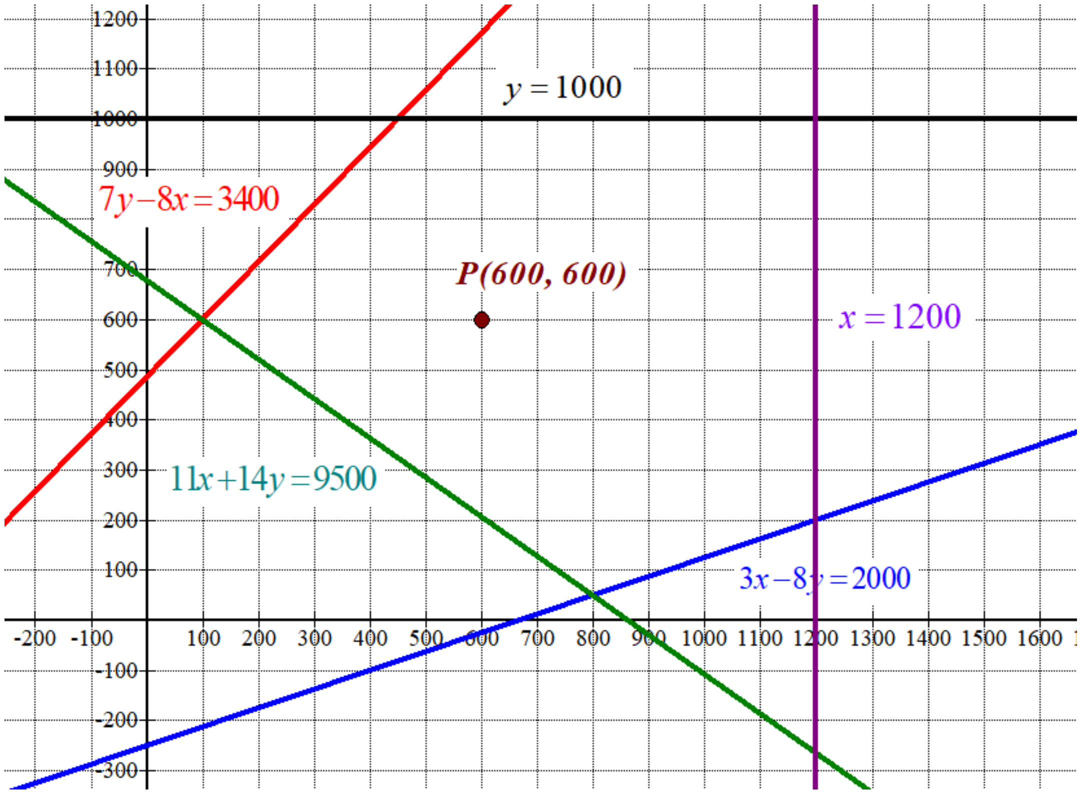
x	$y=\frac{3x-2000}{8}$
800	50
1200	200

$11x+14y=9500$

x	$y=\frac{9500-11x}{14}$
100	600
800	50

$x=1200$ Recta vertical

$y=1000$ Recta horizontal



Como las inecuaciones son:

$$7y-8x\le 3400,\qquad 3x-8y\le 2000,\qquad 11x+14y\ge 9500,\qquad x\le 1200,\qquad y\le 1000$$

Cambiamos la "y" de lado de la inecuación para que esté positiva en todas las inecuaciones:

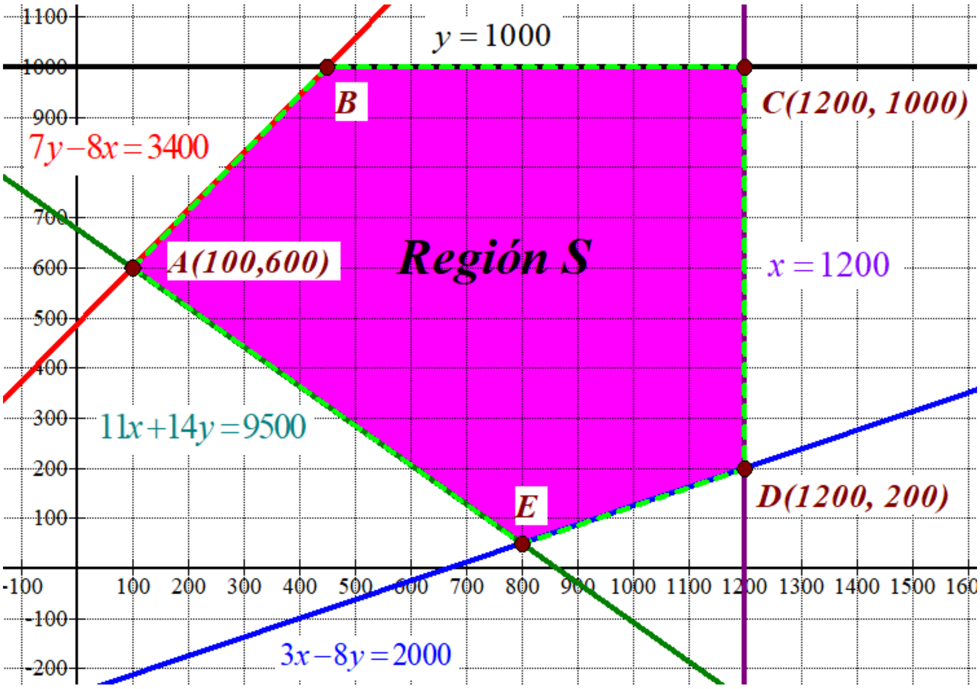
Roja	Azul	Verde	Violeta	Negra
$-8x+7y\le 3400,$	$3x\le 8y+2000,$	$11x+14y\ge 9500,$	$x\le 1200,$	$y\le 1000$

La región S del plano que cumple todas las inecuaciones está situada por debajo de la recta roja, por encima de la recta azul y de la verde, a la izquierda de la recta vertical violeta y por debajo de la recta horizontal negra.

Comprobamos que el punto P(600, 600) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$4200-4800\le 3400,\quad 1800-4800\le 2000,\quad 6600+14\cdot 600\ge 9500,\quad 600\le 1200,\quad 600\le 1000$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región S es la región coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Nos falta determinar las coordenadas de los vértices B y E.

$$B \rightarrow \left.\begin{array}{l} 7y-8x=3400 \\ y=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow 7000-8x=3400 \Rightarrow 8x=7000-3400=3600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3600}{8}=450 \Rightarrow \boxed{B(450,1000)}$$

$$E \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-8y=2000 \\ 11x+14y=9500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \times(11) \rightarrow 3x-8y=2000 \\ \times(-3) \rightarrow 11x+14y=9500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 33x-88y=22000 \\ -33x-42y=-28500 \end{array}\right\}$$

$$-130y=-6500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{6500}{130}=50 \Rightarrow 3x-400=2000 \Rightarrow 3x=2400 \Rightarrow x=\frac{2400}{3}=800 \Rightarrow \boxed{E(800,50)}$$

Los vértices de la región S son: A(100, 600), B(450, 1000), C(1200, 1000), D(1200, 200) y E(800, 50)

b) Valoro la función $f(x,y)=2x+y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

A(100, 600) → $f(100,600)=200+600=800$ ¡Mínimo!

B(450, 1000) → $f(450,1000)=900+1000=1900$

C(1200, 1000) → $f(1200,1000)=2400+1000=3400$

D(1200, 200) → $f(1200,200)=2400+200=2600$

E(800, 50) → $f(800,50)=1600+50=1650$

El valor mínimo de la función $f(x,y)=2x+y$ en la región S es 800 y se alcanza en el punto A(100, 600).

A.3. (2 puntos) Considere las funciones reales de variable real $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=-x^2+ax+3$.

a) Se define *h(x)* de la siguiente manera:

$$h(x)=\begin{cases} f(x), \ si \ x\leq 1 \\ g(x), \ si \ x>1 \end{cases}$$

¿Qué valor debe darle a la constante $a\in\mathbb{R}$ para que la función *h* sea continua en $\mathbb{R}$?

b) Para *a = 2*, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de *f* y de *g*.

a) La función *h(x)* está definida como:

$$h(x)=\begin{cases} x^2-4x+3, \ si \ x\leq 1 \\ -x^2+ax+3, \ si \ x>1 \end{cases}$$

La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ pues son funciones polinómicas y continuas.

Vemos que pasa en el cambio de definición *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2-4x+3=1^2-4+3=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} -x^2+ax+3=-1^2+a+3=2+a \\ h(1)=1^2-4+3=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

La función *h(x)* es continua en *x = 1* si *a = –2*.

b) Para *a = 2* las funciones son $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=-x^2+2x+3$.

Buscamos los puntos de intersección de sus gráficas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4x+3=-x^2+2x+3\Rightarrow 2x^2-6x=0\Rightarrow 2x(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

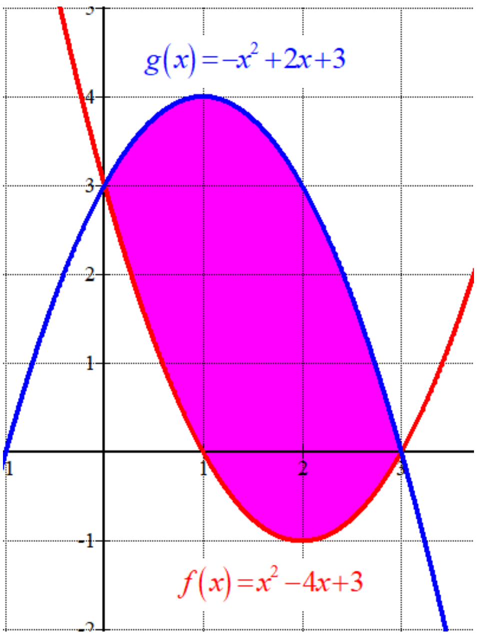
El área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de *f* y de *g* se obtiene con la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$Área=\left|\int_0^3 (x^2-4x+3)-(-x^2+2x+3)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_0^3 2x^2-6x\,dx\right|=\left|\left[2\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_0^3\right|=$$

$$=\left|\left[2\frac{3^3}{3}-3\cdot 3^2\right]-\left[2\frac{0^3}{3}-3\cdot 0^2\right]\right|=$$

$$=|18-27|=\boxed{9u^2}$$



A.4. (2 puntos) Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatorio es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además, suponga que $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(B) = 0,7$.

a) Calcule $P(A^C)$.

b) Calcule $P(A^C \cup B^C)$.

Nota: A^C y B^C son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

Si $E = A \cup B$ implica que $P(E) = P(A \cup B) \Rightarrow 1 = P(A \cup B)$

a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 1 = P(A) + 0.7 - 0.2 \Rightarrow P(A) = 1 - 0.7 + 0.2 = 0.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5}$$

b)

$$P(A^C \cup B^C) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ley de Morgan} \\ \mathrm{P}(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) \end{array} \right\} = P\left((A \cap B)^C\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = \boxed{0.8}$$

A.5. (2 puntos) Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95% para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.
a) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.
b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

a) La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza pues el intervalo de confianza se obtiene con la fórmula $\left(p-Error,\ p+Error\right)$.

Como el intervalo de confianza es (0.2, 0.3) la proporción muestral es $\frac{0.3+0.2}{2}=0.25$.

La proporción de tornillos con defectos en la muestra es del 25 %.

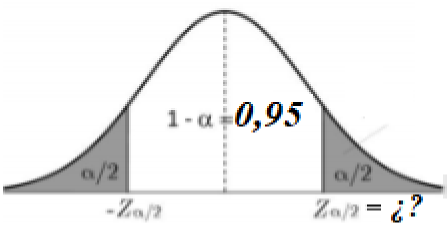
El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza:

$$Error=\frac{0.3-0.2}{2}=0.05$$

El error máximo es del 5 %.

b) Para un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}=1.96$$



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}=1.96\sqrt{\frac{0.25\cdot 0.75}{700}}\simeq 0.032$$

El error máximo sería del 3.2 %

B.1. (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=2 \\ x-az=0 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelva el sistema para *a = 0*.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0-a^2+1-0-a+a=-a^2+1$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+1=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1$$

Distinguimos 3 casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1 \quad y \quad a \neq 1$

En este caso el determinante de A no se anula y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única).

CASO 2. $a=-1$

La matriz A/B queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 2^a \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 3^a - 2\cdot\text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 4 \end{pmatrix}}_{A/B}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a=1$

La matriz A/B queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila 2}^{\text{a}}-\text{Fila 1}^{\text{a}}}\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & -2\\ \hline 0 & -1 & -2 & -2\\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva fila 2}^{\text{a}}}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila 3}^{\text{a}}-\text{Fila 1}^{\text{a}}}\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1 & -2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva fila 3}^{\text{a}}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & -2\\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 0\end{pmatrix}}_{A/B}$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $a\neq\pm 1$ el sistema es compatible determinado (única solución), si $a=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $a=-1$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Para $a = 0$ la situación es la analizada en el caso 1 y el sistema es compatible determinado.

El sistema queda $\left.\begin{array}{r}x+z=2\\ x=0\\ x+y+z=2\end{array}\right\}$. Lo resolvemos

$$\left.\begin{array}{r}x+z=2\\ \boxed{x=0}\\ x+y+z=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\boxed{z=2}\\ y+z=2\end{array}\right\}\Rightarrow y+2=2\Rightarrow\boxed{y=0}$$

La solución del sistema es: $x = 0, y = 0, z = 2$**.**

B.2. (2 puntos)

a) Determine los valores de los parámetros $a,b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ verifique que *f(2) = 4* y *f ´(2) = 0.*

b) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x)=x+\frac{1}{x}$.

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax+\frac{b}{x} \\ f(2)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+\frac{b}{2}=4 \Rightarrow \boxed{4a+b=8}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax+\frac{b}{x} \Rightarrow f'(x)=a-\frac{b}{x^2} \\ f'(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a-\frac{b}{2^2}=0 \Rightarrow 4a-b=0 \Rightarrow \boxed{b=4a}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación obtenida y determinamos el valor de *a* y *b*.

$$\left.\begin{array}{l} 4a+b=8 \\ b=4a \end{array}\right\} \Rightarrow 4a+4a=8 \Rightarrow 8a=8 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=4}$$

Los valores buscados son *a = 1* y *b = 4.*

b) La función $g(x)=x+\frac{1}{x}$ tiene como dominio todos los números reales menos el 0.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} x+\frac{1}{x}=0+\frac{1}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to \infty} g(x)=\lim_{x\to \infty} x+\frac{1}{x}=\infty+\frac{1}{\infty}=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}+\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{1}{x^2}=1+\frac{1}{\infty}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}x+\frac{1}{x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$y=x$ es asíntota oblicua.

B.3. (2 puntos) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, I(x), en miles de euros, vienen expresados por la función

$$I(x) = x\frac{170-0.85x}{5}$$

en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x)=10+2x+x^2$.

a) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.
b) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $C(x)/x$, no supere los diez mil euros.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

a) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.

$$B(x)=I(x)-C(x)=x\frac{170-0.85x}{5}-\left(10+2x+x^2\right)=x(34-0.17x)-10-2x-x^2$$

$$B(x)=34x-0.17x^2-10-2x-x^2=-1.17x^2+32x-10$$

Derivo e igualo a cero la derivada en busca de sus puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{l} B'(x)=-2.34x+32 \\ B'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2.34x+32=0 \Rightarrow x=\frac{32}{2.34}=\frac{1600}{117}\simeq 13.675$$

Sustituimos en la derivada segunda y vemos su signo.

$$B''(x)=-2.34 \Rightarrow B''(13.675)=-2.34<0$$

La función beneficio tiene un máximo en $x = 13.68$

Como $B\left(\frac{1600}{117}\right)=-1.17\left(\frac{1600}{117}\right)^2+32\frac{1600}{117}-10=\frac{24430}{117}\simeq 208.803$ podemos decir que el máximo beneficio que se puede conseguir es de 208803 € y se consigue con una demanda de 13675 litros de fertilizante.

b) La función coste medio tiene la expresión: $f(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{10+2x+x^2}{x}=\frac{10}{x}+2+x$.

Busco el valor de x que hace este coste medio igual a 10.

$$f(x)=10 \Rightarrow 10=\frac{10}{x}+2+x \Rightarrow 10x=10+2x+x^2 \Rightarrow x^2-8x+10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-40}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{24}}{2}=4\pm\sqrt{6}=\begin{cases} 4+\sqrt{6}\simeq 6.45=x \\ 4-\sqrt{6}\simeq 1.55=x \end{cases}$$

Vemos como es el crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*.

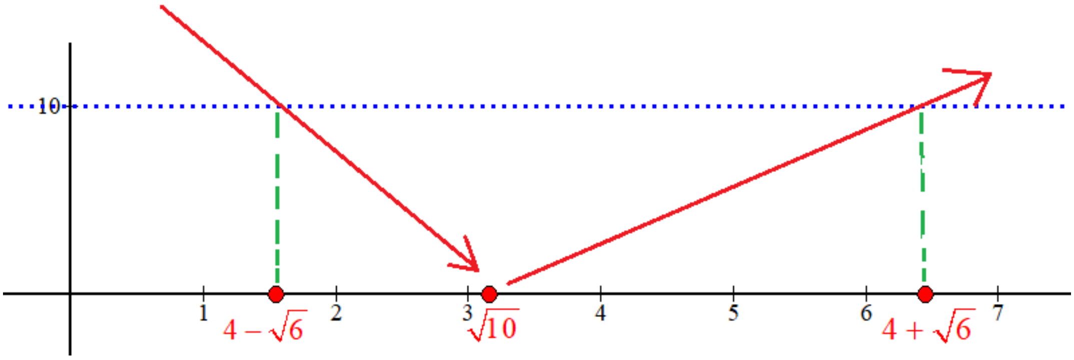
$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{10}{x}+2+x \Rightarrow f'(x)=-\frac{10}{x^2}+1 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{10}{x^2}+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10+x^2=0 \Rightarrow x^2=10 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{10}\simeq 3.16}$$

En $(0,3.16)$ tomo *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=-\frac{10}{1^2}+1=-9<0$. La función decrece en $(0,3.16)$.

En $(3.16,+\infty)$ tomo *x = 4* y la derivada vale $f'(4)=-\frac{10}{4^2}+1=\frac{3}{8}>0$. La función crece en $(3.16,+\infty)$.

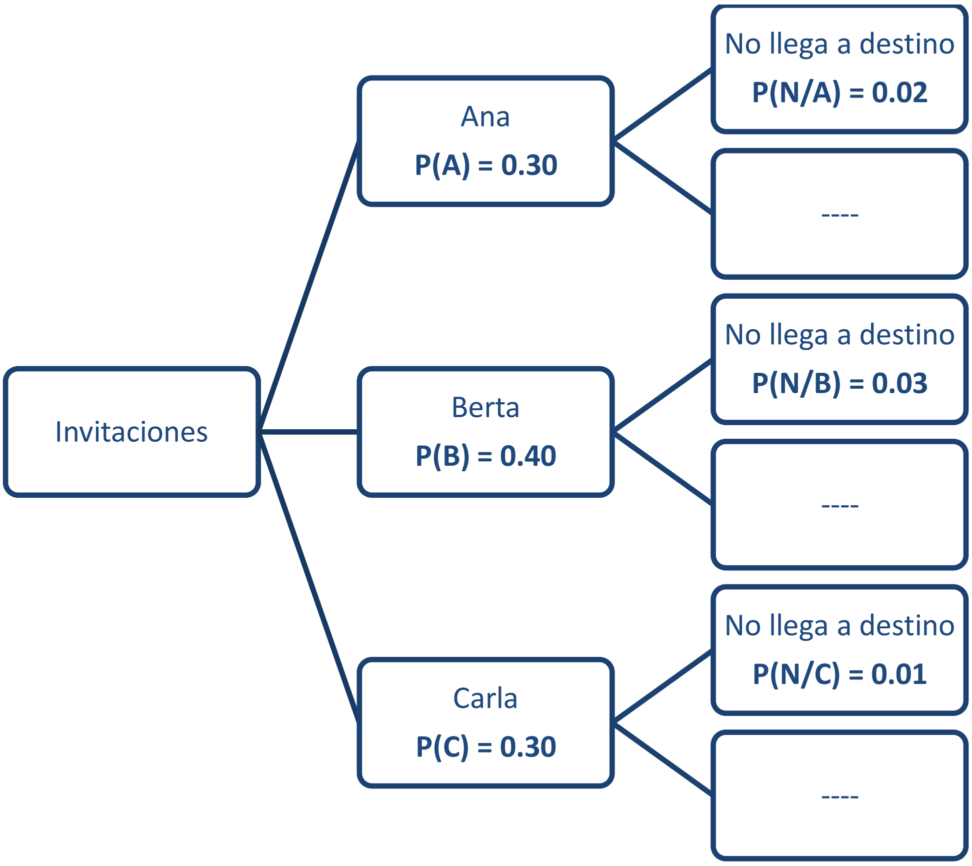
La función sigue el esquema siguiente.



El coste medio está por debajo de 10 mil euros entre los valores de demanda 1550 y 6450 litros de fertilizante.

B.4. (2 puntos) Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30% de las invitaciones, Berta el 40% y Carla las restantes. El 2% de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3% y 1%, respectivamente.
a) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.
b) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

Llamamos A = "invitación enviada por Ana", B =" invitación enviada por Berta", C = "invitación enviada por Carla". N = "invitación no llega a destino".
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(N) = P(A)P(N/A) + P(B)P(N/B) + P(C)P(N/C) =$$

$$= 0.3 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.01 = \boxed{0.021}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A)P(N/A)}{P(N)} = \frac{0.3 \cdot 0.02}{0.021} = \boxed{\frac{2}{7} \simeq 0.286}$$

B.5. (2 puntos) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.
a) Calcule el valor de la media muestral.
b) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

a)

X = N(μ, 15)

La media muestral es el valor central del intervalo.

$$\bar{x} = \frac{157.125+182.875}{2} = \boxed{170}$$

b) Tamaño de muestra es $n = 9$.

Calculamos el error del intervalo de confianza como la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{182.875-157.125}{2} = 12.875$$

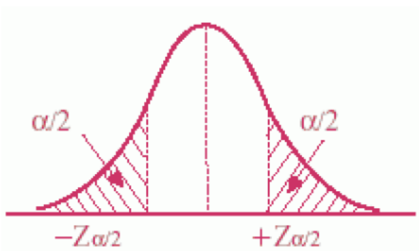
Utilizamos la fórmula del error para hallar el valor de $z_{\alpha/2}$

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 12.875 = z_{\alpha/2}\cdot\frac{15}{\sqrt{9}} \Rightarrow 12.875 = z_{\alpha/2}\cdot 5 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{12.875}{5} = 2.575$$

Averiguamos el nivel de confianza a partir del valor de $z_{\alpha/2}$.

$$z_{\alpha/2} = 2.575 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos}\\ \text{en la tabla}\end{matrix}\right\} \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = \frac{0.9949+0.9951}{2} = 0.995 \Rightarrow 2-\alpha = 1.99 \Rightarrow 1-\alpha = 0.99$$

El nivel de confianza es del 99 %.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	[illegible]	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	[illegible]	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	[illegible]	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	[illegible]	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	[illegible]	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	[illegible]	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	[illegible]	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	[illegible]	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	[illegible]	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	[illegible]	[illegible]
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	[illegible]	[illegible]
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	[illegible]	[illegible]
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	[illegible]	[illegible]
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	[illegible]	[illegible]
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	[illegible]	[illegible]
2,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9949	0,9951
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	[illegible]	[illegible]
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980