Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2021-2022

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

EJERCICIO 1:

Se considera la siguiente matriz dependiente del parámetro real k:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & k\\ k & 1 & k\end{pmatrix}.$$

i) Determine los valores de k para los cuales A tiene inversa. (2 puntos)
ii) Para k = 1, calcule la matriz inversa de A. (5 puntos)
iii) Para k = 0, calcule $\left(A-2A^t\right)^2$. (3 puntos)

EJERCICIO 2:

Una empresa fabrica dos productos P1 y P2, con un coste de fabricación de 20 y 15 euros/kg, respectivamente. Para ello utiliza tres recursos (R1, R2 y R3). La siguiente tabla muestra la cantidad necesaria de cada recurso para obtener un kg de cada producto y la disponibilidad semanal de los recursos. Determine cuántos kg de cada producto deberá fabricar semanalmente esta empresa si desea minimizar el coste de producción, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg.

	P1	P2	Disponibilidad semanal
R1	6	3	180
R2	4	5	200
R3	1	1.5	70

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si fabricación del producto P2 se encarece y su coste pasa a ser 20 euros/kg. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

i) Calcule la derivada de la siguiente función: $y=\dfrac{3}{(2x-3)^2}+\ln\left(2x^4-3\right)$. (3 puntos)

ii) Calcule la siguiente integral: $\int\left(sen2x+e^{x/5}\right)dx$. (3 puntos)

iii) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \dfrac{x}{2x^2+1}dx$. (3 puntos)

EJERCICIO 4:

Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$, responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine el valor de los parámetros a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=1$ y la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ tenga pendiente $m=-2$. (4 puntos)

ii) Tomando los valores $a=-2$ y $b=-4$, determine los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x)$. (6 puntos)

EJERCICIO 5:

Se considera que el 4% de los deportistas federados consumen algún tipo de sustancia no permitida para mejorar su rendimiento. Se ha diseñado una nueva prueba de detección con dos posibles resultados: positivo y negativo. La prueba identifica correctamente el consumo de estas sustancias el 92% de los casos. Sin embargo, si un deportista no consume estas sustancias, la prueba da positivo en el 10% de los casos. Se selecciona un deportista al azar. Calcule (use 4 decimales):

i) La probabilidad de que obtenga un resultado positivo en la prueba. (3 puntos)

ii) La probabilidad de que sea consumidor y la prueba tenga resultado negativo. (3 puntos)

iii) La probabilidad de que no sea consumidor sabiendo que la prueba ha dado resultado negativo. (4 puntos)

EJERCICIO 6:

En una encuesta realizada a 300 jóvenes navarros entre los 18 y los 30 años, 180 contestaron que utilizaban habitualmente una determinada red social.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que no utilizan dicha red social, con un nivel de confianza del 96%. (5 puntos)

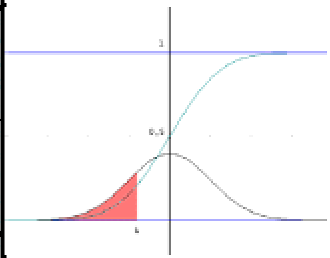
ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan habitualmente la red social: [0.544563, 0.655437]. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



SOLUCIONES

EJERCICIO 1:

Se considera la siguiente matriz dependiente del parámetro real k:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & k\\ k & 1 & k\end{pmatrix}.$$

i) Determine los valores de *k* para los cuales A tiene inversa. (2 puntos)
ii) Para k = 1, calcule la matriz inversa de A. (5 puntos)
iii) Para k = 0, calcule $\left(A-2A^t\right)^2$. (3 puntos)

i) Para que tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & k\\ k & 1 & k\end{vmatrix}=k+2k^2-6k+k=2k^2-4k$$

$$|A|=0\Rightarrow 2k^2-4k=0\Rightarrow 2k\left(k-2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ k-2=0\Rightarrow k=2\end{cases}$$

Para que tenga inversa la matriz A el valor de *k* debe ser distinto de 0 y de 2.

ii) Para k = 1 la matriz A tiene inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1+2-6+1=-2$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 1\\ 4 & 3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1/2 & -1/2\\ -2 & -3/2 & 5/2\end{pmatrix}}$$

iii) Para $k = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - 2A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 2-6 & 0 \\ 3-4 & -1+2 & 0-2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(A - 2A^t\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -4-4 & 8 \\ -1-1 & 4+1-2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left(A - 2A^t\right)^2 = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 8 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2:

Una empresa fabrica dos productos P1 y P2, con un coste de fabricación de 20 y 15 euros/kg, respectivamente. Para ello utiliza tres recursos (R1, R2 y R3). La siguiente tabla muestra la cantidad necesaria de cada recurso para obtener un kg de cada producto y la disponibilidad semanal de los recursos. Determine cuántos kg de cada producto deberá fabricar semanalmente esta empresa si desea minimizar el coste de producción, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg.

	P1	P2	Disponibilidad semanal
R1	6	3	180
R2	4	5	200
R3	1	1.5	70

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si fabricación del producto P2 se encarece y su coste pasa a ser 20 euros/kg. (2 puntos)

i) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = “kg del producto P1”. y = “kg del producto P2”.

	P1 (x)	P2 (y)	Disponibilidad semanal
R1	6x	3y	180
R2	4x	5y	200
R3	x	1.5y	70
Coste	20x	15y	

Se desea minimizar el coste de producción. La función objetivo sería: $C(x,y)=20x+15y$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

Disponibilidad de R1 → $6x+3y\le 180$
Disponibilidad de R2 → $4x+5y\le 200$
Disponibilidad de R3 → $x+1.5y\le 70$
Garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg → $x+y\ge 30$
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\quad y\ge 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 6x+3y\le 180 \\ 4x+5y\le 200 \\ x+1.5y\le 70 \\ x+y\ge 30 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y\le 60 \\ 4x+5y\le 200 \\ 2x+3y\le 140 \\ x+y\ge 30 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\}$$

ii) Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$2x+y=60$ $4x+5y=200$ $2x+3y=140$ $x+y=30$ $x\geq 0;\quad y\geq 0$

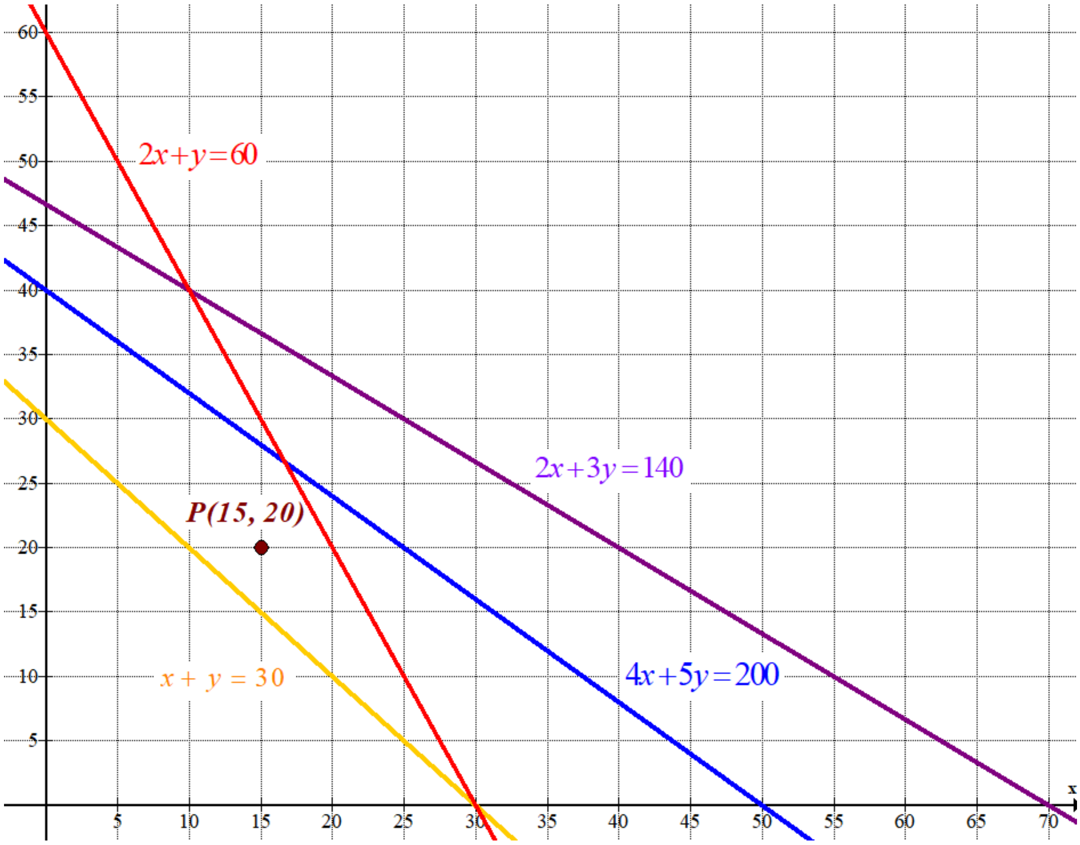
x	$y=60-2x$
0	60
10	40
30	0

x	$y=\frac{200-4x}{5}$
0	40
25	20
50	0

x	$y=\frac{140-2x}{3}$
10	40
70	0

x	$y=30-x$
0	30
30	0

Primer cuadrante

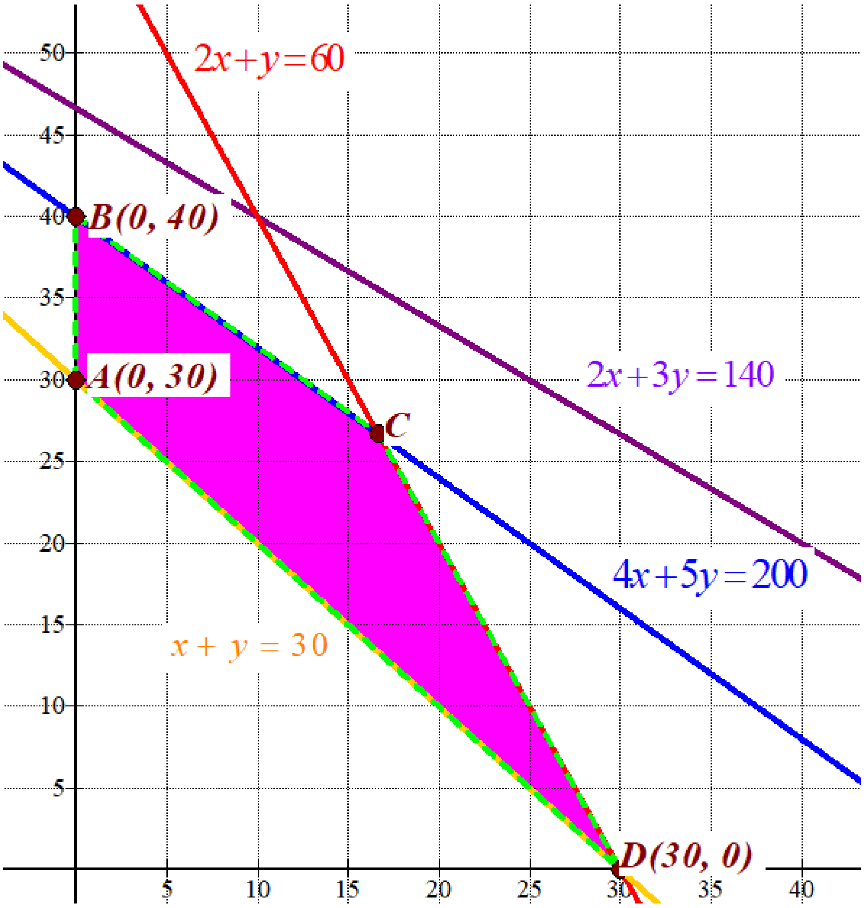


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\leq 60 \\ 4x+5y\leq 200 \\ 2x+3y\leq 140 \\ x+y\geq 30 \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada en el primer cuadrante por debajo de la recta azul, violeta y roja y por encima de la recta amarilla.

Comprobamos que el punto P(15, 20) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30+20\leq 60 \\ 60+100\leq 200 \\ 30+60\leq 140 \\ 15+20\geq 30 \\ 15\geq 0;\quad 20\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C.

$$\left.\begin{array}{l}2x+y=60\\4x+5y=200\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=60-2x\\4x+5y=200\end{array}\right\}\Rightarrow 4x+5(60-2x)=200\Rightarrow 4x+300-10x=200\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x=-100\Rightarrow x=\frac{100}{6}=\frac{50}{3}\Rightarrow y=60-\frac{100}{3}=\frac{80}{3}\Rightarrow C\left(\frac{50}{3},\frac{80}{3}\right)$$

Valoramos cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo de productividad.

A(0,30) → $C(0,30)=0+450=450$ ¡*Mínimo*!

B(0, 40) → $C(0,40)=0+600=600$

$C\left(\frac{50}{3},\frac{80}{3}\right)$ → $C(x,y)=20\frac{50}{3}+15\frac{80}{3}=\frac{220}{3}\simeq 733.33$

D(30, 0) → $C(30,0)=600+0=600$

El mínimo coste es de 450 € y se obtiene en el punto A(0, 30).
Con 0 kg del producto P1 y 30 kg del producto P2 el coste es mínimo.

iii) Solo cambia la función objetivo que pasa a ser $C(x,y)=20x+20y$.

Volvemos a valorar esta función en cada uno de los vértices.

A(0,30) → $C(0,30)=0+600=$ 600 ¡Mínimo!

B(0, 40) → $C(0,40)=0+800=800$

$C\left(\frac{50}{3},\frac{80}{3}\right)$ → $C\left(\frac{50}{3},\frac{80}{3}\right)=20\frac{50}{3}+20\frac{80}{3}=\frac{2600}{3}\simeq 866.66$

D(30, 0) → $C(30,0)=600+0=$ 600 ¡Mínimo!

El valor mínimo se alcanza en dos puntos, por lo que el coste mínimo se alcanza en cualquier punto del segmento $\overline{AD}$.

EJERCICIO 3:

i) Calcule la derivada de la siguiente función: $y=\dfrac{3}{(2x-3)^2}+\ln\left(2x^4-3\right)$. (3 puntos)

ii) Calcule la siguiente integral: $\int\left(sen2x+e^{x/5}\right)dx$. (3 puntos)

iii) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \dfrac{x}{2x^2+1}dx$. (3 puntos)

i)

$$y=\frac{3}{(2x-3)^2}+\ln\left(2x^4-3\right)=3(2x-3)^{-2}+\ln\left(2x^4-3\right)\Rightarrow y'=-6(2x-3)^{-3}\cdot 2+\frac{8x^3}{2x^4-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-12}{(2x-3)^3}+\frac{8x^3}{2x^4-3}}$$

ii)

$$\int\left(sen2x+e^{x/5}\right)dx=\int sen2xdx+\int e^{x/5}dx=\boxed{-\frac{1}{2}\cos 2x+5e^{x/5}+K}$$

iii)

$$\int_1^2 \frac{x}{2x^2+1}dx=\frac{1}{4}\int_1^2\frac{4x}{2x^2+1}dx=\left[\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+1\right|\right]_1^2=\left[\frac{1}{4}\ln\left|2\cdot 2^2+1\right|\right]-\left[\frac{1}{4}\ln\left|2\cdot 1^2+1\right|\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\ln 9-\frac{1}{4}\ln 3=\frac{1}{4}(\ln 9-\ln 3)=\frac{1}{4}\ln\frac{9}{3}=\boxed{\frac{1}{4}\ln 3}$$

EJERCICIO 4:

Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$, responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine el valor de los parámetros a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=1$ y la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ tenga pendiente $m=-2$. (4 puntos)

ii) Tomando los valores $a=-2$ y $b=-4$, determine los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x)$. (6 puntos)

i) Si la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=1$ significa que *f ´(1) = 0.*

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0 \Rightarrow \boxed{3+2a+b=0}$$

Si la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ tiene pendiente $m=-2$ significa que *f ´(0) = –2.*

$$f'(0)=-2 \Rightarrow 3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=-2 \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

Sustituimos en la ecuación obtenida antes y determinamos el valor de “a”.

$$3+2a-2=0 \Rightarrow 2a+1=0 \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-1}{2}}$$

Los valores buscados son $a=\frac{-1}{2}$; $b=-2$.

ii) Si $a=-2$ y $b=-4$ la función tiene la expresión $f(x)=x^3-2x^2-4x+1$.

Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=x^3-2x^2-4x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-4x-4$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-4x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{6}=\frac{4\pm 8}{6}=\begin{cases}\frac{4+8}{6}=\boxed{2=x}\\ \frac{4-8}{6}=\frac{-4}{6}=\boxed{-\frac{2}{3}=x}\end{cases}$$

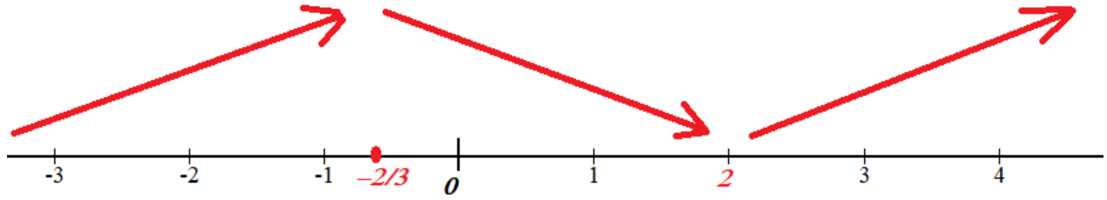
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $(-\infty,-2/3)$ tomamos $x=-1$ la derivada vale $f'(-1)=3(-1)^2-4(-1)-4=3>0$. La función crece en el intervalo $(-\infty,-2/3)$.

En el intervalo $(-2/3,2)$ tomamos $x=0$ la derivada vale $f'(0)=3\cdot 0^2-4\cdot 0-4=-4<0$. La función decrece en el intervalo $(-2/3,2)$

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos *x = 3* la derivada vale $f'(3)=3\cdot3^2-4\cdot3-4=11>0$. La función crece en el intervalo $(2,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-2/3)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(-2/3,2)$

La función tiene un máximo relativo en $x=\frac{-2}{3}$ y un mínimo relativo en *x = 2*.

Como $f\left(\frac{-2}{3}\right)=\left(\frac{-2}{3}\right)^3-2\left(\frac{-2}{3}\right)^2-4\left(\frac{-2}{3}\right)+1=\frac{67}{27}$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(\frac{-2}{3},\frac{67}{27}\right)$

Como $f(2)=2^3-2(2)^2-4(2)+1=-7$ las coordenadas del máximo relativo son $(2,-7)$

Para estudiar la curvatura utilizamos la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2-4x-4\Rightarrow f''(x)=6x-4$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 6x-4=0\Rightarrow 6x=4\Rightarrow \boxed{x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}}$$

Comprobamos que el valor obtenido es punto de inflexión viendo que la tercera derivada en dicho valor es no nula.

$$f''(x)=6x-4\Rightarrow f'''(x)=6\Rightarrow f''\left(\frac{2}{3}\right)=6\neq0$$

En $x=\frac{2}{3}$ hay un punto de inflexión.

Como $f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\left(\frac{2}{3}\right)+1=\frac{-61}{27}$ las coordenadas del punto de inflexión son $\left(\frac{2}{3},\frac{-61}{27}\right)$.

Estudiamos el signo de la derivada segunda para ver la curvatura.

En el intervalo $(-\infty,2/3)$ tomamos *x = 0* la derivada segunda vale $f''(0)=6\cdot0-4=-4<0$. La función es cóncava (∩) en el intervalo $(-\infty,2/3)$.

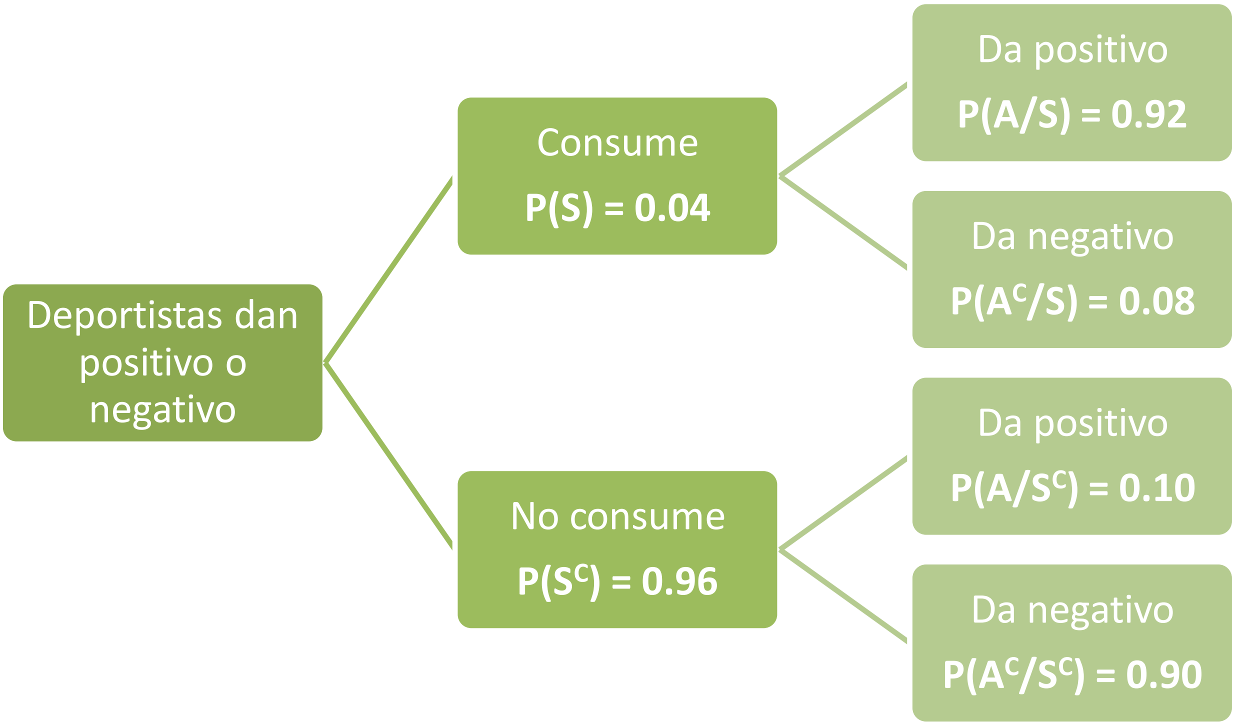
En el intervalo $(2/3,+\infty)$ tomamos *x = 1* la derivada segunda vale $f''(1)=6\cdot1-4=2>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $(2/3,+\infty)$.

Resumiendo: La función es cóncava (∩) en el intervalo (∩) y convexa (∪) en $(2/3,+\infty)$

EJERCICIO 5:
Se considera que el 4% de los deportistas federados consumen algún tipo de sustancia no permitida para mejorar su rendimiento. Se ha diseñado una nueva prueba de detección con dos posibles resultados: positivo y negativo. La prueba identifica correctamente el consumo de estas sustancias el 92% de los casos. Sin embargo, si un deportista no consume estas sustancias, la prueba da positivo en el 10% de los casos. Se selecciona un deportista al azar. Calcule (use 4 decimales):
i) La probabilidad de que obtenga un resultado positivo en la prueba. (3 puntos)
ii) La probabilidad de que sea consumidor y la prueba tenga resultado negativo. (3 puntos)
iii) La probabilidad de que no sea consumidor sabiendo que la prueba ha dado resultado negativo. (4 puntos)

Llamamos S = "Consume sustancias no permitidas" y A = "Da positivo en la prueba".

Realizamos un diagrama de árbol.



i) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(S)P(A/S) + P(S^C)P(A/S^C) = 0.04 \cdot 0.92 + 0.96 \cdot 0.1 = \boxed{0.1328}$$

ii)

$$P(S \cap A^C) = P(S)P(A^C/S) = 0.04 \cdot 0.08 = \boxed{0.0032}$$

iii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S^C/A^C) = \frac{P(S^C \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{P(S^C)P(A^C/S^C)}{1-P(A)} = \frac{0.96 \cdot 0.90}{1-0.1328} = \boxed{\frac{270}{271} \simeq 0.9963}$$

EJERCICIO 6:
En una encuesta realizada a 300 jóvenes navarros entre los 18 y los 30 años, 180 contestaron que utilizaban habitualmente una determinada red social.
i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que no utilizan dicha red social, con un nivel de confianza del 96%. (5 puntos)
ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan habitualmente la red social: [0.544563, 0.655437].
Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

De los 300 jóvenes encuestados 120 **no** utilizan cierta red social.

La proporción de estudiantes que no utilizan la red social es $p=\frac{120}{300}=0.4$

i) Los datos son $p=0.4; \quad n=300$.

Para un nivel de confianza del 96%

$1-\alpha=0{,}96 \rightarrow \alpha=0{,}04 \rightarrow \alpha/2=0'02 \rightarrow 1-\alpha/2=0{,}98 \rightarrow z_{\alpha/2}=\mathbf{2{,}055}$

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no utilizan cierta red social es:

$$\left(p-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\ p+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)=$$

$$=\left(0.4-2{,}055\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{300}},\ 0.4+2{,}055\cdot\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{300}}\right)=\boxed{(0.3419, 0.4581)}$$

ii) Ahora es la proporción de estudiantes que utilizan la red social.

Los datos son $p=\frac{180}{300}=0.6; \quad n=300$.

El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error=\frac{0.655437-0.544563}{2}=0.055437$$

Utilizamos la fórmula del error para determinar el valor de $z_{\alpha/2}$

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.055437=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{300}} \Rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{0.055437}{\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{300}}}\simeq 1.96$$

-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	[illegible]	0,47
k	0	1	2	3	4	5	6	7
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	[illegible]	0,52
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	[illegible]	0,56
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	[illegible]	0,60
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	[illegible]	0,64
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	[illegible]	0,68
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	[illegible]	0,71
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	[illegible]	0,74
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	[illegible]	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	[illegible]	0,80
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	[illegible]	0,83
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	[illegible]	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	[illegible]	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	[illegible]	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	[illegible]	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	[illegible]	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	[illegible]	0,94
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	[illegible]	0,95
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	[illegible]	0,96
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	[illegible]	0,96
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,97
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	[illegible]	0,98
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,98

Mirando en la tabla de la Normal N(0, 1) tenemos que $1 - \alpha/2 = 0.9750$

$$1-\alpha/2=0.975 \Rightarrow \alpha/2=0.025 \Rightarrow \alpha=0.05 \Rightarrow 1-\alpha=0.95$$

El nivel de confianza del intervalo proporcionado es del 95 %.