EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2022
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x) = xe^{-ax^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y tenga asíntota horizontal $y = 0$.

b) (1 punto) Calcula, para el valor $a = \frac{1}{2}$, el área que encierra la gráfica de la curva *f(x)* entre el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

2) Para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2}, \; a \in \mathbb{R}$$

Calcula los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para que $\lim_{x \to 1} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y determina el valor de dicho límite.

3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = 3x + 2x^2$$

$$g(x) = x^2 + 4x + 2$$

4) Para la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{3 - x^2}$$

a) (1.25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan.
b) (0.75 puntos) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.
.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
b) (1 punto) Calcula, para $k = 0$, la matriz B^n con $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n \in \mathbb{N}$.

6) Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudia, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $P = AB^T + C$, donde B^T es la matriz traspuesta de *B*.

b) (1 punto) Para el valor *m = 1*, calcula la inversa de la matriz *P* del apartado anterior.

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+ay+z=0 \\ x+y+a^2z=0 \\ x+y+2az=0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (1 punto) Resuelve el sistema para *a = 0*.

8) El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice *D* sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

9) En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17% de individuos practica danza clásica, un 45% cabaret y un 5% ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o los dos).

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

10) De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20% por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).

b) (1 punto)

1. (0,5 puntos) ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.

2. (0,5 puntos) ¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=xe^{-ax^2}, \quad a\in\mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y tenga asíntota horizontal $y=0$.

b) (1 punto) Calcula, para el valor $a=\frac{1}{2}$, el área que encierra la gráfica de la curva *f(x)* entre el eje X y las rectas $x=0$ y $x=1$.

a) La función es continua, pues es composición y producto de funciones continuas (exponencial y polinómica).

Para que tenga como asíntota horizontal $y=0$ debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} xe^{-ax^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{ax^2}}=\{a>0\}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2ae^{ax^2}}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

La condición es que sea *a* > *0.*

Si *a* < *0* el límite vale $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-ax^2}=\{-a>0\}=\infty$. Y no tendría asíntota horizontal.

b) Si $a=\frac{1}{2}$ la función queda $f(x)=xe^{-x^2/2}$.

Vemos si la gráfica corta el eje X entre 0 y 1.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=xe^{-x^2/2} \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow xe^{-x^2/2}=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ o \\ e^{-x^2/2}=0\Rightarrow \text{¡Imposible!} \end{array}\right.$$

Solo corta el eje X en *x* = *0.*

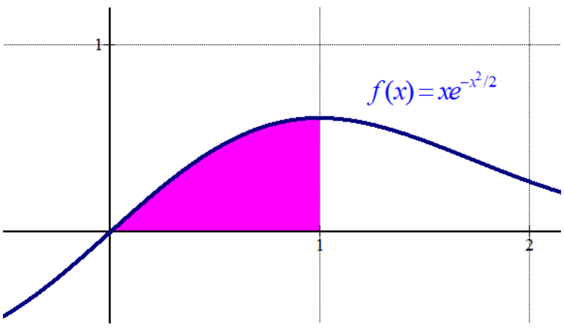
El área se calcula con la integral definida entre 0 y 1 de la función.
Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int xe^{-x^2/2}dx=\left\{\begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ -\frac{x^2}{2}=t\Rightarrow -2\frac{x}{2}dx=dt \\ -xdx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{-x} \end{array}\right\}=\int^0 xe^t\frac{dt}{-x}=-\int e^t dt=-e^t=-e^{-x^2/2}+K$$

Aplicamos este resultado al cálculo del área.

$$Área=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xe^{-x^2/2}dx=\left[-e^{-x^2/2}\right]_0^1=$$

$$=\left[-e^{-1^2/2}\right]-\left[-e^{-0^2/2}\right]=\boxed{-e^{-1/2}+1\simeq 0.39\ u^2}$$



2) Para la siguiente función:

$$f(x)=\frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2},\ a\in\mathbb{R}$$

Calcula los valores de $a,b\in\mathbb{R}$, para que $\lim_{x\to 1} f(x)=L\in\mathbb{R}$, y determina el valor de dicho límite.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2}=\frac{2+a+b+3}{-1+4-5+2}=\frac{5+a+b}{0}$$

Este límite tiene valor finito $L\in\mathbb{R}$ cuando $5+a+b=0$.

Supongamos que $5+a+b=0 \rightarrow b=-5-a$..

UNA FORMA DE RESOLVERLO. Sugerencia de Germán Jesús Rubio Luna.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2}=\frac{2+a+b+3}{-1+4-5+2}=\frac{5+a+b}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x^2+2ax+(-5-a)}{-3x^2+8x-5}=\frac{6+2a-5-a}{-3+8-5}=\frac{1+a}{0}=\ldots$$

Este límite tiene valor finito $L\in\mathbb{R}$ cuando $1+a=0 \rightarrow a=-1$.

$$\ldots=\frac{1+a}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{12x+2(-1)}{-6x+8}=\frac{12-2}{-6+8}=\frac{10}{2}=\boxed{5}$$

Los valores buscados son $a=-1$ y $b=-5-(-1)=-4$.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+ax^2+(-5-a)x+3}{-x^3+4x^2-5x+2}=\ldots$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & -1 & 3 & -2 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow -x^3+4x^2-5x+2=(x-1)(-x^2+3x-2)$$

$$-x^2+3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{-2}=\frac{-3\pm 1}{-2}=\begin{cases} \dfrac{-3+1}{-2}=1 \\ \dfrac{-3-1}{-2}=2 \end{cases}$$

$$-x^3+4x^2-5x+2=-(x-1)(x-1)(x-2)$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & a & -5-a & 3 \\ 1 & & 2 & 2+a & -3 \\ \hline & 2 & 2+a & -3 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow 2x^3+ax^2+(-5-a)x+3=(x-1)\left(2x^2+(2+a)x-3\right)$$

$$\ldots=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(2x^2+(2+a)x-3\right)}{-\cancel{(x-1)}(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+(2+a)x-3}{-(x-1)(x-2)}=\frac{2+2+a-3}{0}=\frac{1+a}{0}$$

Para que sea finito el límite debe ser $1+a=0 \rightarrow a=-1$.

Y por lo anterior $b=-5-(-1)=-4$.

Terminamos de calcular el límite con estos valores.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x^2-4x+3}{-x^3+4x^2-5x+2}=\ldots$$

$$-x^3+4x^2-5x+2=-(x-1)(x-1)(x-2)$$

$$2x^3-x^2-4x+3=\ldots$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & & 2 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & 1 & -3 & \lfloor 0 \\ 1 & & 2 & 3 & \\ \hline & 2 & 3 & \lfloor 0 & \end{array} \Rightarrow 2x^3-x^2-4x+3=(x-1)(x-1)(2x+3)$$

$$\ldots=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)(x-1)}(2x+3)}{-\cancel{(x-1)(x-1)}(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{-(x-2)}=\frac{5}{1}=\boxed{5}$$

3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x)=3x+2x^2$$
$$g(x)=x^2+4x+2$$

Buscamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 3x+2x^2=x^2+4x+2\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=\boxed{2=x}\\ \frac{1-3}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones es el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 2 de la diferencia de las funciones.

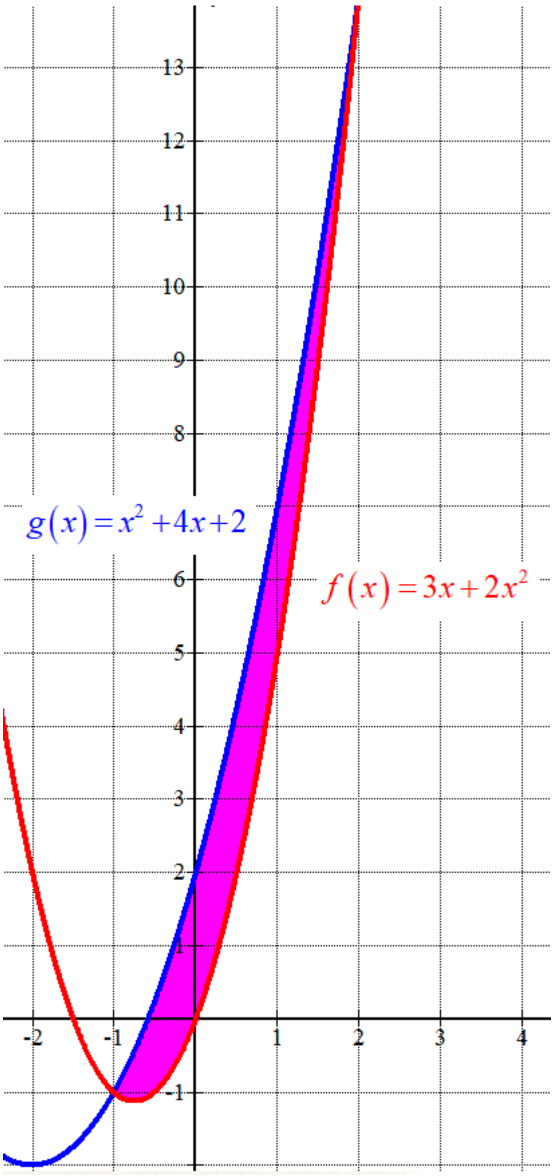
$$f(x)-g(x)=3x+2x^2-\left(x^2+4x+2\right)=$$
$$=3x+2x^2-x^2-4x-2=x^2-x-2$$

$$Área=\left|\int_{-1}^{2} f(x)-g(x)dx\right|=\left|\int_{-1}^{2} x^2-x-2dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2}\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}-4\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}-2(-1)\right]\right|=$$

$$=\left|\frac{8}{3}-2-4+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right|=|-4.5|=\boxed{4.5u^2}$$



4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{x^2+x}{3-x^2}$$

a) (1.25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan.
b) (0.75 puntos) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x=1$.

a) El dominio de la función son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x)=\frac{x^2+x}{3-x^2}\Rightarrow 3-x^2=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow \text{Dominio } f(x)=\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$$

Asíntota vertical. $x=a$.

¿ $x=-\sqrt{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}} f(x)=\lim_{x\to-\sqrt{3}}\frac{x^2+x}{3-x^2}=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}}{3-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{0}=\infty$$

$x=-\sqrt{3}$ es asíntota vertical

¿ $x=\sqrt{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2+x}{3-x^2}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}}{3-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{0}=\infty$$

$x=\sqrt{3}$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x^2}=\left\{\begin{array}{l}\text{Numerador y denominador}\\ \text{del mismo grado}\end{array}\right\}=\frac{1}{-1}=-1$$

$y=-1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.

Ramas parabólicas. No tiene pues tiene asíntota horizontal.

b) La recta tangente a la función en el punto tiene la expresión: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.
Calculamos el valor de la función y de la derivada y obtenemos la recta tangente.

$$f(x)=\frac{x^2+x}{3-x^2}\Rightarrow f(1)=\frac{1^2+1}{3-1^2}=1$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\left(3-x^2\right)-(-2x)\left(x^2+x\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{6x-\cancel{2x^3}+3-x^2+\cancel{2x^3}+2x^2}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2+6x+3}{\left(3-x^2\right)^2}$$

$$f'(1)=\frac{1^2+6+3}{\left(3-1^2\right)^2}=\frac{10}{4}=2.5$$

$$\left.\begin{array}{r} f(1)=1 \\ f'(1)=2.5 \\ y-f(1)=f'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-1=2.5(x-1) \Rightarrow \boxed{y=2.5x-1.5}$$

La recta tangente a la función en el punto $x=1$ tiene ecuación $y=2.5x-1.5$.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determina el valor de $k\in\mathbb{R}$ para que se verifique $A^2=3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) (1 punto) Calcula, para $k = 0$, la matriz B^n con $B=2A-I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n\in\mathbb{N}$.

a)

$$A^2=3I\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1-k & k+k^2+k \\ -1-k-1 & -k+(k+1)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1-k=3 \\ k^2+2k=0 \\ -2-k=0 \\ -k+(k+1)^2=3 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2=k \\ k(k+2)=0\rightarrow\begin{cases} k=0 \\ o \\ k=-2 \end{cases} \\ -2=k \\ -k+k^2+1+2k=3\rightarrow k^2+k-2=0\rightarrow\begin{cases} k=1 \\ o \\ k=-2 \end{cases} \end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{k=-2}$$

Como deben de cumplirse todas las ecuaciones el único valor de k posible es $k = -2$.

b) Para $k = 0$ tenemos que $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la expresión de la matriz B.

$$B=2A-I=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos las potencias sucesivas de B.

$$B^1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Tenemos\ que\ B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\cdot 1 & 1 \end{pmatrix}; B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\cdot 2 & 1 \end{pmatrix}; B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\cdot 3 & 1 \end{pmatrix}; B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\cdot 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos deducir que solo cambia el término que ocupa la primera posición en la segunda fila y sigue la regla de valer el doble de la potencia cambiado de signo. $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\cdot n & 1 \end{pmatrix}$

6) Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1-m & -1\\ 2 & 2m\\ m-1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudia, según los valores de $m\in\mathbb{R}$, el rango de la matriz $P=AB^T+C$, donde B^T es la matriz traspuesta de *B*.

b) (1 punto) Para el valor *m = 1*, calcula la inversa de la matriz *P* del apartado anterior.

.

a) Calculamos la matriz P.

$$B^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$P=AB^T+C=\begin{pmatrix}1-m & -1\\ 2 & 2m\\ m-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-m & -1 & 1-m\\ 2 & 2m & 2\\ m-1 & 1 & m-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 2 & 2m+1 & 3\\ m-1 & 1 & m\end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz equivalente a P más sencilla de estudiar.

$$P=\begin{pmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 2 & 2m+1 & 3\\ m-1 & 1 & m\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3ª + Fila 1ª}\\ \begin{array}{ccc}m-1 & 1 & m\\ 2-m & 0 & 2-m\\ \hline 1 & 1 & 2\end{array}\to\text{Nueva fila 3ª}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 2 & 2m+1 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 2ª } - \text{ 2· Fila 3ª}\\ \begin{array}{ccc}2 & 2m+1 & 3\\ -2 & -2 & -4\\ \hline 0 & 2m-1 & -1\end{array}\to\text{Nueva fila 2ª}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 0 & 2m-1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

El rango de P es el rango de $\begin{pmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 0 & 2m-1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$\begin{vmatrix} 2-m & 0 & 2-m \\ 0 & 2m-1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2m-1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-m)(4m-2-2m+1+1) =$$

$$= (2-m)(2m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ o \\ m = 2 \end{cases}$$

Para cualquier valor de m distinto de 0 y de 2 el determinante es no nulo. Por tanto, el rango de P es 3 para cualquier valor de m distinto de 0 y de 2.
Veamos cual es el rango de P para 0 y 2.

Si $m = 0$ la matriz P queda $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ aplicamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente a P.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \dfrac{1}{2}\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz equivalente tiene dos filas no nulas. El rango de P es 2.

Si $m = 2$ la matriz P queda $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esta matriz tiene rango 2 pues tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo.

Quitamos la fila 1ª y columna 1ª → $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7 \neq 0$

Resumiendo: Si $m \neq 0 \ y \ m \neq 2$ el rango de P es 3. Si $m = 0 \ o \ m = 2$ el rango de P es 2.

b) Para $m = 1$ la matriz P queda $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+2-3 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa de P.}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{Adj\left(P^T\right)}{|P|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}}$$

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+ay+z=0 \\ x+y+a^2z=0 \\ x+y+2az=0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).
b) (1 punto) Resuelve el sistema para $a = 0$.

a) Obtenemos un sistema equivalente al que nos dan pero más sencillo. Utilizamos el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+ay+z=0 \\ x+y+a^2z=0 \\ x+y+2az=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{cccc} x & +y & +2az & =0 \\ -x & -y & -a^2z & =0 \\ \hline 0 & 0 & (2a-a^2)z & =0 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} x & +y & +a^2z & =0 \\ -x & -ay & -z & =0 \\ \hline 0 & (1-a)y & +(a^2-1)z & =0 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \quad +ay \quad +z=0 \\ (1-a)y+(a^2-1)z=0 \\ (2a-a^2)z=0 \end{cases}$$

Vemos cuando se anulan los elementos de la diagonal:

$$1-a=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$2a-a^2=0 \Rightarrow a(2-a)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ o \\ \boxed{a=2} \end{cases}$$

Si el valor de a es distinto de 0, de 1 y de 2 el sistema es compatible determinado (solución única).

Si el valor de a es 0 intentamos resolver el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{cases} x \quad +z=0 \\ y-z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases} \Rightarrow Solución: \begin{cases} x=-t \\ y=t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Si el valor de a es 1 intentamos resolver el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow Solución: \begin{cases} x = -t \\ y = t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Si el valor de a es 2 intentamos resolver el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y = 3z \end{cases} \Rightarrow x + 6z + z = 0 \Rightarrow x = -7z \Rightarrow Solución: \begin{cases} x = -7t \\ y = 3t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

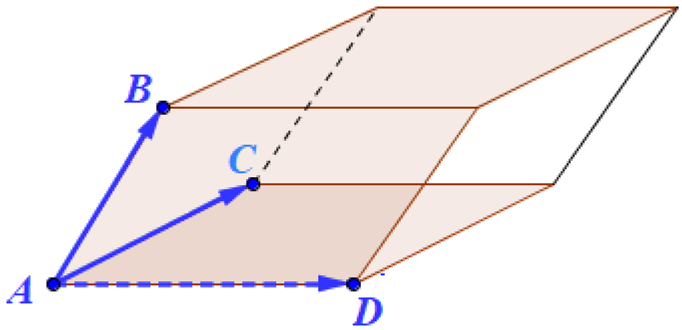
Resumiendo: Para cualquier valor de a distinto de 0, de 1 y de 2 el sistema es compatible determinado (una única solución) y si a es 0, 1 o 2 el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Para $a = 0$ lo hemos resuelto en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow Solución: \begin{cases} x = -t \\ y = t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

8) El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

Si el vértice D se encuentra en el eje Y tiene coordenadas *D(0, d, 0)*.



El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-2,1,0)-(1,1,1)=(-3,0,-1)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,3)-(1,1,1)=(-1,0,2)\\ \overrightarrow{AD}=(0,d,0)-(1,1,1)=(-1,d-1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}-3 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ -1 & d-1 & -1\end{vmatrix}=d-1+6d-6=7d-7$$

$$\left.\begin{array}{r}Volumen\,del\,tetraedro\,ABCD=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\dfrac{|7d-7|}{6}\\ Volumen\,del\,tetraedro\,ABCD=10\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{|7d-7|}{6}=10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}7d-7=60\rightarrow 7d=67\rightarrow d=\dfrac{67}{7}\rightarrow\boxed{D\left(0,\dfrac{67}{7},0\right)}\\ o\\ 7d-7=-60\rightarrow 7d=-53\rightarrow d=\dfrac{-53}{7}\rightarrow\boxed{D´\left(0,\dfrac{-53}{7},0\right)}\end{cases}$$

Hay dos soluciones del problema: $D\left(0,\dfrac{67}{7},0\right)$ y $D´\left(0,\dfrac{-53}{7},0\right)$

9) En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17% de individuos practica danza clásica, un 45% cabaret y un 5% ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:
a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o los dos).

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

Si un 17% de individuos practica danza clásica, un 45% cabaret y un 5% ambas modalidades de danza entonces un 17 – 5 = 12 % practica solo danza clásica. Un 45 – 5 = 40 % solo practica danza de cabaret. Si sumamos esos porcentajes tenemos que 12 + 40 + 5 = 57 % practica danza.
Entonces el 100 – 57 = 43 % hace teatro.
Con estos porcentajes y aplicando la regla de Laplace calculamos las probabilidades pedidas.

a) $P\left(practique\ algún\ tipo\ de\ danza\ \left(o\ los\ dos\right)\right)=\frac{57}{100}=\boxed{0.57}$

b) He supuesto que no hay nadie que practique teatro y danza al mismo tiempo ya que no dan información de esta posibilidad.

$$P\left(Teatro\right)=\frac{43}{100}=\boxed{0.43}$$

10) De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20% por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:
a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).
b) (1 punto)
1. (0,5 puntos) ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.
2. (0,5 puntos) ¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

Esta situación planteada es una distribución binomial.

X = "Número de huevos desechados de un grupo de 5"

Número de repeticiones = n = 5 y p = Probabilidad de que sea desechado un huevo = 0.20.

X = B(5, 0.2)

a) Nos piden calcular $P(X \geq 1)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^5 = 1 - 0.8^5 = \boxed{0.67232}$$

b) b.1) Calculamos ambas probabilidades y las comparamos.

$$\left.\begin{array}{l} P(X = 2) = \binom{5}{2} 0.2^2 \cdot 0.8^3 = \dfrac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 = \boxed{0.2048} \\ \\ P(X = 3) = \binom{5}{3} 0.2^3 \cdot 0.8^2 = \dfrac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^2 = 0.0512 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Es más probable que hayan 2 huevos no aptos}$$

b.2) Al ser la probabilidad de ser apto cuatro veces la probabilidad de ser no apto parece razonable que sea más probable tener 2 no aptos y 3 aptos que 3 no aptos y 2 aptos.