



Modelo 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad B = (\lambda \quad 3\lambda \quad 6).$$

- (a) Calcule el determinante de la matriz A . (1 punto)
- (b) En función del parámetro λ , halle el rango de la matriz A . (3 puntos)
- (c) Para el valor de $\lambda = 1$, halle la matriz inversa de A , A^{-1} . (3 puntos)
- (d) Para el valor de $\lambda = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA = B$. (3 puntos)
2. Durante un año, cierta empresa vende 21000 vehículos de tres modelos A , B y C , al precio de 10000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros. Se ha observado que también se han vendido 21000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A .
- (a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de vehículos vendidos de cada modelo. (3 puntos)
- (b) Calcule el número de vehículos vendidos de cada modelo, suponiendo $\lambda = 3$. (3 puntos)
- (c) Determine si existe algún valor del parámetro λ para el cual la anterior situación no se pueda dar. (4 puntos)
3. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = 4 - 4x$.
- (a) Representélas gráficamente en un mismo sistema de coordenadas. (5 puntos)
- (b) Calcule los puntos de corte de ambas gráficas. (2 puntos)
- (c) Calcule el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones. (3 puntos)



4. Sea la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.
- (a) Halle el dominio y los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes. (2 puntos)
 - (b) Calcule la derivada de la función y obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
 - (c) Compruebe que $f(-1) = f(1)$ y que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Contradice este hecho al Teorema de Rolle? (3 puntos)
 - (d) Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$. (3 puntos)

5. Sea a un parámetro real. Considere el plano $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$, el punto $P(1, 1, 0)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0, \\ x - az = 1. \end{cases}$$

En cada caso, si existe, obtenga el valor del parámetro a para el cual:

- (a) el punto P pertenece a la recta r . (1 punto)
 - (b) la recta r y el plano π se cortan en un único punto. (3 puntos)
 - (c) la recta r está contenida en el plano π . (3 puntos)
 - (d) la recta r es perpendicular al plano π . (3 puntos)
6. Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(0, 0, -2)$, $C(2, -1, 0)$, $D(-1, 2, -1)$ y $E(0, 0, 0)$.
- (a) Compruebe que los puntos A , B y C determinan un único plano, π . (2 puntos)
 - (b) Averigüe si el triángulo de vértices A , B y C es rectángulo en el vértice A . (3 puntos)
 - (c) Halle el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A y D con el plano π . (3 puntos)
 - (d) Calcule el volumen del tetraedro definido por los vectores \vec{AB} , \vec{AC} i \vec{AD} . (2 puntos)
7. Una prueba diagnóstica de una enfermedad da resultado negativo el 5% de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da positivo el 10% de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada 10000 personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule las siguientes probabilidades.
- (a) Que un individuo no padezca la enfermedad. (1 punto)
 - (b) Que la prueba dé resultado positivo. (3 puntos)



-
- (c) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba es negativo. (3 puntos)
- (d) Que el resultado de la prueba sea erróneo. (3 puntos)
8. Se tienen tres urnas A , B y C . La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 bolas negras. La urna B contiene 3 bolas rojas y 3 bolas negras. La urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento.
- (a) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja. (3 puntos)
- (b) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra. (3 puntos)
- (c) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcule la probabilidad de que la segunda sea negra. (4 puntos)
-