Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2022

Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1. Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule el determinante de la matriz A. (1 punto)
(b) En función del parámetro λ, halle el rango de la matriz A. (3 puntos)
(c) Para el valor de $\lambda=1$, halle la matriz inversa de A, A^{-1}. (3 puntos)
(d) Para el valor de $\lambda=1$, resuelva la ecuación matricial $XA=B$. (3 puntos)

2. Durante un año, cierta empresa vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros. Se ha observado que también se han vendido 21000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A.
(a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de vehículos vendidos de cada modelo. (3 puntos)
(b) Calcule el número de vehículos vendidos de cada modelo, suponiendo $\lambda=3$. (3 puntos)
(c) Determine si existe algún valor del parámetro λ para el cual la anterior situación no se pueda dar. (4 puntos)

3. Dadas las funciones $f(x)=x^2-4x$ y $g(x)=4-4x$.
(a) Represéntelas gráficamente en un mismo sistema de coordenadas. (5 puntos)
(b) Calcule los puntos de corte de ambas gráficas. (2 puntos)
(c) Calcule el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones. (3 puntos)

4. Sea la función $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$.

(a) Halle el dominio y los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes. (2 puntos)

(b) Calcule la derivada de la función y obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

(c) Comprueba que $f(-1)=f(1)$ y que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1,1]$. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle? (3 puntos)

(d) Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$. (3 puntos)

5. Sea a un parámetro real. Considere el plano $\pi \equiv 3x-2y-z=4$, el punto $P(1, 1, 0)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x-az=1 \end{cases}$$

En cada caso, si existe, obtenga el valor del parámetro a para el cual:

(a) el punto P pertenece a la recta r. (1 punto)

(b) la recta r y el plano π se cortan en un único punto. (3 puntos)

(c) la recta r está contenida en el plano π. (3 puntos)

(d) la recta r es perpendicular al plano π. (3 puntos)

6. Dados los puntos $A(1, 1,1)$, $B(0, 0, -2)$, $C(2, -1, 0)$, $D(-1, 2, -1)$ y $E(0, 0, 0)$.

(a) Compruebe que los puntos A, B y C determinan un único plano, π. (2 puntos)

(b) Averigüe si el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo en el vértice A. (3 puntos)

(c) Halle el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A y D con el plano π. (3 puntos)

(d) Calcule el volumen del tetraedro definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$. (2 puntos)

7. Una prueba diagnóstica de una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada 10000 personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule las siguientes probabilidades.

(a) Que un individuo no padezca la enfermedad. (1 punto)

(b) Que la prueba dé resultado positivo. (3 puntos)

(c) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba es negativo. (3 puntos)

(d) Que el resultado de la prueba sea erróneo. (3 puntos)

8. Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 bolas negras. La urna B contiene 3 bolas rojas y 3 bolas negras. La urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento.

(a) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja. (3 puntos)

(b) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra. (3 puntos)

(c) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcule la probabilidad de que la segunda sea negra. (4 puntos)

SOLUCIONES

1. Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ \lambda & 2 & -1\\ 2 & \lambda & -1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}\lambda & 3\lambda & 6\end{pmatrix}$$

(a) Calcule el determinante de la matriz A. (1 punto)
(b) En función del parámetro λ, halle el rango de la matriz A. (3 puntos)
(c) Para el valor de $\lambda=1$, halle la matriz inversa de A, A^{-1}. (3 puntos)
(d) Para el valor de $\lambda=1$, resuelva la ecuación matricial $XA=B$. (3 puntos)

(a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ \lambda & 2 & -1\\ 2 & \lambda & -1\end{vmatrix}=-2-2-\lambda^2+4+\lambda+\lambda=\boxed{-\lambda^2+2\lambda}$$

(b) El rango de A es 3 si su determinante es no nulo.

$$|A|=0\Rightarrow -\lambda^2+2\lambda=0\Rightarrow -\lambda(\lambda-2)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ o\\ \lambda=2\end{cases}$$

El rango de A es 3 si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 2$.

Si $\lambda=2$ el rango de A es menor que 3, pues su determinante vale 0.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Como se aprecia las columnas 1ª y 2ª son iguales, también son iguales las filas 2ª y 3ª. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y columna 1ª, calculamos su determinante → $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$.

El rango de A es 2.

Si $\lambda=0$ el rango de A es menor que 3, pues su determinante vale 0.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª, calculamos su determinante → $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$.

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 2$ el rango de A es 3 y si $\lambda=2$ o $\lambda=0$ el rango de A es 2.

(c) Para el valor de $\lambda = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-2-1+4+1+1 = 1 \neq 0 \text{ Existe la inversa.}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(d) Para el valor de $\lambda = 1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Despejamos X en la ecuación $XA = B \rightarrow X = BA^{-1}$. Sustituimos los valores de las matrices A y B y calculamos la expresión de X.

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3-18 & 3+6 & 1+6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -22 & 9 & 7 \end{pmatrix}}$$

2. Durante un año, cierta empresa vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros. Se ha observado que también se han vendido 21000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A.
(a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de vehículos vendidos de cada modelo. (3 puntos)
(b) Calcule el número de vehículos vendidos de cada modelo, suponiendo $\lambda = 3$. (3 puntos)
(c) Determine si existe algún valor del parámetro λ para el cual la anterior situación no se pueda dar. (4 puntos)

(a) Llamamos "a" al número de vehículos A, "b" al número de vehículos B, "c" al número de vehículos C.

"vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C" → $a+b+c=21000$

"vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros" →
$10000a+15000b+20000c=332000000$

"se han vendido 21000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A" → $21000=b+\lambda a$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=21000 \\ 10000a+15000b+20000c=332000000 \\ 21000=b+\lambda a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=21000 \\ 2a+3b+4c=66400 \\ \lambda a+b=21000 \end{array}\right\}$$

(b) Si $\lambda=3$ el sistema queda $\left.\begin{array}{l} a+b+c=21000 \\ 2a+3b+4c=66400 \\ 3a+b=21000 \end{array}\right\}$. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=21000 \\ 2a+3b+4c=66400 \\ 3a+b=21000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=21000 \\ 2a+3b+4c=66400 \\ b=21000-3a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+21000-3a+c=21000 \\ 2a+3(21000-3a)+4c=66400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2a+c=0 \\ 2a+63000-9a+4c=66400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=2a \\ -7a+4c=3400 \end{array}\right\} \Rightarrow -7a+8a=3400 \Rightarrow \boxed{a=3400} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{c=6800} \\ \boxed{b=21000-10200=10800} \end{cases}$$

Se han vendido 3400 coches del modelo A, 10800 del modelo B y 6800 del modelo C.

(c) Estudiamos la compatibilidad del sistema $\left.\begin{array}{l} a+b+c=21000 \\ 2a+3b+4c=66400 \\ \lambda a+b=21000 \end{array}\right\}$

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+4\lambda+2-3\lambda-0-4=\lambda-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow \lambda-2 \Rightarrow \boxed{\lambda=2}$$

Si $\lambda \neq 2$ el sistema es compatible determinado (tiene una única solución).

Veamos que ocurre para $\lambda=2$.

El sistema queda $\left.\begin{array}{l} a+b+c=21000 \\ 2a+3b+4c=66400 \\ 2a+b=21000 \end{array}\right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=21000 \\ 2a+3b+4c=66400 \\ 2a+b=21000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=21000 \\ 2a+3b+4c=66400 \\ b=21000-2a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+21000-2a+c=21000 \\ 2a+3(21000-2a)+4c=66400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a+c=0 \\ 2a+63000-6a+4c=66400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=a \\ -4a+4c=3400 \end{array}\right\} \Rightarrow -4a+4a=3400 \Rightarrow \text{¡¡}0=3400\text{!!}$$

Nos queda una igualdad imposible. El sistema no tiene solución para $\lambda=2$.

Para $\lambda=2$ la situación planteada no es posible.

3. Dadas las funciones $f(x)=x^2-4x$ y $g(x)=4-4x$.

(a) Represéntelas gráficamente en un mismo sistema de coordenadas. (5 puntos)

(b) Calcule los puntos de corte de ambas gráficas. (2 puntos)

(c) Calcule el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones. (3 puntos)

(a) La gráfica de $f(x)=x^2-4x$ es una parábola.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^2-4x \Rightarrow f'(x)=2x-4 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow \boxed{x=2} \text{ Vértice de la parábola}$$

x	$y=x^2-4x$
0	0
1	-3
2	-4 *Vértice*
3	-3
4	0

La gráfica de $g(x)=4-4x$ es una recta decreciente.

x	$y=4-4x$
0	4
1	0

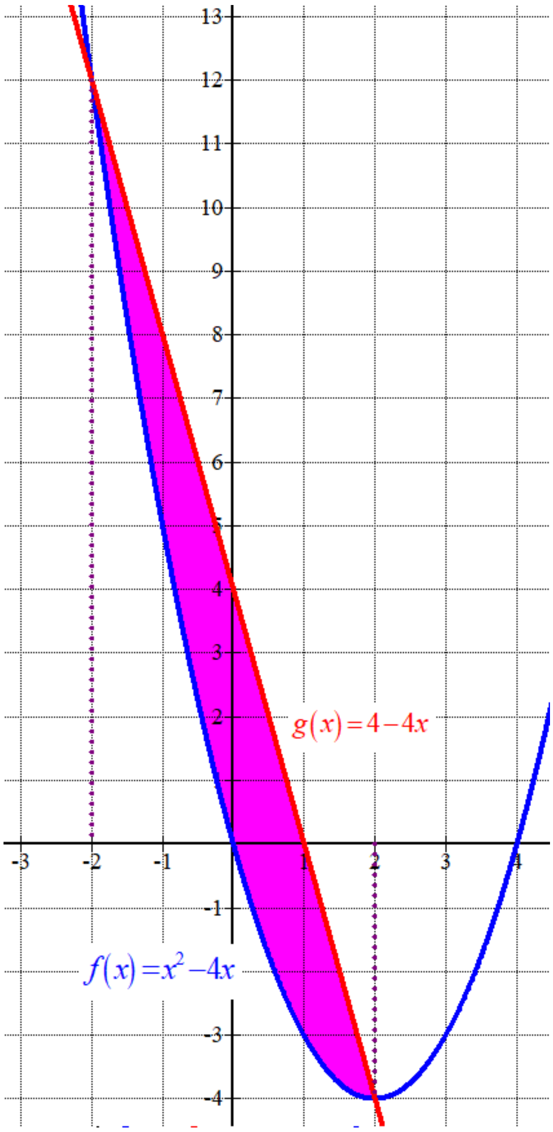
(b)

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4x=4-4x\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Como $g(-2)=4-4(-2)=12$ y $g(2)=4-4(2)=-4$ las coordenadas de los puntos de corte son $(-2,12)$ y $(2,-4)$

(c)

El área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es la del dibujo y se calcula con la integral definida entre –2 y 2 de *g(x) – f(x)*.



$$Área=\int_{-2}^{2}g(x)-f(x)dx=\int_{-2}^{2}4-4x-\left(x^2-4x\right)dx=\int_{-2}^{2}-x^2+4dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}=\left[-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}+4(-2)\right]=-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8=16-\frac{16}{3}=\boxed{\frac{32}{3}\simeq 10.67u^2}$$

4. Sea la función $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$.
(a) Halle el dominio y los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes.(2 puntos)
(b) Calcule la derivada de la función y obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
(c) Comprueba que $f(-1)=f(1)$ y que *f ´(x)* no es nunca cero en el intervalo $[-1,1]$. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle? (3 puntos)
(d) Esboce la gráfica de la función *y = f(x)*. (3 puntos)

(a) El dominio son todos los números reales, pues la raíz cúbica siempre existe.

Puntos de corte con los ejes.

Si *x = 0* → $f(0)=1-\sqrt[3]{0^2}=1 \Rightarrow \boxed{A(0,1)}$

Si y = 0 → $0=1-\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=1 \Rightarrow x^2=1^3=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{B(1,0)} \\ \boxed{C(-1,0)} \end{cases}$

(b)

$$f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}=1-x^{2/3} \Rightarrow f'(x)=0-\frac{2}{3}x^{2/3-1}=-\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{-2}{3\sqrt[3]{x}},\ para\ x\neq 0$$

Calculamos la derivada en *x = 0*.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2/3}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{2/3-1}=\lim_{x\to 0}x^{-1/3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{0}=\infty$$

No existe $f'(0)$.

La derivada de la función es $f'(x)=\frac{-2}{3\sqrt[3]{x}},\ para\ x\neq 0$.

Esa derivada no existe para *x = 0*.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de *x = 0*.

En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=\frac{-2}{3\sqrt[3]{-1}}=\frac{2}{3}>0$. La función crece en el intervalo $(-\infty,0)$.

En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=\frac{-2}{3\sqrt[3]{1}}=\frac{-2}{3}<0$. La función decrece en el intervalo $(0,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,0)$ y decrece en $(0,+\infty)$.

(c)

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=1-\sqrt[3]{(-1)^2}=1-1=0 \\ f(1)=1-\sqrt[3]{1^2}=1-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1)=f(1)=0$$

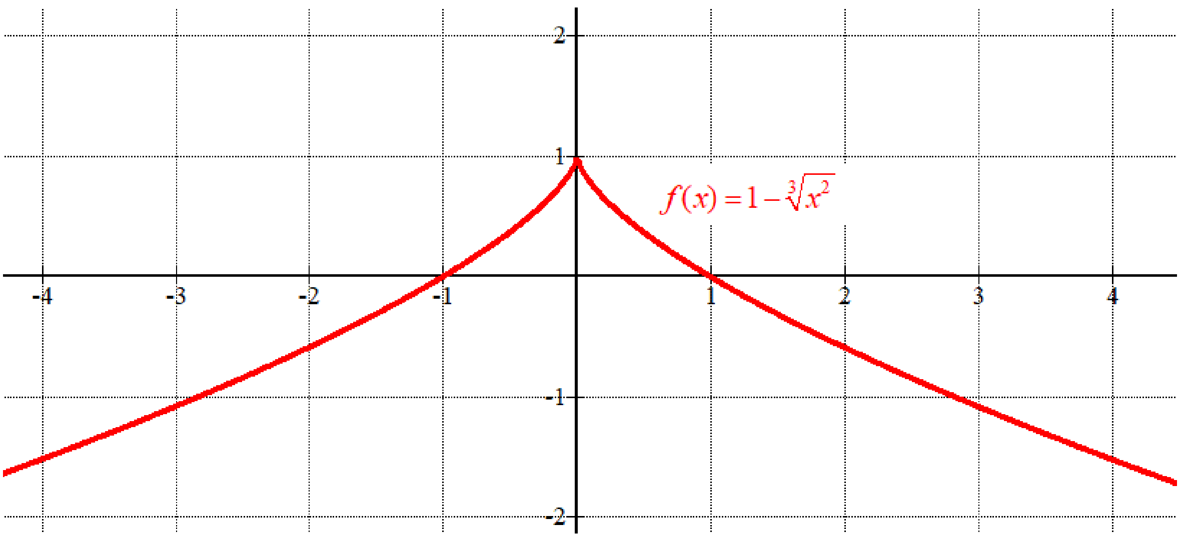
Tenemos que $f'(x)=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}},\ para\ x\neq 0$. Esta expresión de la derivada nunca se anula y tampoco en el intervalo $[-1,1]$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow -2=0 \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

Para poder aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$ la función debe ser continua en el intervalo (lo es) y derivable en $(-1,1)$. Esta última condición no se cumple en el intervalo, pues la función no es derivable en $x=0\in(-1,1)$.
No podemos aplicar el teorema de Rolle y por lo tanto no existe contradicción.

(d) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica.

x	$y=1-\sqrt[3]{x^2}$
-2	-0.59
-1	0
0	1
1	0
2	-0.59



5. Sea a un parámetro real. Considere el plano $\pi \equiv 3x-2y-z=4$, el punto $P(1, 1, 0)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x-az=1 \end{cases}$$

En cada caso, si existe, obtenga el valor del parámetro a para el cual:
(a) el punto P pertenece a la recta r. (1 punto)
(b) la recta r y el plano π se cortan en un único punto. (3 puntos)
(c) la recta r está contenida en el plano π. (3 puntos)
(d) la recta r es perpendicular al plano π. (3 puntos)

(a) El punto P debe satisfacer las ecuaciones de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,\ 1,\ 0) \in r \\ r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x-az=1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 1-1=0 \\ 1-a\cdot 0=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 1=1 \end{cases} \text{ ¡Se cumplen!}$$

Se cumplen las igualdades independientemente del valor de “a”.
El punto P pertenece al plano para cualquier valor de “a”.

(b) Recta y plano son secantes si el vector normal del plano y el director de la recta no son perpendiculares, es decir, si su producto escalar no es cero.

$$r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x-az=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ x=1+az \end{cases} \Rightarrow y=1+az \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+a\lambda \\ y=1+a\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(1,1,0) \\ \overrightarrow{v_r}=(a,a,1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 3x-2y-z=4 \Rightarrow \vec{n}=(3,-2,-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}=(3,-2,-1) \\ \overrightarrow{v_r}=(a,a,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=(3,-2,-1)(a,a,1)=3a-2a-1=a-1$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Recta y plano se cortan en un único punto si el valor de “a” es distinto de 1.

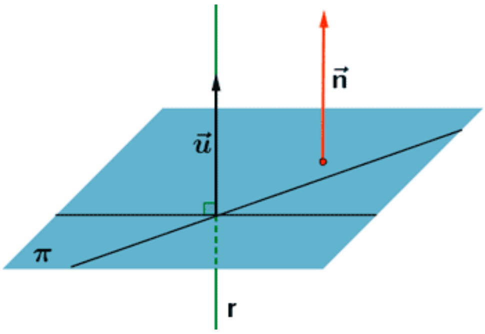
(c) Para que la recta esté contenida en el plano debe cumplirse que el vector normal del plano y el director de la recta sean perpendiculares, es decir, su producto escalar es cero.
Esto ocurre cuando $a = 1$.
Pero la recta puede ser paralela o estar contenida en el plano. Para comprobar si esta contenida en el plano vemos si el punto de la recta $P_r(1,1,0)$ pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} ¿P_r(1,1,0) \in \pi? \\ \pi \equiv 3x-2y-z=4 \end{array} \right\} \Rightarrow ¿3\cdot 1-2\cdot 1-0=4? \Rightarrow ¿1=4? \text{ ¡No se cumple!}$$

La recta no está contenida en el plano para $a = 1$. La recta es paralela al plano para $a = 1$.

La recta no está contenida en el plano para ningún valor de “a”.

(d) La recta r es perpendicular al plano π cuando las coordenadas del vector normal del plano y el director de la recta son proporcionales.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(a,a,1)\\ \vec{n}=(3,-2,-1)\\ r\perp\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{3}=\frac{a}{-2}=\frac{1}{-1}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{3}=\dfrac{1}{-1}\Rightarrow -a=3\Rightarrow \boxed{a=-3}\\ \dfrac{a}{-2}=\dfrac{1}{-1}\Rightarrow -a=-2\Rightarrow \boxed{a=2}\end{cases}$$

No es posible para ningún valor de "*a*" pues se obtienen dos igualdades que son imposibles de cumplir de forma simultánea.

6. Dados los puntos *A(1, 1, 1), B(0, 0, –2), C(2, –1, 0), D(–1, 2, –1)* y *E(0, 0, 0)*.
(a) Compruebe que los puntos A, B y C determinan un único plano, π. (2 puntos)
(b) Averigüe si el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo en el vértice A. (3 puntos)
(c) Halle el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A y D con el plano π. (3 puntos)
(d) Calcule el volumen del tetraedro definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$. (2 puntos)

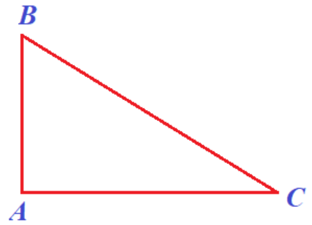
(a) Los puntos A, B y C determinan un único plano si no están alineados.

Los puntos están alineados cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ indican la misma dirección, es decir, tienen las coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,0,-2)-(1,1,1)=(-1,-1,-3)\\ \overrightarrow{AC}=(2,-1,0)-(1,1,1)=(1,-2,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-1}{1}\neq\frac{-1}{-2}\neq\frac{-3}{-1}$$

Los puntos no están alineados y los puntos A, B y C definen un único plano.

(b) Para que sea rectángulo en A los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben ser perpendiculares y por tanto, el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ debe ser cero.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,0,-2)-(1,1,1)=(-1,-1,-3)\\ \overrightarrow{AC}=(2,-1,0)-(1,1,1)=(1,-2,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1,-1,-3)(1,-2,-1)=-1+2+3=4\neq 0$$

El triángulo de vértices A, B y C no es rectángulo en A.

(c) Hallamos la ecuación del plano π definido por los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-3)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(1,-2,-1)\\ B(0,0,-2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x & y & z+2\\ -1 & -1 & -3\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-3y+2z+4+z+2-y-6x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi\equiv -5x-4y+3z+6=0}$$

La recta que pasa por los puntos A y D tiene como vector director el vector $\overrightarrow{AD}$.

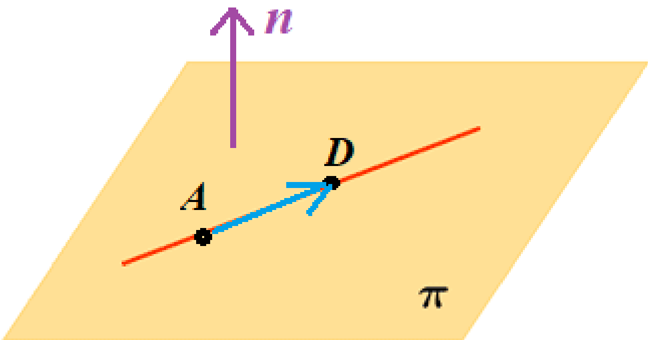
$$\overrightarrow{AD}=(-1,2,-1)-(1,1,1)=(-2,1,-2)$$

Hallamos el ángulo que forma el vector normal del plano y el vector director de la recta $\overrightarrow{AD}$.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AD}=(-2,1,-2)\\ \pi\equiv -5x-4y+3z+6=0\Rightarrow \vec{n}=(-5,-4,3)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AD},\vec{n}\right)=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AD},\vec{n}\right)=\frac{(-2,1,-2)(-5,-4,3)}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+3^2}}=\frac{10-4-6}{15\sqrt{2}}=0\Rightarrow\left(\overrightarrow{AD},\vec{n}\right)=\cos^{-1}(0)=90^{\circ}$$

La recta y el plano forman un ángulo de 90º - 90º = 0º.
La recta puede ser paralela o estar contenida en el plano.
La recta está contenida en el plano pues el punto A pertenece al plano π.



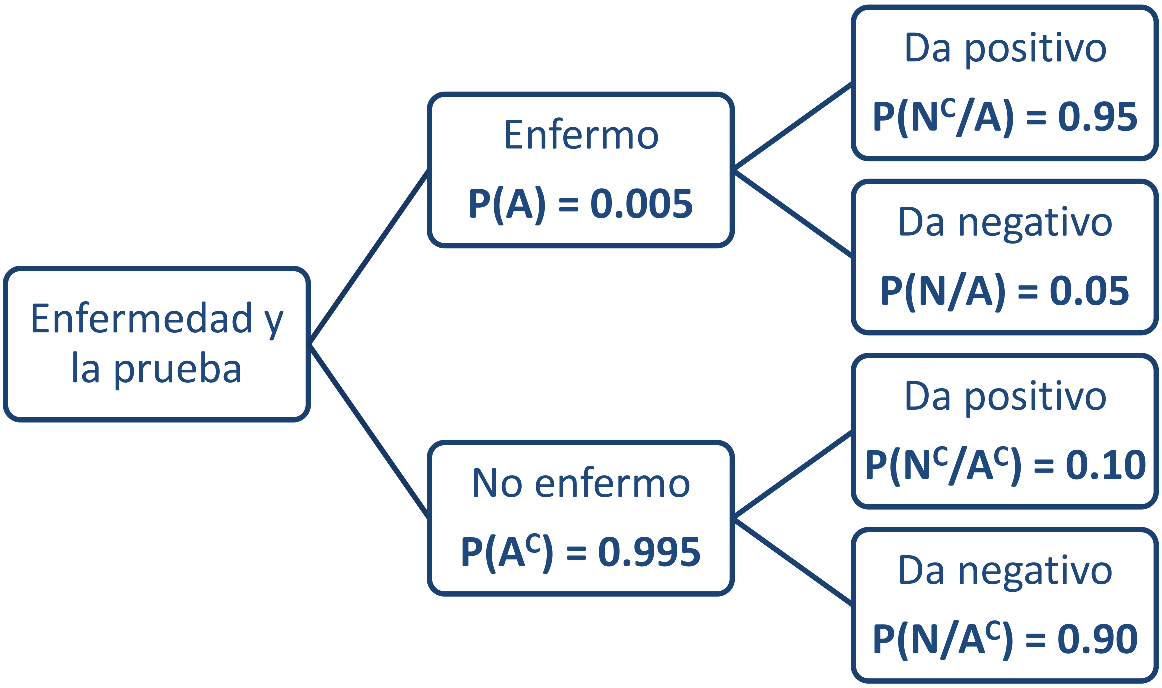
(d) El volumen del tetraedro definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de esos tres vectores.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-3)\\ \overrightarrow{AC}=(1,-2,-1)\\ \overrightarrow{AD}=(-2,1,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}-1 & -1 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-4-2-3+12-2-1=0$$

El volumen es 0. Significa que realmente no definen un tetraedro. Esto ocurre por que el punto D pertenece al plano $\pi\equiv -5x-4y+3z+6=0$ definido por los puntos A, B y C, como se ha visto en el apartado (c). Por lo que los cuatro puntos A, B, C y D son coplanarios.

7. Una prueba diagnóstica de una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada 10000 personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule las siguientes probabilidades.
(a) Que un individuo no padezca la enfermedad. (1 punto)
(b) Que la prueba dé resultado positivo. (3 puntos)
(c) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba es negativo. (3 puntos)
(d) Que el resultado de la prueba sea erróneo. (3 puntos)

Hacemos un diagrama de árbol para clarificar la situación planteada.
Llamamos N = "dar negativo en la prueba diagnóstica", A = "Padecer la enfermedad".
Tenemos que $P(A)=\frac{50}{10000}=\frac{1}{200}=0.005$, $P(N/A)=0.05$, $P(N^C/A^C)=0.10$



(a) Nos piden $P(A^C)$.

$$P(A^C)=1-P(A)=1-0.005=\boxed{0.995}$$

(b) Nos piden $P(N^C)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(N^C)=P(A)P(N^C/A)+P(A^C)P(N^C/A^C)=$$

$$=0.005\cdot 0.95+0.995\cdot 0.1=\boxed{\frac{417}{4000}=0.10425}$$

(c) Nos piden $P(A^C/N)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A^C/N)=\frac{P(A^C\cap N)}{P(N)}=\frac{P(A^C)P(N/A^C)}{1-P(N^C)}=\frac{0.995\cdot 0.9}{1-0.10425}=\boxed{\frac{3582}{3583}\simeq 0.99972}$$

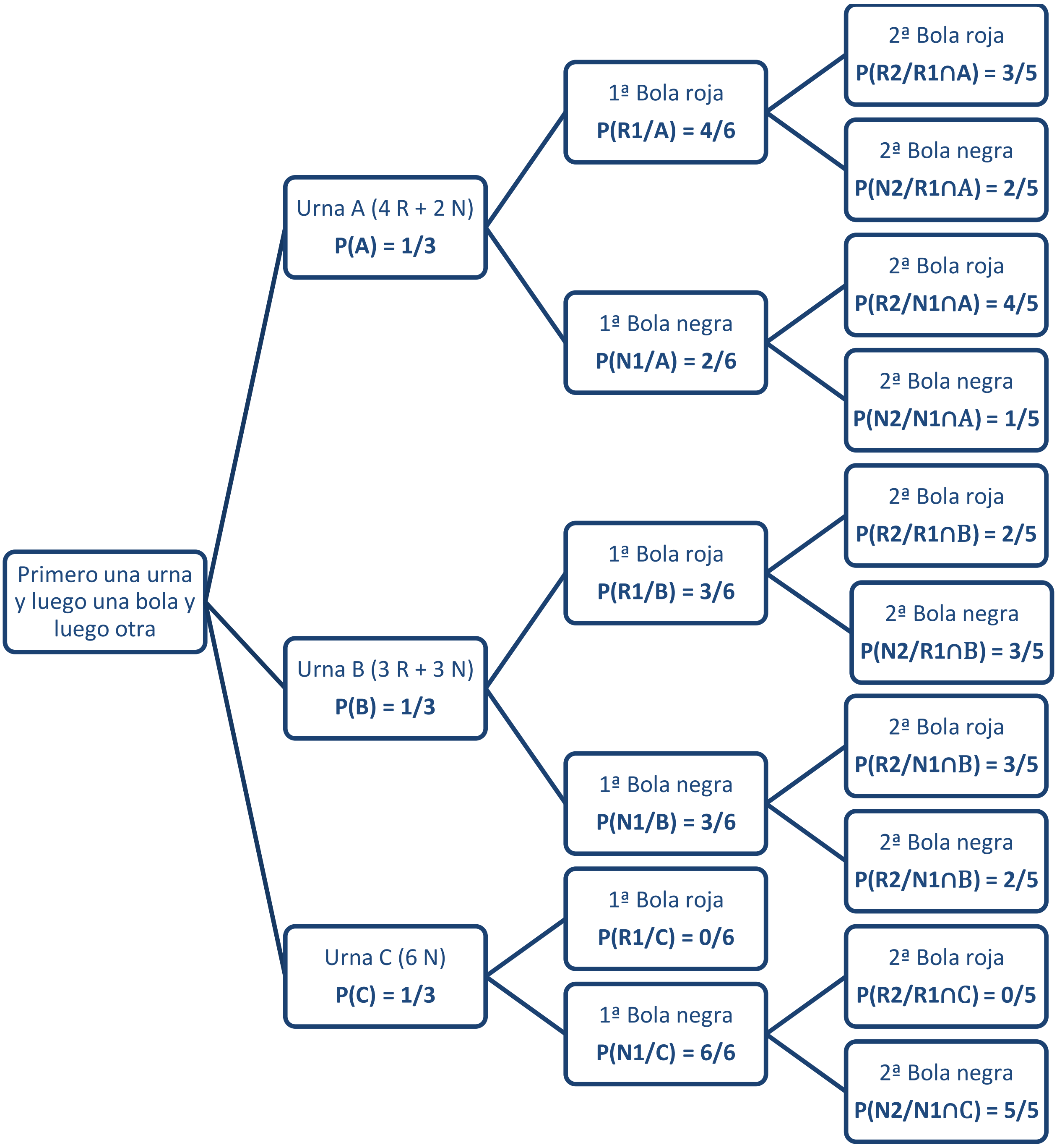
(d) Que el resultado sea erróneo puede ocurrir estando enfermo y dar negativo o también no estando enfermo y dar positivo. La probabilidad de este suceso es la suma de las probabilidades de cada forma en que puede ocurrir.

$$P(\text{Dar resultado erróneo en la prueba}) = P(A \cap N) + P\left(A^C \cap N^C\right) =$$

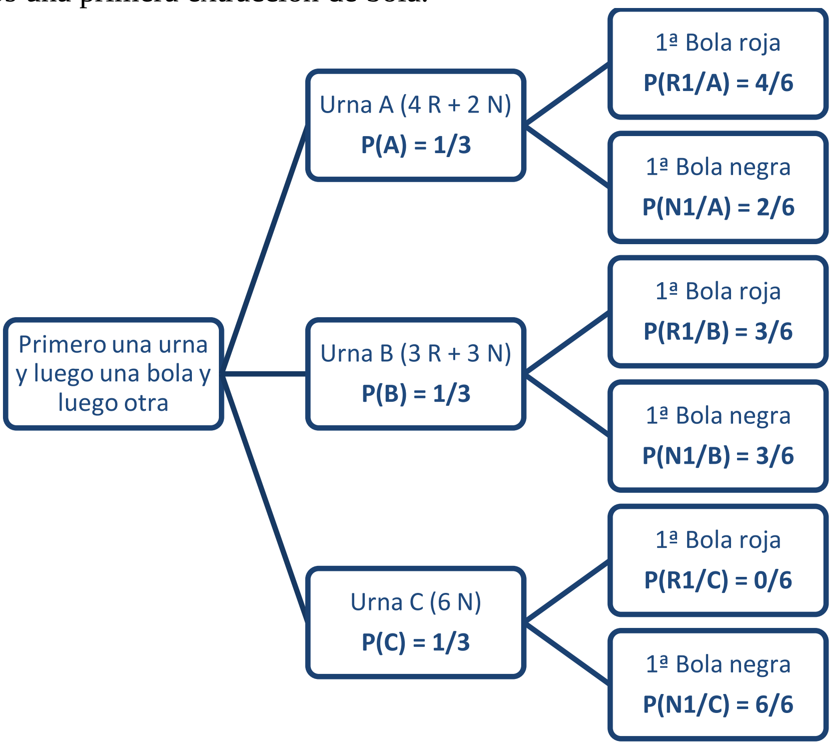
$$= P(A)P(N/A) + P\left(A^C\right)P\left(N^C/A^C\right) = 0.005 \cdot 0.05 + 0.995 \cdot 0.1 = \boxed{\frac{399}{4000} = 0.09975}$$

8. Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 bolas negras. La urna B contiene 3 bolas rojas y 3 bolas negras. La urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento.
(a) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja. (3 puntos)
(b) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra. (3 puntos)
(c) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcule la probabilidad de que la segunda sea negra. (4 puntos)

Llamamos A = "elegir urna A", B = "elegir urna B", C = "elegir urna C", R1 = "sacar 1ª bola roja", N1 = "sacar 1ª bola negra", R2 = "sacar 2ª bola roja", N2 = "sacar 2ª bola negra"
Hacemos un diagrama de árbol explicativo de la situación planteada.



(a) Solo hacemos una primera extracción de bola.



$$P(R1) = P(A)P(R1/A) + P(B)P(R1/B) + P(C)P(R1/C) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{0}{6} = \boxed{\frac{7}{18} \simeq 0.389}$$

(b) Ahora utilizamos el diagrama inicial que contempla la extracción de dos bolas consecutivas y sin reemplazamiento.

$$P(R1 \cap N2) = P(A)P(R1/A)P(N2/(A \cap R1)) + P(B)P(R1/B)P(N2/(B \cap R1)) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \boxed{\frac{17}{90} \simeq 0.189}$$

(c) Utilizamos lo obtenido en los apartados anteriores.

$$P(N2/R1) = \frac{P(N2 \cap R1)}{P(R1)} = \frac{17/90}{7/18} = \boxed{\frac{17}{35} \simeq 0.486}$$