EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2021–2022

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(4)
	Convocatoria:

Instrucciones:
- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+bx & si\ x<1\\ a+\ln(x) & si\ x\geq 1\end{cases}$$

a) Estudia los valores de los parámetros a y b para que la función *f(x)* sea continua y derivable en $\mathbb{R}$. Escribe la función resultante $f(x)$ 1.5 ptos

b) Tomando los valores $a=-2$ y $b=1$, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=e$ 1 pto

1B. Realiza el cálculo de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+4}\,dx$ 1.25 ptos b) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$ 1.25 ptos

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Averigua qué dos matrices de dimensiones $3x3$, X e Y, verifican las siguientes condiciones:

- La suma de ambas matrices X e Y da como resultado la matriz I_3 (siendo I_3 la matriz identidad $3x3$)
- Siendo $A=\begin{pmatrix}9 & 0 & -7\\ 14 & -12 & 0\\ 0 & -7 & -5\end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble de la matriz X y cinco veces la matriz Y 2.5 ptos

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones con un parámetro $\boldsymbol{k}$:

$$\left.\begin{array}{l} kx-y-z=1\\ x+ky+2kz=k\\ x+y+z=-1\end{array}\right\}$$

a) Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tomar el parámetro $\boldsymbol{k}$ 1.5 ptos

b) Resuelve el sistema para $\boldsymbol{k}=\mathbf{1}$ 1 pto

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 4y-3z=-1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x+4y+12=0 \\ 6y+z+13=0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s 1.25 ptos

b) Calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r. Halla el punto de corte de dicho plano π con la recta: $t \equiv \frac{x+4}{-1} = \frac{y-8}{3} = z-2$ 1.25 ptos

3B. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi \equiv \begin{cases} x=1+t+4s \\ y=1+s \\ z=3-2t-5s \end{cases} ; \quad r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0}; \qquad r_2 \equiv \begin{cases} 4x+3y=7 \\ y+4z=5 \end{cases}$$

a) Calcula la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 1.25 ptos

b) ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45º? Justifícalo 1.25 ptos

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Tenemos una caja con bolas de madera y de plástico de distintos colores, pero con el mismo tamaño y aspecto. Contamos con la siguiente información de su contenido:

- El 38% son bolas azules y, de este color, la mitad son de madera
- El 29% son bolas rojas y, de este color, las tres cuartas partes son de madera
- El 33% son bolas verdes y, de este color, dos tercios son de madera

Extraemos una bola de la caja. Responde a las siguientes preguntas:

a) Construye el árbol de probabilidades 0.5 ptos

b) Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la caja, esta sea de madera 1 pto

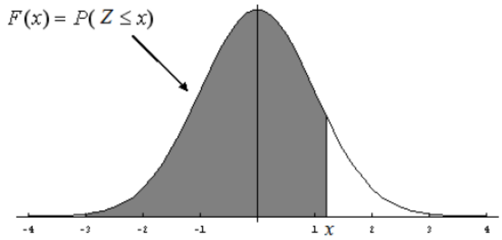
c) Si la bola extraída de la caja es de plástico, ¿qué probabilidad hay de que sea de color rojo? 1 pto

4B. El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco se distribuye como una distribución normal de media 30 periódicos y desviación típica $\sqrt{2}$. Determina:

a) La probabilidad de que en un día se vendan entre 28 y 31 periódicos 1 pto

b) Justifica si es cierto que la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0.1 0.75 ptos

c) El dueño del quiosco considera que su puesto está situado en una buena zona, ya que sabe que hay más de un 80% de posibilidades de vender más de 29 periódicos diarios. ¿Está en lo cierto? Justifícalo 0.75 ptos



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+bx & si\ x<1\\ a+\ln(x) & si\ x\geq 1\end{cases}$$

a) Estudia los valores de los parámetros a y b para que la función *f(x)* sea continua y derivable en $\mathbb{R}$. Escribe la función resultante $f(x)$ 1.5 ptos

b) Tomando los valores $a=-2\ y\ b=1$, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=e$ 1 pto

a) La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ pues el logaritmo neperiano existe y la otra función es un polinomio.

Para que sea continua en $x = 1$ deben coincidir los limites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)^2+bx=b\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} a+\ln(x)=a+\ln(1)=a\\ f(1)=a\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{a=b}$$

Si es derivable en $x = 1$ las derivadas laterales deben coincidir.

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+bx & si\ x<1\\ a+\ln(x) & si\ x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2(x-1)+b & si\ x<1\\ \dfrac{1}{x} & si\ x>1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to1^-} 2(x-1)+b=b\\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x}=1\\ f'(1^-)=f'(1^+)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{b=1}$$

La función es derivable y continua en $\mathbb{R}$ si $a = b = 1$.

b) Tomando los valores $a=-2\ y\ b=1$ la función queda $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+x & si\ x<1\\ -2+\ln(x) & si\ x\geq 1\end{cases}$

En $x = e = 2.71\ldots$ la función es $f(x)=-2+\ln(x)$.

Tenemos que $f(e)=-2+\ln(e)=-2+1=-1$ y también $f'(x)=\dfrac{1}{x}\to f'(e)=\dfrac{1}{e}$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = e$ será:

$$\left.\begin{array}{l}y-f(e)=f'(e)(x-e)\\ f(e)=-1\\ f'(e)=\dfrac{1}{e}\end{array}\right\}\Rightarrow y-(-1)=\frac{1}{e}(x-e)\Rightarrow y+1=\frac{x}{e}-1\Rightarrow\boxed{y=\frac{x}{e}-2}$$

1B. Realiza el cálculo de las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x+4}{x^2+4}dx$ 1.25 ptos b) $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$ 1.25 ptos

a)

$$\int \frac{x+4}{x^2+4}dx = \int \frac{x}{x^2+4}dx + \int \frac{4}{x^2+4}dx = \ldots$$

$$\bullet\int \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)$$

$$\bullet\int \frac{4}{x^2+4}dx = \int \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \left\{\begin{matrix}\text{Cambio de variable}\\ \frac{x}{2}=t \Rightarrow \frac{1}{2}dx = dt\\ dx = 2dt\end{matrix}\right\} = \int \frac{1}{t^2+1}2dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2arctgt = 2arctg\frac{x}{2}$$

$$\ldots = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + 2arctg\frac{x}{2} + K}$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx = \left\{\begin{matrix}\text{Cambio de variable}\\ \ln x = t \to \frac{1}{x}dx = dt\\ dx = xdt\end{matrix}\right\} = \int \frac{t^3}{\cancel{x}}\cancel{x}dt = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{(\ln x)^4}{4} + K$$

Utilizamos este resultado para calcular el valor de la integral definida pedida.

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx = \left[\frac{(\ln x)^4}{4}\right]_1^e = \left[\frac{(\ln e)^4}{4}\right] - \left[\frac{(\ln 1)^4}{4}\right] = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Averigua qué dos matrices de dimensiones $3x3$, X e Y, verifican las siguientes condiciones:
- La suma de ambas matrices X e Y da como resultado la matriz I_3 (siendo I_3 la matriz identidad $3x3$)
- Siendo $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble de la matriz X y cinco veces la matriz Y 2.5 ptos

El sistema matricial que nos plantea el ejercicio es: $\left.\begin{matrix} X+Y=I_3 \\ 2X-5Y=A^T \end{matrix}\right\}$

Lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} X+Y=I_3 \\ 2X-5Y=A^T \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5X+5Y=5I_3 \\ 2X-5Y=A^T \end{matrix}\right\}$$
$$7X = 5I_3+A^T \Rightarrow X=\frac{1}{7}\left(5I_3+A^T\right)$$

$$\left.\begin{matrix} X+Y=I_3 \\ 2X-5Y=A^T \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2X-2Y=-2I_3 \\ 2X-5Y=A^T \end{matrix}\right\}$$
$$-7Y=A^T-2I_3 \Rightarrow Y=\frac{-1}{7}\left(A^T-2I_3\right)$$

Sustituimos las matrices y obtenemos la expresión de X e Y.

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{7}\left(5I_3+A^T\right)=\frac{1}{7}\left[5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & -7 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y=\frac{-1}{7}\left(A^T-2I_3\right)=\frac{-1}{7}\left[\begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{-1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 \\ 0 & -14 & -7 \\ -7 & 0 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones con un parámetro ***k***:

$$\left.\begin{array}{l} kx-y-z=1 \\ x+ky+2kz=k \\ x+y+z=-1 \end{array}\right\}$$

a) Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tomar el parámetro ***k*** 1.5 ptos

b) Resuelve el sistema para ***k* = 1** 1 pto

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2k & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=k^2-2k-1+k+1-2k^2=-k^2-k$$

$$|A|=0 \Rightarrow -k^2-k=0 \Rightarrow -k(k+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{k=0} \\ k+1=0 \Rightarrow \boxed{k=-1} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k=0$

En ese caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} -y-z=1 \\ x \quad\quad\;\; =0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

Queda tan sencillo que podemos intentar resolverlo

$$\left.\begin{array}{l} -y-z=1 \\ \boxed{x=0} \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y-z=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z=-1 \\ y=1-z \end{array}\right\} \Rightarrow 1-z+z=-1 \Rightarrow 1=-1 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible

CASO 3. $k=-1$

En ese caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} -x-y-z=1 \\ x-y-2z=-1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

Queda tan sencillo que podemos intentar resolverlo

$$\left.\begin{array}{l} -x-y-z=1 \\ x-y-2z=-1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{ccccc} x & -y & -2z & = -1 \\ -x & -y & -z & =1 \\ \hline & -2y & -3z & =0 & \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{ccccc} x & +y & +z & =1 \\ -x & -y & -z & =1 \\ \hline & & 0 & =2 & \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y-z=1 \\ -2y-3z=0 \\ {\color{red}0=2} \end{array}\right\}$$

La tercera ecuación es imposible. El sistema es incompatible (sin solución)

b) Para $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$ el sistema es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{l} x-y-z=1 \\ x+y+2z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª } - \text{ Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ -x & +y & +z & =-1 \\ \hline & 2y & +3z & =0 & \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª } - \text{ Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{ccccc} x & +y & +z & =1 \\ -x & +y & +z & =-1 \\ \hline & 2y & +2z & =0 & \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=1 \\ 2y+3z=0 \\ 2y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª } - \text{ Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{ccccc} 2y & +2z & = & 0 \\ -2y & -3z & = & 0 \\ \hline & -z & = & 0 & \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=1 \\ 2y+3z=0 \\ -z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=1 \\ 2y+3z=0 \\ \boxed{z=0} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-0=1 \\ 2y+0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y-0=1 \\ 2y=0 \rightarrow \boxed{y=0} \end{array}\right\} \Rightarrow x-0=1 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La solución es $x = 1, y = 0, z = 0$.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 4y-3z=-1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x+4y+12=0 \\ 6y+z+13=0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s 1.25 ptos

b) Calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r. Halla el punto de corte de dicho plano π con la recta: $t \equiv \frac{x+4}{-1} = \frac{y-8}{3} = z-2$ 1.25 ptos

Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 4y-3z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=-1+2y \\ -3z=-1-4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}y \\ z=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}\alpha \\ y=\alpha \\ z=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r\left(-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right) \\ \overrightarrow{u_r}=\left(\frac{2}{3},1,\frac{4}{3}\right) \end{cases}$$

Como salen fracciones buscamos otro punto con $\alpha=-1 \rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{3}-\frac{2}{3}=-1 \\ y=-1 \\ z=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=-1 \end{cases} \Rightarrow Q_r(-1,-1,-1)$

Y como vector tomamos $\overrightarrow{v_r}=3\overrightarrow{u_r}=3\left(\frac{2}{3},1,\frac{4}{3}\right)=(2,3,4)$

$$s \equiv \begin{cases} x+4y+12=0 \\ 6y+z+13=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-12-4y \\ z=-13-6y \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-12-4\lambda \\ y=\lambda \\ z=-13-6\lambda \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} P_s(-12,0,-13) \\ \overrightarrow{u_s}=(-4,1,-6) \end{cases}$$

a) Los vectores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(2,3,4) \\ \overrightarrow{u_s}=(-4,1,-6) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{-4} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{4}{-6}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

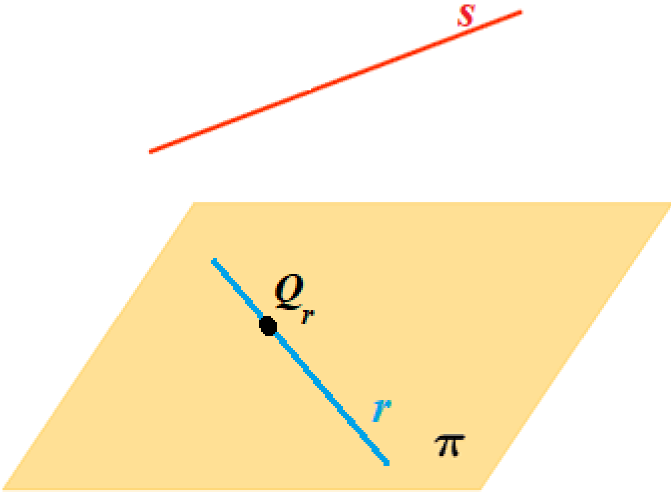
Estudiamos el valor nulo o no del producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{Q_rP_s}\right]$

$\overrightarrow{Q_rP_s}=(-12,0,-13)-(-1,-1,-1)=(-11,1,-12)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(2,3,4) \\ \overrightarrow{u_s}=(-4,1,-6) \\ \overrightarrow{Q_rP_s}=(-11,1,-12) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{Q_rP_s}\right]=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & -6 \\ -11 & 1 & -12 \end{vmatrix}=-24+198-16+44-144+12=70 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo sabemos que las rectas se cruzan.

b) El plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r tiene como vectores directores el vector director de r y el vector director de s. Como contiene a la recta r, entonces contiene el punto Q_r.



$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(2,3,4) \\ \vec{v}=\overrightarrow{u_s}=(-4,1,-6) \\ Q_r(-1,-1,-1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -18x-18-16y-16+2z+2+12z+12+12y+12-4x-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -22x-4y+14z-12=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -11x-2y+7z-6=0}$$

3B. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 2t - 5s \end{cases} ; \quad r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0}; \quad r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$$

a) Calcula la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 1.25 ptos

b) ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45º? Justifícalo 1.25 ptos

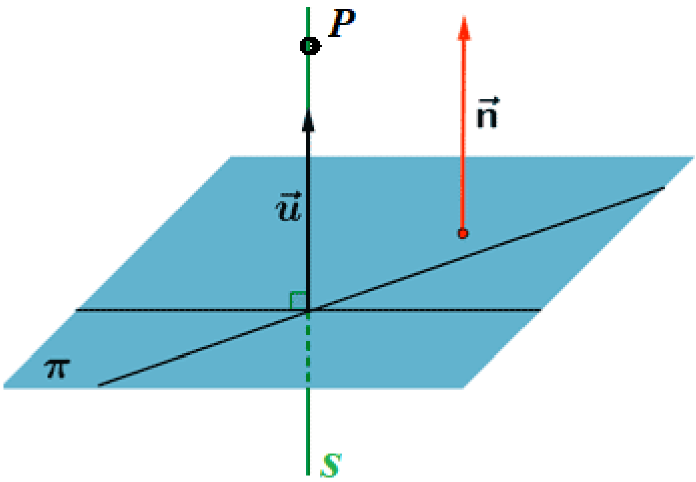
a) Hallamos el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2

$$\left. \begin{array}{l} r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} P_1(-4,-5,1) \\ \vec{v}_1 = (5,6,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -5 + 6t \\ z = 1 \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(-4+5t) + 3(-5+6t) = 7 \\ -5 + 6t + 4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16 + 20t - 15 + 18t = 7 \to 38t = 38 \to t = 1 \\ 6t = 6 \to t = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 5 = 1 \\ y = -5 + 6 = 1 \Rightarrow \boxed{P(1,1,1)} \\ z = 1 \end{cases}$$

La recta s, perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.



Hallamos el vector normal del plano, hallando primero la ecuación general del plano.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 2t - 5s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y - 1 = s \\ z = 3 - 2t - 5s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t + 4(y-1) \\ z = 3 - 2t - 5(y-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t + 4y - 4 \\ z = 3 - 2t - 5y + 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t + 4y - 3 \\ z = -2t - 5y + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4y + 3 = t \\ z = -2t - 5y + 8 \end{cases} \Rightarrow z = -2(x - 4y + 3) - 5y + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -2x + 8y - 6 - 5y + 8 \Rightarrow z = -2x + 3y + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x - 3y + z - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2,-3,1)$$

Hallamos la ecuación de la recta *s*

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_s} = \vec{n} = (2,-3,1) \\ P(1,1,1) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}}$$

b) El ángulo entre las rectas es el ángulo entre sus vectores directores.
Hallamos un vector director de la recta r_2.

$$r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y = 5 - 4z \end{cases} \Rightarrow 4x + 3(5 - 4z) = 7 \Rightarrow 4x + 15 - 12z = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x = -8 + 12z \Rightarrow x = -2 + 3z \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\alpha \\ y = 5 - 4\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} Q_2(-2,5,0) \\ \vec{u_2} = (3,-4,1) \end{cases}$$

Calculamos el ángulo entre las rectas

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_1} = (5,6,0) \\ \vec{u_2} = (3,-4,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(r_1, r_2) = \cos(\vec{v_1}, \vec{u_2}) = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{u_2}|}{|\vec{v_1}| \cdot |\vec{u_2}|} = \frac{|(5,6,0)(3,-4,1)|}{\sqrt{5^2 + 6^2 + 0^2}\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(r_1, r_2) = \frac{|-9|}{\sqrt{61}\sqrt{26}} \Rightarrow (r_1, r_2) \simeq 77^\circ$$

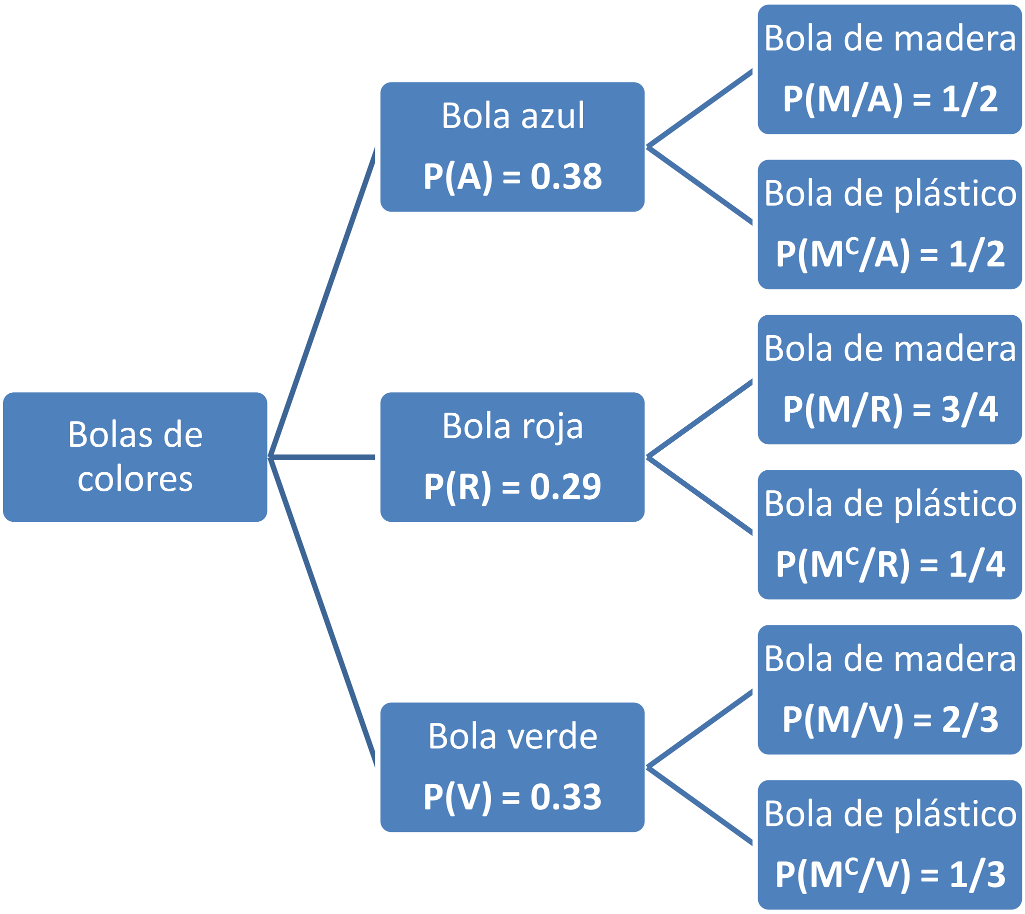
No es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45º. El ángulo es de casi 77º.

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Tenemos una caja con bolas de madera y de plástico de distintos colores, pero con el mismo tamaño y aspecto. Contamos con la siguiente información de su contenido:
- El 38% son bolas azules y, de este color, la mitad son de madera
- El 29% son bolas rojas y, de este color, las tres cuartas partes son de madera
- El 33% son bolas verdes y, de este color, dos tercios son de madera

Extraemos una bola de la caja. Responde a las siguientes preguntas:
a) Construye el árbol de probabilidades 0.5 ptos
b) Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la caja, esta sea de madera 1 pto
c) Si la bola extraída de la caja es de plástico, ¿qué probabilidad hay de que sea de color rojo? 1 pto

a) Llamamos A = "ser bola azul", R = "ser bola roja", V = "ser bola verde" y M = "ser bola de madera", M^C = "ser bola de plástico".
Construimos el diagrama de árbol.



b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(A)P(M/A)+P(R)P(M/R)+P(V)P(M/V)=$$

$$=0.38\cdot\frac{1}{2}+0.29\cdot\frac{3}{4}+0.33\cdot\frac{2}{3}=\boxed{\frac{251}{400}=0.6275}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(R/M^C\right)=\frac{P\left(R\cap M^C\right)}{P\left(M^C\right)}=\frac{P(R)P\left(M^C/R\right)}{1-P(M)}=\frac{0.29\cdot\frac{1}{4}}{1-0.6275}=\boxed{\frac{29}{149}\simeq 0.195}$$

4B. El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco se distribuye como una distribución normal de media 30 periódicos y desviación típica $\sqrt{2}$. Determina:

a) La probabilidad de que en un día se vendan entre 28 y 31 periódicos 1 pto

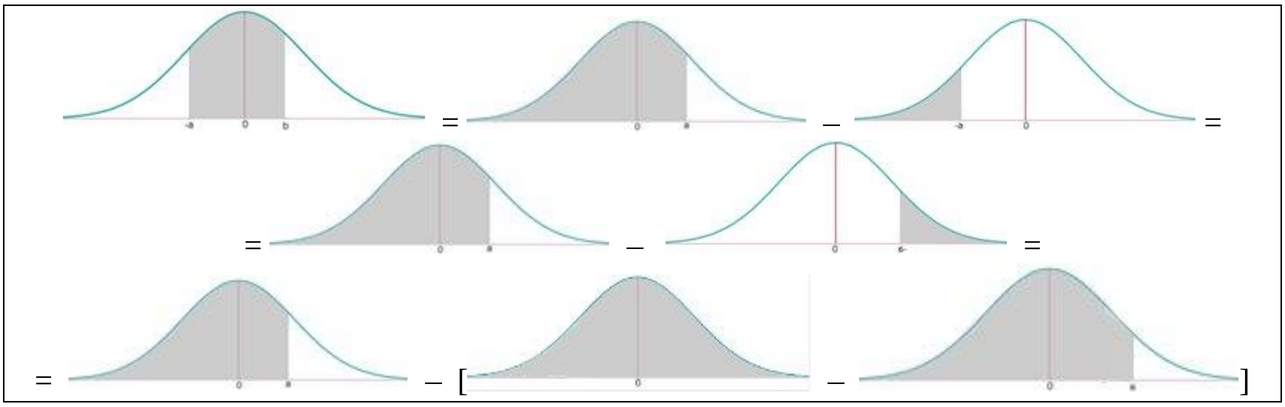
b) Justifica si es cierto que la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0.1 0.75 ptos

c) El dueño del quiosco considera que su puesto está situado en una buena zona, ya que sabe que hay más de un 80% de posibilidades de vender más de 29 periódicos diarios. ¿Está en lo cierto? Justifícalo 0.75 ptos

Llamamos X = El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco.

X = N(30, $\sqrt{2}$)

a) $P(28 \le X \le 31) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-30}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\} = P\left(\dfrac{28-30}{\sqrt{2}} \le Z \le \dfrac{31-30}{\sqrt{2}} \right) = P(-1.41 \le Z \le 0.71) = \ldots$



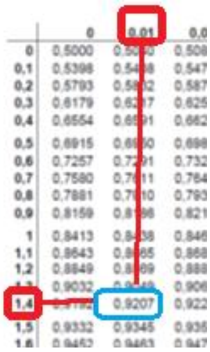
$$\ldots = P(Z \le 0.71) - P(Z \le -1.41) = P(Z \le 0.71) - P(Z \ge 1.41) = P(Z \le 0.71) - [1 - P(Z \le 1.41)] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 0.7611 - [1 - 0.9192] = \boxed{0.6803}$$

b) Calculamos el valor de $P(X \ge 32)$

$$P(X \ge 32) = 1 - P(X \le 32) = \{Tipificamos\} = 1 - P\left(Z \le \dfrac{32-30}{\sqrt{2}} \right) = 1 - P(Z \le 1.41) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0.9207 = \boxed{0.0793} < 0.1$$



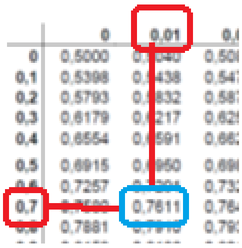
	0	0,01	0,0
0	0,5000	[illegible]	0,508
0,1	0,5398	[illegible]	0,547
0,2	0,5793	[illegible]	0,587
0,3	0,6179	[illegible]	0,625
0,4	0,6554	[illegible]	0,662
0,5	0,6915	[illegible]	0,698
0,6	0,7257	[illegible]	0,732
0,7	0,7580	[illegible]	0,764
0,8	0,7881	[illegible]	0,793
0,9	0,8159	[illegible]	0,821
1	0,8413	[illegible]	0,846
1,1	0,8643	[illegible]	0,868
1,2	0,8849	[illegible]	0,888
[illegible]	0,9032	[illegible]	0,906
1,4	[illegible]	0,9207	0,922
1,5	0,9332	0,9345	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,947

Si es cierta la afirmación de que la probabilidad es menor de 0.1.

c) Calculamos $P(X \geq 29)$

$$P(X \geq 29) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{29-30}{\sqrt{2}}\right) = P(Z \geq -0.71) = P(Z \leq 0.71) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = \boxed{0.7611}$$



	0	0,01	0,0
0	0,5000	[illegible]	0,50
0,1	0,5398	[illegible]	0,54
0,2	0,5793	[illegible]	0,58
0,3	0,6179	[illegible]	0,62
0,4	0,6554	[illegible]	0,66
0,5	0,6915	[illegible]	0,69
0,6	0,7257	[illegible]	0,73
0,7	[illegible]	0,7611	0,76
[illegible]	0,7881	[illegible]	0,79

Hemos visto que $P(X \geq 29) = 0.7611$. Esto implica que hay un 76.11 % de posibilidades de que venda más de 29 periódicos. La afirmación de que es mayor del 80 % es falsa.