	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 2**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discuta según los valores del parámetro *m* el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+mz=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$ **(1.2 puntos)**

b) Resuélvalo para $m=2$. **(0.8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX+B=C$

(1.2 puntos)

b) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, explíquese cuales de los productos MN, MP, NP pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda. **(0.8 puntos)**

E3.- (Geometría)

a) Calcule el plano que pasa por el punto (1, 0, 1) y es paralelo a los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\vec{v}=(1,2,3)$. **(1.5 puntos)**

b) Calcule el plano paralelo a $3x+2y+2z+1=0$ que pasa por el punto (1,2,3). **(0.5 puntos)**

E4.- (Geometría)

a) Encuéntrense las ecuaciones de la recta que está contenida en el plano $\alpha \equiv x-y=0$, es paralela al plano $\beta \equiv 2x-3y+z=4$ y pasa por el punto P = (1, 1, 3). **(1 punto)**

b) Hállese la ecuación del plano que es paralelo a $r \equiv x-1 = y+2 = \frac{z-1}{2}$ y pasa por los puntos $A=(0,\ 3,\ 1)$ y $B=(-2,\ 1,\ -1)$. **(1 punto)**

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Encuentre su dominio y calcule sus asíntotas, si las tiene. **(1 punto)**
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si los tiene. **(1 punto)**

E6.- (Análisis)

a) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ **(1 punto)**
b) Estudiando previamente el signo de la función en el intervalo [0,3], hállese el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-9x$ y el eje de abscisas, cuando x varía en el intervalo [0,3].
(1 punto)

E7.- (Análisis)

a) Enuncie el teorema de Bolzano. **(1 punto)**
b) Averigüe si la función $f(x)=x+senx-2$ se anula en algún punto del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
(1 punto)

E8.- (Análisis)

a) Estudie el signo de la función $f(x)=x^3-4x^2+3x$ en el intervalo $[0,2]$. **(0.5 puntos)**
b) Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-4x^2+3x$ y el eje de abscisas en el intervalo [0,2]. **(1.5 puntos)**

E9- (Probabilidad y estadística)

Entre los participantes de un torneo internacional de ajedrez:

- El 28% de ellos son rusos, de los cuales las tres cuartas partes son grandes maestros.
- El 24% son estadounidenses y entre ellos la mitad son grandes maestros.
- El 48% son del resto del mundo, de los cuales un tercio son grandes maestros.

Considerando los sucesos: R= "ser ruso", E= "ser estadounidense", M= "no ser ruso ni estadounidense" y GM = "ser gran maestro"

a) Indique cuáles son los valores de $P(GM/R)$, $P(GM/E)$ y $PP(GM/M)$. **(0,3 puntos)**
b) Calcule la probabilidad de que al elegir al azar a uno de los participantes en el torneo, sea un gran maestro. **(0,7 puntos)**
c) Si se elige al azar a uno de los grandes maestros del torneo, ¿cuál es la probabilidad de que sea ruso?
(1 punto)

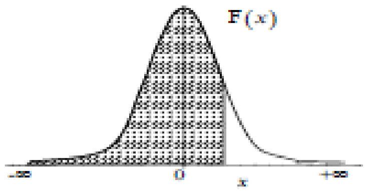
E10.- (Probabilidad y estadística)

La variable agudeza visual de una población se ajusta a una distribución normal de media 2 cpg (ciclos por segundo) y desviación típica 1 cpg. A los individuos con una agudeza visual inferior a 1.1 cpg se les considera con "problemas visuales graves".

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene "problemas visuales graves"? **(1 punto)**
b) ¿Qué porcentaje de la población tiene una agudeza visual entre 2 y 2.9 cpg? **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)

a) Discuta según los valores del parámetro *m* el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+mz=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$ **(1.2 puntos)**

b) Resuélvalo para *m = 2*. **(0.8 puntos)**

a) Podemos obtener un sistema equivalente al dado, pero con una expresión más sencilla utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+mz=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{ccccc} 2x & -y & +2z & =3 \\ -2x & -2y & -2mz & =-8 \\ \hline & -3y & +(2-2m)z & =-5 & \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{ccccc} x & -2y & +z & =0 \\ -x & -y & -mz & =-4 \\ \hline & -3y & +(1-m)z & =-4 & \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+ \quad mz=4 \\ -3y+(2-2m)z=-5 \\ -3y+(1-m)z=-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{cccc} -3y & +(1-m)z & = & -4 \\ 3y & +(-2+2m)z & = & 5 \\ \hline & (-1+m)z & = & 1 & \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+ \quad mz=4 \\ -3y+(2-2m)z=-5 \\ (-1+m)z=1 \end{cases}$$

El sistema equivalente obtenido tiene dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

Si $-1+m=0 \Rightarrow m=1$ el sistema queda

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ -3y=-5 \\ 0=1 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución pues la última ecuación es imposible.

Si $m\neq 1$ en la última ecuación se puede despejar el valor de "z" y obtener el resto de valores de las incógnitas con facilidad. El sistema es compatible determinado (una única solución)

Resumiendo: Si $m\neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Si $m=1$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Si *m = 2* el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado a).

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ -3y-2z=-5 \\ \boxed{z=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2=4 \\ -3y-2=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ -3y=-3 \rightarrow \boxed{y=1} \end{cases} \Rightarrow x+1=2 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La solución es *x = 1, y = 1, z = 1.*

E2.- (Álgebra)

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX+B=C$ **(1.2 puntos)**

b) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&0\end{pmatrix}$, explíquese cuales de los productos MN, MP, NP pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda. **(0.8 puntos)**

a) Despejamos en la ecuación la matriz X.

$$AX+B=C\Rightarrow AX=C-B\Rightarrow X=A^{-1}(C-B)$$

Calculamos la inversa de A.

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow \text{Existe la inversa de A.}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

Sustituimos los valores de las matrices y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X=A^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=X}$$

b)

$$MN=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\text{¡No es posible!}$$

$$2\times\boxed{3\ \cdot\ 2}\times 2$$

$$MP=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1+1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 2\rightarrow 2\times 2$$

$$NP=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&0\end{pmatrix}=\text{¡No es posible!}$$

$$2\times\boxed{2\ \cdot\ 3}\times 2$$

E3.- (Geometría)

a) Calcule el plano que pasa por el punto (1, 0, 1) y es paralelo a los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\vec{v}=(1,2,3)$. **(1.5 puntos)**

b) Calcule el plano paralelo a $3x+2y+2z+1=0$ que pasa por el punto (1,2,3). **(0.5 puntos)**

a)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(1,1,1)\\ \vec{v}=(1,2,3)\\ P(1,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow 3x-3+y+2z-2-z+1-3y-2x+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x-2y+z-2=0}$$

b) El plano paralelo a $3x+2y+2z+1=0$ tiene ecuación $\pi'\equiv 3x+2y+2z+D=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi'\equiv 3x+2y+2z+D=0\\ (1,2,3)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow 3+4+6+D=0\Rightarrow D=-13\Rightarrow \boxed{\pi'\equiv 3x+2y+2z-13=0}$$

E4.- (Geometría)
a) Encuéntrense las ecuaciones de la recta que está contenida en el plano $\alpha \equiv x - y = 0$, es paralela al plano $\beta \equiv 2x - 3y + z = 4$ y pasa por el punto P = (1, 1, 3). **(1 punto)**

b) Hállese la ecuación del plano que es paralelo a $r \equiv x - 1 = y + 2 = \dfrac{z-1}{2}$ y pasa por los puntos $A = (0,\ 3,\ 1)$ y $B = (-2,\ 1,\ -1)$. **(1 punto)**

a) Si está contenida en el plano $\alpha \equiv x - y = 0$ entonces el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano α.

Si es paralela al plano $\beta \equiv 2x - 3y + z = 4$ entonces el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano β.

Al ser perpendicular a los dos vectores normales nos sirve como vector director de la recta el producto vectorial de los vectores normales de **α** y **β**.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x - y = 0 \to \overrightarrow{n_1} = (1,-1,0) \\ \beta \equiv 2x - 3y + z = 4 \to \overrightarrow{n_2} = (2,-3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)$$

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v} = (-1,-1,-1) \\ P(1,1,3) \in r \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 - \lambda \end{cases}}$$

b) Si el plano es paralelo a la recta *r* tendrá como uno de sus vectores directores el vector director de la recta *r*. Además, como pasa por los puntos A y B el otro vector director del plano es $\overrightarrow{AB}$.

$$r \equiv x - 1 = y + 2 = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \vec{u} = (1,1,2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2,1,-1) - (0,3,1) = (-2,-2,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (1,1,2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-2,-2,-2) \\ A(0,3,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - 4y + 12 - 2z + 2 + 2z - 2 + 2y - 6 + 4x = 0 \Rightarrow 2x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y + 3 = 0}$$

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Encuentre su dominio y calcule sus asíntotas, si las tiene. **(1 punto)**

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si los tiene. **(1 punto)**

a) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$Dominio\, f(x)=\mathbb{R}-\{2\}$$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{2-x}=\frac{2^2}{2-2}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical**.**

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2-x}=\left\{\begin{matrix}\text{Grado del numerador}\\ \text{mayor que el grado del denominador}\end{matrix}\right\}=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x-x^2}=\left\{\begin{matrix}\text{Grado del denominador}\\ \text{igual que el del numerador}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2-x}+x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2-x}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Grado del denominador}\\ \text{igual que el del numerador}\end{matrix}\right\}=\frac{2}{-1}=-2$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=-x-2$

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{x^2}{2-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(2-x)-(-1)(x^2)}{(2-x)^2}=\frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2}=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}=0\Rightarrow 4x-x^2=0\Rightarrow x(4-x)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ o\\ \boxed{x=4}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Incluyo el valor excluido del dominio.

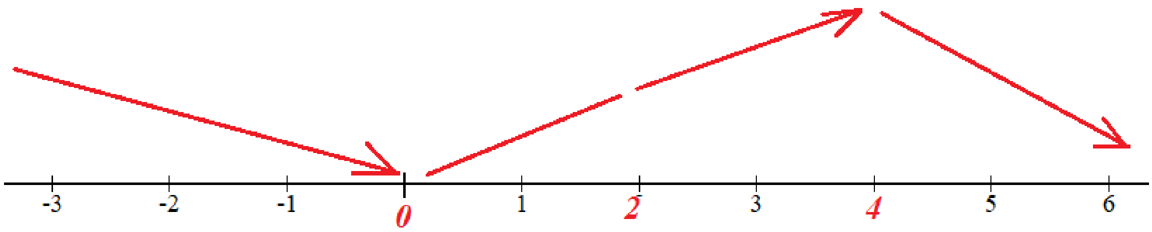
En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{4(-1)-(-1)^2}{(2-(-1))^2}=\frac{-5}{9}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.

En el intervalo $(0,2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{4-1^2}{(2-1)^2}=3>0$. La función crece en $(0,2)$.

En el intervalo $(2,4)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\frac{12-3^2}{(2-3)^2}=3>0$. La función crece en $(2,4)$.

En el intervalo $(4,+\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5)=\frac{20-5^2}{(2-5)^2}=\frac{-5}{9}<0$. La función decrece en $(4,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ y crece en $(0,2)\cup(2,4)$

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 4$.

Como $f(0)=\frac{0^2}{2-0}=0$ y $f(4)=\frac{4^2}{2-4}=-8$ entonces las coordenadas del mínimo relativo son $(0,0)$ y las del máximo relativo son $(4,-8)$

E6.- (Análisis)

a) Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$ **(1 punto)**

b) Estudiando previamente el signo de la función en el intervalo [0,3], hállese el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-9x$ y el eje de abscisas, cuando x varía en el intervalo [0,3].

(1 punto)

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}=\frac{\ln(1+0)}{e^0-1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{e^x}=\frac{\frac{1}{1+0}}{e^0}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

b) Veamos primero si la gráfica de la función corta el eje de abscisas entre 0 y 3.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3-9x \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow x^3-9x=0\Rightarrow x(x^2-9)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ o\\ x^2-9=0\to x^2=9\to\boxed{x=\sqrt{9}=\pm 3}\end{cases}$$

Esos valores de corte están situados en los extremos del intervalo [0,3].

Comprobamos si la función $f(x)=x^3-9x$ es positiva o negativa en el intervalo [0,3].

Tomamos $x=1\in[0,3]$ y la función vale $f(1)=1^3-9=-8<0$.

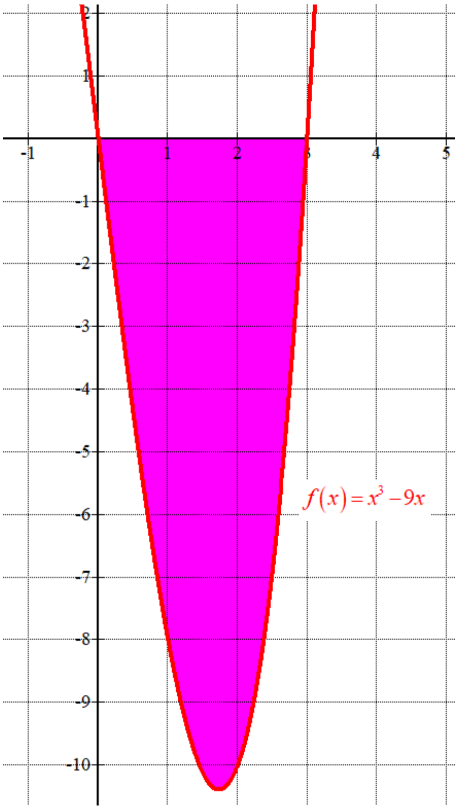
La función es negativa en el intervalo (0, 3).

El área pedida es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 3.

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 x^3-9xdx=\left[\frac{x^4}{4}-9\frac{x^2}{2}\right]_0^3=$$

$$=\left[\frac{3^4}{4}-9\frac{3^2}{2}\right]-\left[\frac{0^4}{4}-9\frac{0^2}{2}\right]=\frac{81}{4}-\frac{81}{2}=-\frac{81}{4}$$

$$\acute{A}rea=\left|\int_0^3 f(x)dx\right|=\left|-\frac{81}{4}\right|=\boxed{\frac{81}{4}=20.25u^2}$$



E7.- (Análisis)

a) Enuncie el teorema de Bolzano. **(1 punto)**

b) Averigüe si la función $f(x) = x + senx - 2$ se anula en algún punto del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **(1 punto)**

a)

b) Aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x + senx - 2$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La función $f(x) = x + senx - 2$ es continua en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo, aplicando el teorema de Bolzano existe un valor $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que *f(c) = 0.*

Comprobamos los signos de la función en *x = 0* y en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = 0 + sen0 - 2 = -2 < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + sen\frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi}{2} + 1 - 2 = 0.57 > 0 \end{array}\right\} \text{Se puede aplicar el teorema de Bolzano.}$$

E8.- (Análisis)

a) Estudie el signo de la función $f(x)=x^3-4x^2+3x$ en el intervalo $[0,2]$. **(0.5 puntos)**

b) Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-4x^2+3x$ y el eje de abscisas en el intervalo [0,2]. **(1.5 puntos)**

a) Averiguamos cuando la función se anula.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3-4x^2+3x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-4x^2+3x=0 \Rightarrow x\left(x^2-4x+3\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ o \\ x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\dfrac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} \dfrac{4+2}{2}=\boxed{3=x} \\ \dfrac{4-2}{2}=\boxed{1=x} \end{cases} \end{cases}$$

De los tres valores donde la función se anula el valor $x=1\in(0,2)$

Por lo tanto tenemos que *f(0) = 0* y *f(1) = 0*. Estudiamos que ocurre antes y después de *x = 1*.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos *x = 0.5* y la función vale $f(0.5)=0.5^3-4\cdot 0.5^2+3\cdot 0.5=0.625>0$. La función es positiva en $(0,1)$**.**
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos *x = 1.5* y la función vale $f(1.5)=1.5^3-4\cdot 1.5^2+3\cdot 1.5=-1.125<0$. La función es negativa en $(1,2)$.

Resumiendo: La función se anula en *x = 0*, es positiva en $(0,1)$, se anula en *x = 1* y es negativa en $(1,2]$.

b) Esta área se calcula sumando el valor absoluto de dos integrales definidas: una entre 0 y 1 y otra entre 1 y 2 de la función.

$$Área1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^3-4x^2+3xdx=\left[\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^4}{4}-4\frac{1^3}{3}+3\frac{1^2}{2}\right]-\left[\frac{0^4}{4}-4\frac{0^3}{3}+3\frac{0^2}{2}\right]=\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\boxed{\frac{5}{12}\simeq 0.417u^2}$$

Para calcular el área de la región 2 hacemos primero la integral definida que saldrá con valor negativo. El área será el valor absoluto de dicha integral definida.

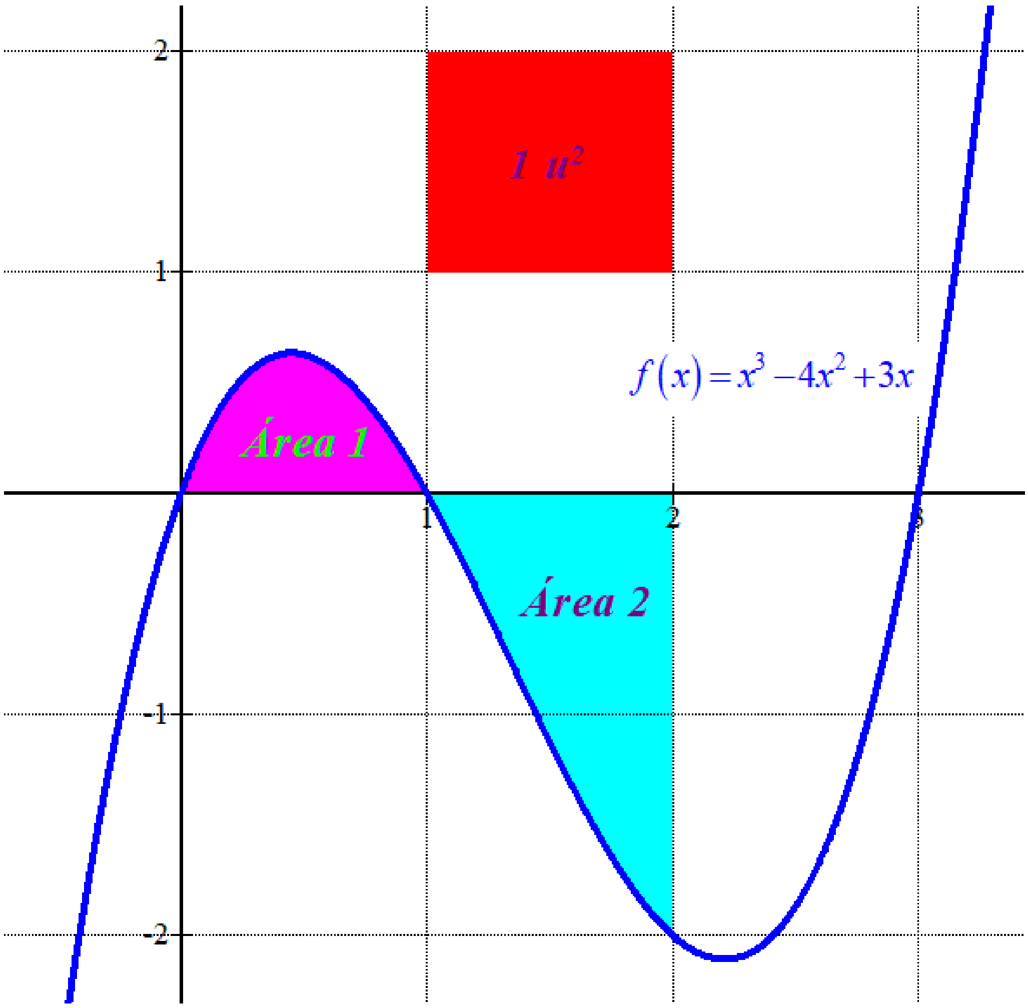
$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x^3 - 4x^2 + 3x\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - 4\frac{2^3}{3} + 3\frac{2^2}{2}\right] - \left[\frac{1^4}{4} - 4\frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2}\right] = 4 - \frac{32}{3} + 6 - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{13}{12}$$

$$Área\,2 = \left|-\frac{13}{12}\right| = \boxed{\frac{13}{12} \simeq 1.083u^2}$$

El área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje de abscisas en el intervalo [0,2] es la suma del área 1 y el área 2.

$$Área = Área\,1 + Área\,2 = \frac{5}{12} + \frac{13}{12} = \frac{18}{12} = \boxed{1.5u^2}$$



E9- (Probabilidad y estadística)

Entre los participantes de un torneo internacional de ajedrez:

• El 28% de ellos son rusos, de los cuales las tres cuartas partes son grandes maestros.

• El 24% son estadounidenses y entre ellos la mitad son grandes maestros.

• El 48% son del resto del mundo, de los cuales un tercio son grandes maestros.

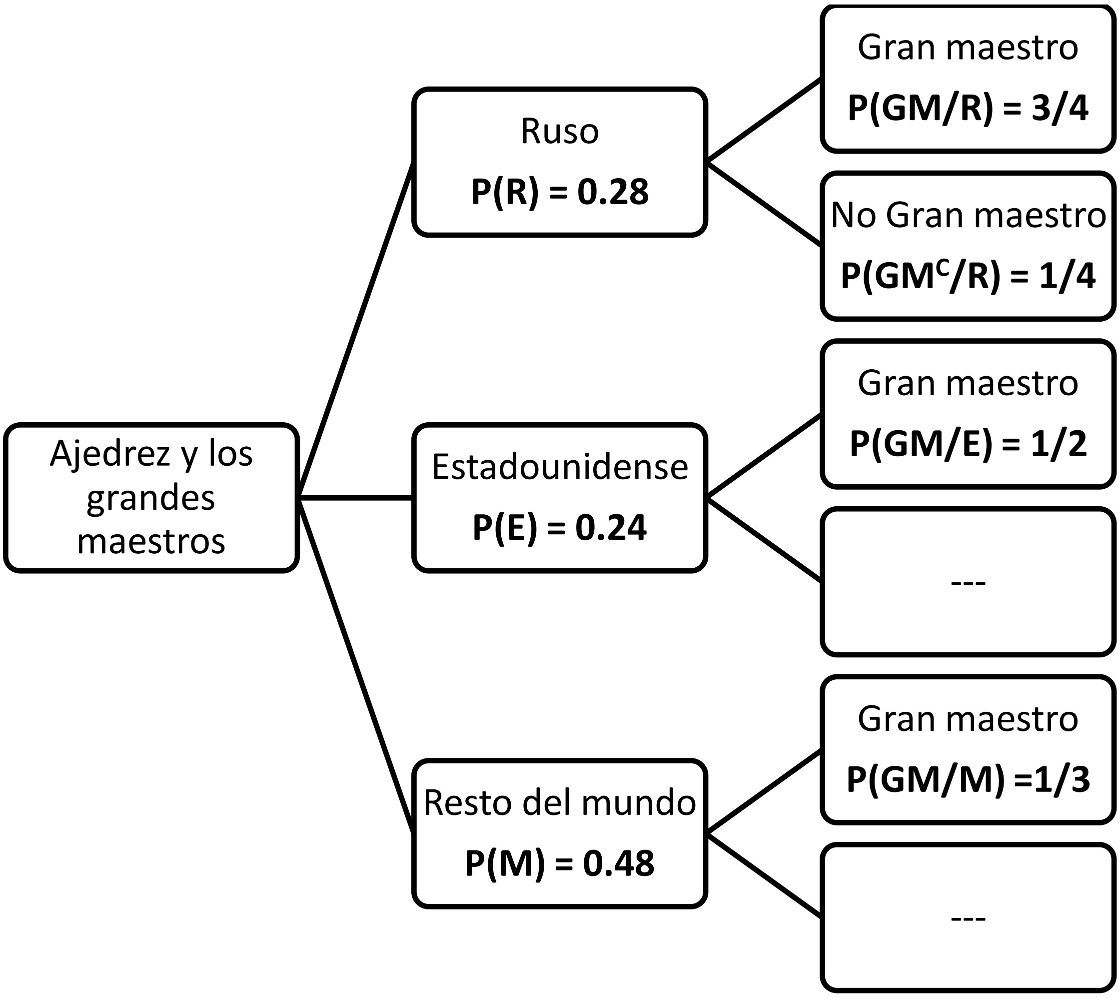
Considerando los sucesos: R= "ser ruso", E= "ser estadounidense", M= "no ser ruso ni estadounidense" y GM = "ser gran maestro"

a) Indique cuáles son los valores de $P(GM/R)$, $P(GM/E)$ y $PP(GM/M)$. **(0,3 puntos)**

b) Calcule la probabilidad de que al elegir al azar a uno de los participantes en el torneo, sea un gran maestro. **(0,7 puntos)**

c) Si se elige al azar a uno de los grandes maestros del torneo, ¿cuál es la probabilidad de que sea ruso? **(1 punto)**

Representamos en un diagrama de árbol toda la información del ejercicio.



a) Estos datos nos los proporciona el ejercicio.

$$P(GM/R)=\frac{3}{4}=0.75$$

$$P(GM/E)=\frac{1}{2}=0.5$$

$$P(GM/M)=\frac{1}{3}\approx 0.33$$

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(GM) = P(R)P(GM/R) + P(E)P(GM/E) + P(M)P(GM/M) =$$

$$= 0.28 \cdot \frac{3}{4} + 0.24 \cdot \frac{1}{2} + 0.48 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{0.49}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R/GM) = \frac{P(R \cap GM)}{P(GM)} = \frac{P(R)P(GM/R)}{P(GM)} = \frac{0.28 \cdot \frac{3}{4}}{0.49} = \boxed{\frac{3}{7} \simeq 0.429}$$

E10.- (Probabilidad y estadística)
La variable agudeza visual de una población se ajusta a una distribución normal de media 2 cpg (ciclos por segundo) y desviación típica 1 cpg. A los individuos con una agudeza visual inferior a 1.1 cpg se les considera con "problemas visuales graves".

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene "problemas visuales graves"? **(1 punto)**

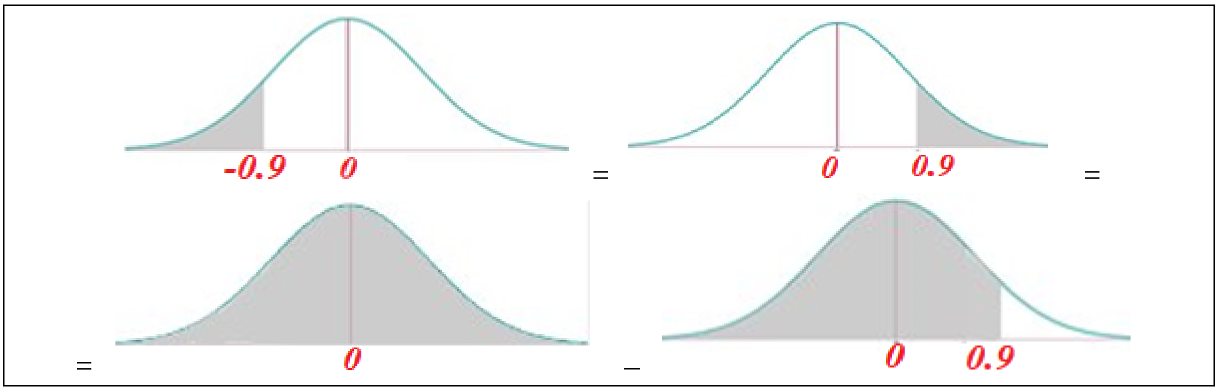
b) ¿Qué porcentaje de la población tiene una agudeza visual entre 2 y 2.9 cpg? **(1 punto)**

X = La agudeza visual de una población (en cpg).
X = N(2, 1).

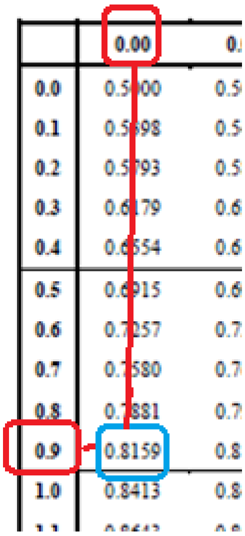
a) Nos piden calcular $P(X<1.1)$

$$P(X<1.1)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-2}{1}<\frac{1.1-2}{1}\right)=P(Z<-0.9)=P(Z>0.9)=$$

$$=1-P(Z\le 0.9)=\ldots$$



$$=\{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\}=1-0.8159=0.1841=\boxed{18.41\,\%}$$



	0.00	0.
0.0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6
0.6	0.7257	0.7
0.7	0.7580	0.7
0.8	0.7881	0.7
0.9	0.8159	0.8
1.0	0.8413	0.8

b) Nos piden calcular $P(2\le X\le 2.9)$.

$$P(2<X<2.9)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{2-2}{1}<\frac{X-2}{1}<\frac{2.9-2}{1}\right)=P(0<Z<0.9)=$$

$$=P(Z<0.9)-P(Z<0)=\{\text{Miramos en la tabla}\}=0.8159-0.5=0.3159=\boxed{31.59\%}$$