Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2021-2022

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. **El estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo **se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas**. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas y las soluciones.

PREGUNTAS

1. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar el rango de la matriz $A-\lambda I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 2 x 2. (1,5 puntos)

b) Para $\lambda = 2$ solucionar el sistema $AX=\lambda X$, donde $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (0,5 puntos)

2. Discutir en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de ecuaciones: (2 puntos)

$$\left.\begin{aligned} 4x+y-2az&=a \\ ax-y\quad+z&=0 \\ y-az&=-1 \end{aligned}\right\}$$

3. Dados los puntos A = (0, 0, 2) y B = (1, 1, 0) y la recta $r:\begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$. (2 puntos)

Calcular un punto $P \in r$ para que el triángulo ABP tenga un ángulo recto en el punto A.

4. Sean las rectas: $r:\begin{cases} x=2-2y \\ z=1-x \end{cases}$ y $s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

a) Estudiar la posición relativa de las rectas *r* y *s*. (1 punto)

b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

5. Dada la función

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$$

a) Estudiar asíntotas, monotonía y puntos extremos de *f(x)*. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de *f(x)*. (0,5 puntos)

6. Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$. (2 puntos)

7. Calcular la integral $\int \frac{1}{x^3 - x}dx$ (2 puntos)

8. Hallar el parámetro positivo $a \in \mathbb{R}$ tal que el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = ax$ sea 4/3. (2 puntos)

9. El 50% de los alumnos de la UEX practica “running" y el 30% monta en bicicleta. Además, se sabe que el 70% de los alumnos de la UEX practica uno de los dos deportes. Si seleccionamos un alumno al azar, se pide:

a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes. (0,75 puntos)

b) Si practica el deporte de montar en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que practique running? (0,75 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos “Practicar running" y “Practicar montar en bicicleta"? (0,5 puntos)

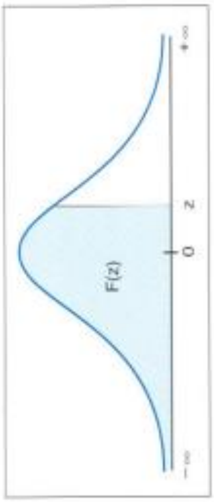
10. El diámetro de las cerezas picotas del Jerte se distribuye normalmente con media 2,5 cm y desviación típica 0,2 cm.

a) Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10% de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas? (1 punto)

b) Si tomamos una cereza picota del Jerte al azar ¿qué probabilidad tiene la cereza de tener un diámetro entre 2,2 cm y 2,8 cm? (1 punto)

Tabla de distribución normal $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \leq z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Estudiar el rango de la matriz $A-\lambda I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 2 x 2. (1,5 puntos)

b) Para $\lambda=2$ solucionar el sistema $AX=\lambda X$, donde $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ (0,5 puntos)

a) Calculamos $A-\lambda I$.

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda & 2\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

Para que el rango de $A-\lambda I$ sea 2 su determinante debe ser no nulo.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & 2\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)-2=\lambda^2-\lambda-2$$

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\lambda^2-\lambda-2=0\Rightarrow\lambda=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=\boxed{2=\lambda}\\ \frac{1-3}{2}=\boxed{-1=\lambda}\end{cases}$$

Si $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq 2$ el determinante de $A-\lambda I$ es no nulo y su rango es 2.

Si $\lambda=-1$ la matriz queda $A-\lambda I=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Esta matriz tiene rango 1, pues su determinante es nulo (rango < 2) y hay un menor de orden 1 no nulo.

Si $\lambda=2$ la matriz queda $A-\lambda I=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Esta matriz tiene rango 1, pues su determinante es nulo (rango < 2) y hay un menor de orden 1 no nulo.

Resumiendo: Si $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq 2$ el rango de $A-\lambda I$ es 2. Si $\lambda=-1$ o $\lambda=2$ el rango es 1.

b) Para $\lambda=2$ resolvemos el sistema.

$$AX=\lambda X\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2y\\ x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\ 2y\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2y=2x\\ x+y=2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x\\ x=y\end{cases}\Rightarrow\boxed{Solución:\begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}}\quad o\quad bien\quad\boxed{X=\begin{pmatrix}t\\ t\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}}$$

2. Discutir en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de ecuaciones: (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} 4x+y-2az=a \\ ax-y \quad +z=0 \\ y-az=-1 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2a \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

Estudiamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2a \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix}=4a+0-2a^2-0+a^2-4=-a^2+4a-4$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+4a-4=0 \Rightarrow a=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-1)(-4)}}{-2}=\frac{-4\pm 0}{-2}=\boxed{2=a}$$

Si $a \neq 2$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

Si $a=2$ el determinante de A es nulo. Vemos como queda el sistema. Utilizamos el método de Gauss para intentar resolverlo.

$$\left.\begin{array}{r} 4x+y-4z=2 \\ 2x-y \quad +z=0 \\ y-2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cdot\text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrrl} 4x & -2y & +2z & =0 \\ -4x & -y & +4z & =-2 \\ \hline & -3y & +6z & =-2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+y-4z= \ 2 \\ -3y+6z=-2 \\ y-2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + 3\cdot\text{Ecuación } 3^a \\ \begin{array}{rrcl} -3y & +6z & = & -2 \\ 3y & -6z & = & -3 \\ \hline & 0 & = & -5 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

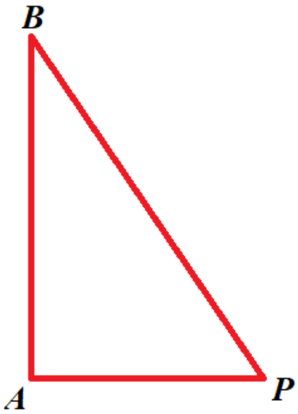
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+y-4z= \ 2 \\ -3y+6z=-2 \\ 0=-5 \end{array}\right\} \text{ ¡Ecuación imposible!}$$

El sistema no tiene solución. Es incompatible.

Resumiendo: Si $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $a=2$ el sistema es incompatible (sin solución).

3. Dados los puntos A = (0, 0, 2) y B = (1, 1, 0) y la recta $r:\begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$. (2 puntos)

Calcular un punto $P \in r$ para que el triángulo *ABP* tenga un ángulo recto en el punto *A*.



El punto P al pertenecer a la recta *r* debe tener coordenadas $P(1,y,y)$.

Los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AP}$ deben ser perpendiculares, por lo que su producto escalar debe ser 0.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,1,0)-(0,0,2)=(1,1,-2) \\ \overrightarrow{AP}=(1,y,y)-(0,0,2)=(1,y,y-2) \\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AP} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0 \Rightarrow (1,1,-2)(1,y,y-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+y-2y+4=0 \Rightarrow -y+5=0 \Rightarrow y=5 \Rightarrow \boxed{P(1,5,5)}$$

4. Sean las rectas: $r:\begin{cases} x=2-2y \\ z=1-x \end{cases}$ y $s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

a) Estudiar la posición relativa de las rectas *r* y *s*. (1 punto)

b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r:\begin{cases} x=2-2y \\ z=1-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=2-x \\ z=1-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-\frac{1}{2}x \\ z=1-x \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\alpha \\ y=1-\frac{1}{2}\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(0,1,1) \\ \overrightarrow{v_r}=\left(1,-\frac{1}{2},-1\right) \\ \overrightarrow{u_r}=2\overrightarrow{v_r}=(2,-1,-2) \end{cases}$$

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2} \Rightarrow s:\begin{cases} Q_s(1,3,-1) \\ \overrightarrow{w_s}=(2,1,-2) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que ni son coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,-1,-2) \\ \overrightarrow{w_s}=(2,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{2}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{-2}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

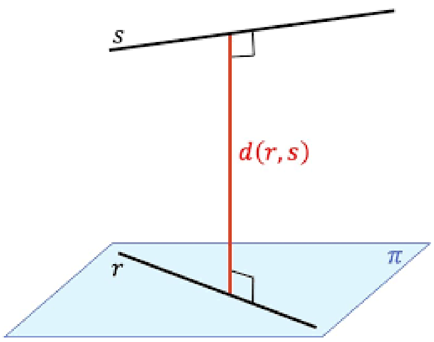
Calculamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{w_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,-1,-2) \\ \overrightarrow{w_s}=(2,1,-2) \\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(1,3,-1)-(0,1,1)=(1,2,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{w_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=-4+2-\cancel{8}+2-4+\cancel{8}=-4\neq 0$$

El producto mixto no es nulo. Esto implica que las rectas se cruzan.

b)



Hallamos el plano π paralelo a la recta *s* que contiene a la recta *r*. La distancia entre las rectas se puede calcular como la distancia de un punto cualquiera de la recta *s* al plano π.

Calculamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(2,-1,-2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{w_s}=(2,1,-2)\\ P_r(0,1,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x & y-1 & z-1\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-4y+4+2z-2+2z-2+4y-4+2x=0\Rightarrow 4x+4z-4=0\Rightarrow \boxed{\pi: x+z-1=0}$$

Calculamos la distancia entre las rectas *r* y *s*.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+z-1=0\\ Q_s(1,3,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow d(r,s)=d(Q_s,\pi)=\frac{|1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0.7u}$$

5. Dada la función

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$$

a) Estudiar asíntotas, monotonía y puntos extremos de *f(x)*. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de *f(x)*. (0,5 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm1$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{(-1)^3}{1-(-1)^2}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical.

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{1^3}{1-1^2}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\left\{\begin{array}{l}\text{Grado del numerador}\\ \text{mayor que el grado}\\ \text{del denominador}\end{array}\right\}=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x-x^3}=\left\{\begin{array}{l}\text{Grado del numerador}\\ \text{igual que el grado}\\ \text{del denominador}\end{array}\right\}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{1-x^2}-(-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{1-x^2}+x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x-x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2}=\left\{\begin{array}{l}\text{Grado del numerador}\\ \text{menor que el grado}\\ \text{del denominador}\end{array}\right\}=0$$

$y=-x$ es asíntota oblicua.

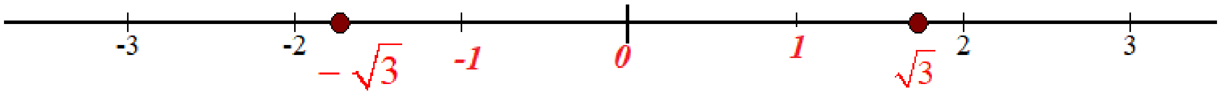
Para estudiar los extremos utilizamos la derivada.

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2\left(1-x^2\right)-(-2x)x^3}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{3x^2-3x^4+2x^4}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{3x^2-x^4}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{3x^2-x^4}{\left(1-x^2\right)^2}=0 \Rightarrow 3x^2-x^4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\left(3-x^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 3-x^2=0 \rightarrow x^2=3 \rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos tres valores. También tenemos en cuenta los valores excluidos del dominio.



En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale

$f'(-2)=\frac{3(-2)^2-(-2)^4}{\left(1-(-2)^2\right)^2}=\frac{-4}{+}<0$. La función decrece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$.

En el intervalo $\left(-\sqrt{3},-1\right)$ tomamos *x = –1.5* y la derivada vale

$f'(-1.5)=\frac{3(-1.5)^2-(-1.5)^4}{\left(1-(-1.5)^2\right)^2}=\frac{1.6875}{+}>0$. La función crece en $\left(-\sqrt{3},-1\right)$.

En el intervalo $(-1,0)$ tomamos *x = –0.5* y la derivada vale

$f'(-0.5)=\frac{3(-0.5)^2-(-0.5)^4}{\left(1-(-0.5)^2\right)^2}=\frac{0.6875}{+}>0$. La función crece en $(-1,0)$.

En el intervalo $(0,1)$ tomamos *x = 0.5* y la derivada vale

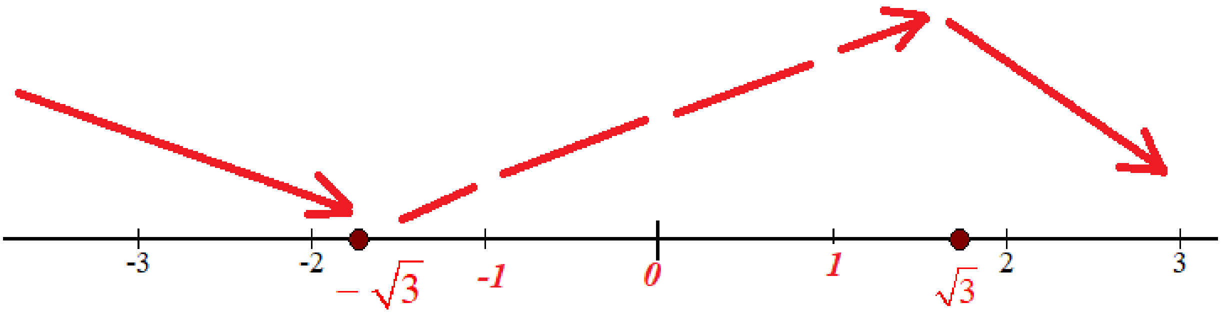
$f'(0.5)=\frac{3\cdot 0.5^2-0.5^4}{\left(1-0.5^2\right)^2}=\frac{0.6875}{+}>0$. La función crece en $(0,1)$.

En el intervalo $\left(1,\sqrt{3}\right)$ tomamos *x = 1.5* y la derivada vale

$f'(1.5)=\frac{3\cdot 1.5^2-1.5^4}{\left(1-1.5^2\right)^2}=\frac{1.6875}{+}>0$. La función crece en $\left(1,\sqrt{3}\right)$.

En el intervalo $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{3\cdot 2^2-2^4}{\left(1-2^2\right)^2}=\frac{-4}{9}<0$. La función decrece en $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente:



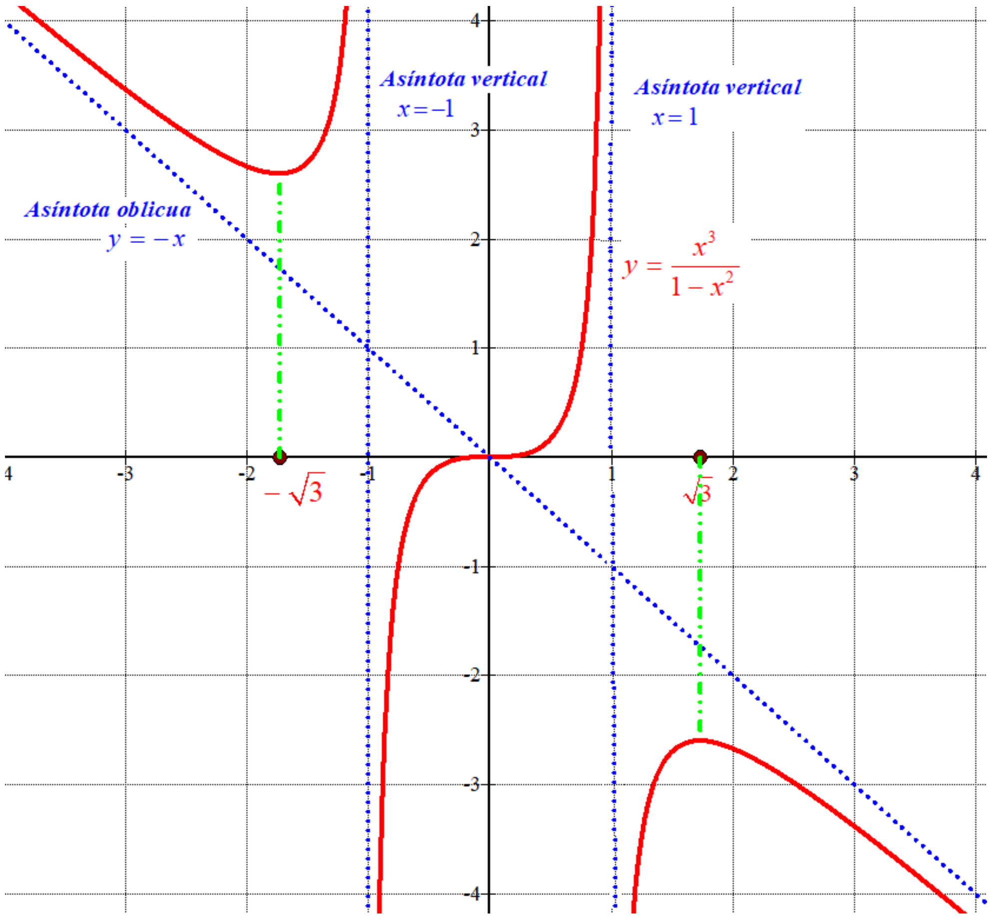
La función decrece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ y crece en $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$

La función tiene un mínimo relativo en $x=-\sqrt{3}$ y un máximo relativo en $x=\sqrt{3}$.

La función tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

b) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$y=\frac{x^3}{1-x^2}$
-2	$8/3$
$-\sqrt{3}$	2.59
-1.5	2.7
0	0
1.5	2.7
$\sqrt{3}$	-2.59
2	$-8/3$



6. Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$. (2 puntos)

Calculamos la derivada segunda y la igualamos a cero.

$$f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f''(x)=-\frac{2\left(x^2+1\right)-2x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=\dfrac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} \\ f''(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Rightarrow -2x^2+2=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Existen dos posibles puntos de inflexión.
Calculo la derivada tercera.

$$f''(x)=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow f'''(x)=\frac{-4x\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2+1\right)2x\left(-2x^2+2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$f'''(x)=\frac{-4x\left(x^2+1\right)-2\cdot 2x\left(-2x^2+2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-4x^3-4x+8x^3-8x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{4x^3-12x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Sustituimos los valores de los candidatos a puntos de inflexión y comprobamos que la derivada tercera no se anula.

$$Si\ x=-1 \rightarrow f'''(-1)=\frac{4(-1)^3-12(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^3}=\frac{8}{8}\neq 0$$

$$Si\ x=1 \rightarrow f'''(1)=\frac{4\cdot 1^3-12\cdot 1}{\left(1^2+1\right)^3}=\frac{-8}{8}\neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x=-1$ y otro en $x=1$.
Como $f(1)=1-\ln\left(1^2+1\right)=1-\ln 2$ y $f(-1)=-1-\ln\left(1^2+1\right)=-1-\ln 2$ los puntos de inflexión tienen coordenadas $A(-1,-1-\ln 2)$ y $B(1,1-\ln 2)$

7. Calcular la integral $\int \frac{1}{x^3-x}dx$ (2 puntos)

Descomponemos la fracción del integrando en fracciones simples.

$$x^3-x=x\left(x^2-1\right)=x(x-1)(x+1)$$

$$\frac{1}{x^3-x}=\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\Rightarrow 1=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=0\rightarrow 1=A(-1)\rightarrow \boxed{A=-1} \\ x=1\rightarrow 1=B(2)\rightarrow \boxed{B=\frac{1}{2}} \\ x=-1\rightarrow 1=C(-1)(-2)\rightarrow \boxed{C=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x^3-x}=\frac{-1}{x}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}}$$

Pasamos a calcular la integral pedida.

$$\int \frac{1}{x^3-x}dx=\int \frac{-1}{x}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}dx=\int \frac{-1}{x}dx+\int \frac{1/2}{x-1}dx+\int \frac{1/2}{x+1}dx=$$

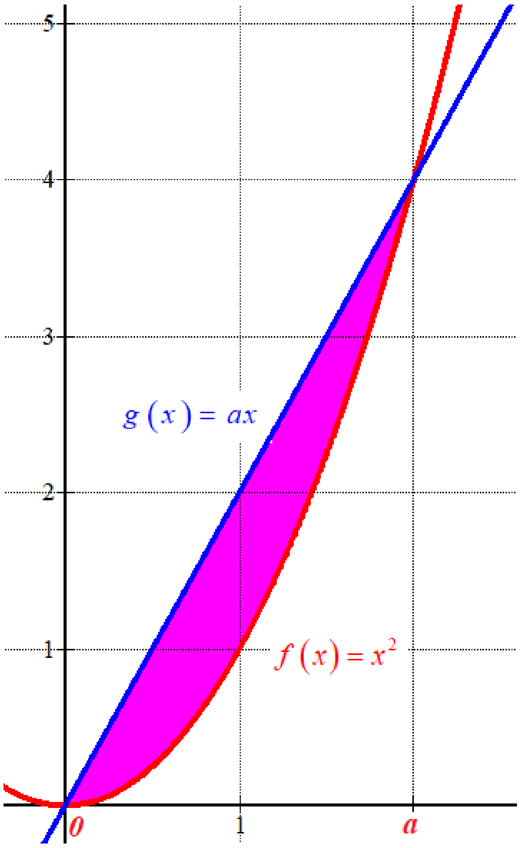
$$=-\int \frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx=\boxed{-\ln x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C}$$

8. Hallar el parámetro positivo $a \in \mathbb{R}$ tal que el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = ax$ sea 4/3. (2 puntos)

Hallamos los puntos de corte de la parábola y la recta.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = ax \Rightarrow x^2 - ax = 0 \Rightarrow x(x-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=a} \end{cases}$$

La situación es la del dibujo.



El área encerrada entre las dos gráficas es el valor de la integral definida de la diferencia de las funciones entre 0 y *a*.

$$Área = \int_0^a ax - x^2 dx = \left[a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \left[a\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right] - \left[a\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

Como el área debe valer 4/3 igualamos y determinamos el valor de *a*.

$$Área = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{a^3}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3a^3 = 24 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{8} = 2}$$

El valor buscado es *a = 2*.

9. El 50% de los alumnos de la UEX practica "running" y el 30% monta en bicicleta. Además, se sabe que el 70% de los alumnos de la UEX practica uno de los dos deportes. Si seleccionamos un alumno al azar, se pide:
a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes. (0,75 puntos)
b) Si practica el deporte de montar en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que practique running? (0,75 puntos)
c) ¿Son independientes los sucesos "Practicar running" y "Practicar montar en bicicleta"? (0,5 puntos)

Llamamos R = "Practicar running" y B = "Montar en bicicleta".

Con los datos del ejercicio podemos deducir que *P(R) = 0.5, P(B) = 0.3, P(R∪B) = 0.7*

a) Nos piden $P\left(\overline{R\cup B}\right)$.

$$P\left(\overline{R\cup B}\right)=1-P\left(R\cup B\right)=1-0.7=\boxed{0.3}$$

b) Vamos a calcular la $P\left(R\cap B\right)$.

$$P\left(R\cup B\right)=P\left(R\right)+P\left(B\right)-P\left(R\cap B\right)\Rightarrow 0.7=0.5+0.3-P\left(R\cap B\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(R\cap B\right)=0.5+0.3-0.7=0.10$$

Esta probabilidad $P\left(R\cap B\right)=0.10$ significa que hay un 10 % de alumnos que practican ambos deportes. Como son el 30 % los que practican bicicleta, tenemos que:

$$P\left(R/B\right)=\frac{P\left(R\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0.1}{0.3}=\boxed{\frac{1}{3}\simeq 0.33}$$

c) Veamos si se cumple que $P\left(R\cap B\right)=P\left(R\right)P\left(B\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(R\cap B\right)=0.1 \\ P\left(R\right)P\left(B\right)=0.5\cdot 0.3=0.15 \end{array}\right\}\Rightarrow P\left(R\cap B\right)\neq P\left(R\right)P\left(B\right)$$

Los sucesos R y B no son independientes.

10. El diámetro de las cerezas picotas del Jerte se distribuye normalmente con media 2,5 cm y desviación típica 0,2 cm.

a) Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10% de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas? (1 punto)

b) Si tomamos una cereza picota del Jerte al azar ¿qué probabilidad tiene la cereza de tener un diámetro entre 2,2 cm y 2,8 cm? (1 punto)

X = El diámetro de las cerezas picotas del Jerte.

$\text{X} = N(2.5, 0.2)$

a) Nos piden determinar "*d*" tal que $P(X \geq d) = 0.10$.

$$\left. \begin{array}{r} P(X \geq d) = \left\{ \begin{array}{c} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 2.5}{0.2} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \dfrac{d-2.5}{0.2} \right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{d-2.5}{0.2} \right) \\ P(X \geq d) = 0.10 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{d-2.5}{0.2} \right) = 0.10 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{d-2.5}{0.2} \right) = 1 - 0.10 = 0.90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla}\} \Rightarrow \frac{d-2.5}{0.2} = 1.28 \Rightarrow d - 2.5 = 0.256 \Rightarrow \boxed{d = 2.756\, cm}$$

Eligiendo un tamaño superior a 2.756 centímetros se eligen el 10 % de las cerezas.

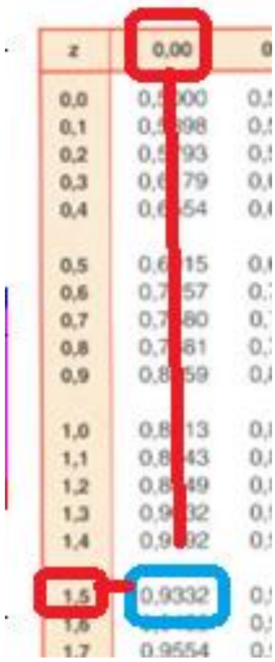
b) Nos piden $P(2.2 \leq X \leq 2.8)$.

$$P(2.2 \leq X \leq 2.8) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{2.2-2.5}{0.2} \leq X \leq \frac{2.8-2.5}{0.2} \right) =$$

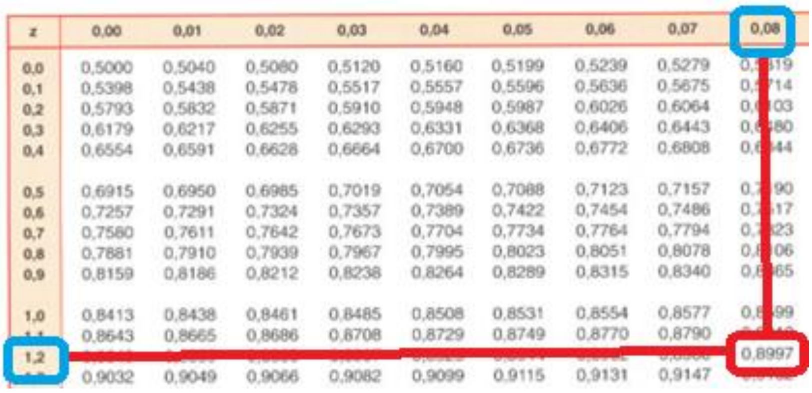
$$= P(-1.5 \leq X \leq 1.5) = P(X \leq 1.5) - P(X \leq -1.5) =$$

$$= P(X \leq 1.5) - P(X \geq 1.5) = P(X \leq 1.5) - [1 - P(X \leq 1.5)] =$$

$$= \{Miramos\, en\, la\, tabla\} = 0.9332 - [1 - 0.9332] = \boxed{0.8664}$$



z	0,00
0,0	[illegible]
0,1	[illegible]
0,2	[illegible]
0,3	[illegible]
0,4	[illegible]
0,5	[illegible]
0,6	[illegible]
0,7	[illegible]
0,8	[illegible]
0,9	[illegible]
1,0	[illegible]
1,1	[illegible]
1,2	[illegible]
1,3	[illegible]
1,4	[illegible]
1,5	0,9332
1,6	[illegible]
1,7	0,9554



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	[illegible]
[illegible]	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	[illegible]
1,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8997
[illegible]	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	[illegible]