UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2021-2022
Convocatoria: Extraordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Sea

$$f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función *f*, en caso de que existan.
(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión si los hubiera.

2.- (2 puntos) Halla el valor de *a* y *b* para que la curva $y=x^3+ax^2+bx+1$ tenga en el punto $(x_0,-1)$ un punto de inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-senx}$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a* y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+az=8 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=-2 \end{cases}$$

5.- (2 puntos) Calcula sin desarrollar el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Justifica en cada paso la propiedad de determinante que has utilizado.

6.- (2 puntos) Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.- (2 puntos) Determina según los valores del parámetro real *a* la posición relativa de la recta

$$\begin{cases} ax+3y-2z=4 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$$

y el plano de ecuación $6x+5y-3z=2$

8.- **(2 puntos)** Estudia según los valores del parámetro real *a* la posición relativa de las rectas siguientes:

$$\begin{cases} ax+3y-2z=12, \\ 2x+5y-z=6 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x=5+3\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=6+4\lambda \end{cases}$$

9.- **(2 puntos)** Estudia la posible dependencia de los sucesos A y B, en los siguientes casos:

(i) A y B son incompatibles y ambos sucesos de probabilidad no nula.
(ii) B está incluido en A, y B es un suceso de probabilidad no nula.

10.- **(2 puntos)** La presión arterial sistólica de una muestra de adolescentes sigue una distribución normal de media 120 años y desviación típica 12. Si se elige un adolescente al azar, halla:
(i) la probabilidad de que su presión arterial sea superior a 132;
(ii) la probabilidad de que su presión arterial esté entre 96 y 144.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Sea

$$f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función *f*, en caso de que existan.
(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión si los hubiera.

i) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$(1+x)^2=0 \Rightarrow 1+x=0 \Rightarrow x=-1$$

$$Dominio f(x)=\mathbb{R}-\{-1\}$$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{(1+x)^2}=\frac{(-1)^3}{(1-1)^2}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical

Asíntotas horizontales. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(1+x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+2x+1}=\infty$$

Al no tener el límite un valor finito no hay asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{(1+x)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+2x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2+x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+2x+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3-x^3}-2x^2-x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{x^2+2x+1}=-2$$

$y=x-2$ es la asíntota oblicua de *f(x)*

ii)

$$f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(1+x)^2-2(1+x)\left(x^3\right)}{(1+x)^4}=\frac{(1+x)\left[3x^2(1+x)-2x^3\right]}{(1+x)^4}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2(1+x)-2x^3}{(1+x)^3}=\frac{3x^2+3x^3-2x^3}{(1+x)^3}=\frac{3x^2+x^3}{(1+x)^3}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{3x^2+x^3}{(1+x)^3}=0\Rightarrow 3x^2+x^3=0\Rightarrow x^2(3+x)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ \boxed{x=-3}\end{cases}$$

Calculamos la segunda derivada y sustituimos estos dos valores para averiguar que tipo de punto crítico son.

$$f'(x)=\frac{3x^2+x^3}{(1+x)^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{(6x+3x^2)(1+x)^3-3(1+x)^2(3x^2+x^3)}{(1+x)^6}$$

$$f''(x)=\frac{(1+x)^2\left[(6x+3x^2)(1+x)-3(3x^2+x^3)\right]}{(1+x)^6}=\frac{(6x+3x^2)(1+x)-3(3x^2+x^3)}{(1+x)^4}$$

$$f''(x)=\frac{6x+\cancel{3x^2+6x^2}+\cancel{3x^3}-\cancel{9x^2}-\cancel{3x^3}}{(1+x)^4}=\frac{6x}{(1+x)^4}$$

$$x=0\Rightarrow f''(0)=\frac{0}{(1+0)^4}=0\rightarrow x=0 \text{ es un posible punto de inflexión}$$

Calculamos la derivada tercera y vemos que $f'''(0)\neq 0$

$$f'''(x)=\frac{6(1+x)^4-6x\cdot 4(1+x)^3}{(1+x)^8}\Rightarrow f'''(0)=\frac{6(1+0)^4-6\cdot 0\cdot 4(1+0)^3}{(1+0)^8}=6\neq 0$$

$x=0$ es punto de inflexión

$$x=-3\Rightarrow f''(-3)=\frac{-18}{(1-3)^4}=-\frac{18}{16}<0\rightarrow x=-3 \text{ es máximo relativo}$$

Estudiamos el cambio de signo de la derivada primera antes, entre y después de $x=-3$, $x=-1$ y $x=0$ para establecer los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

En $(-\infty,-3)$ tomamos $x=-4$ y la derivada vale $f'(-4)=\frac{(-4)^2(3-4)}{(1-4)^3}=\frac{16}{27}>0$. La función crece en $(-\infty,-3)$.

En $(-3,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=\frac{(-2)^2(3-2)}{(1-2)^3}=-4<0$. La función decrece en $(-3,-1)$.

En $\left(-1,0\right)$ tomamos *x = –0.5* y la derivada vale $f\,'(-0.5)=\dfrac{\left(-0.5\right)^2\left(3-0.5\right)}{\left(1-0.5\right)^3}=5>0$. La función crece en $\left(-1,0\right)$.

En $\left(0,+\infty\right)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{1^2\left(3+1\right)}{\left(1+1\right)^3}=\dfrac{1}{2}>0$. La función crece en $\left(0,+\infty\right)$.

La función crece en $\left(-\infty,-3\right)\cup\left(-1,+\infty\right)$ y decrece en $\left(-3,-1\right)$.
La función tiene un punto de inflexión en *x = 0*.
La función tiene un máximo relativo en *x = –3*.

2.- (2 puntos) Halla el valor de a y b para que la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tenga en el punto $(x_0, -1)$ un punto de inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

Calculamos las derivadas primera y segunda de la función.

$$y = x^3 + ax^2 + bx + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow y'' = 6x + 2a$$

Averiguamos las coordenadas del punto de inflexión sabiendo que debe anular la derivada segunda.

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 2a = 0 \Rightarrow 6x = -2a \Rightarrow \boxed{x = \frac{-2a}{6} = \frac{-a}{3}}$$

En dicho punto la función vale –1, pues las coordenadas del punto de inflexión son $(x_0, -1)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 + ax^2 + bx + 1 \\ y\left(\frac{-a}{3}\right) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 = \left(\frac{-a}{3}\right)^3 + a\left(\frac{-a}{3}\right)^2 + b\left(\frac{-a}{3}\right) + 1 \Rightarrow -1 = \frac{-a^3}{27} + a\frac{a^2}{9} - \frac{ab}{3} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -27 = -a^3 + 3a^3 - 9ab + 27 \Rightarrow \boxed{2a^3 - 9ab + 54 = 0}$$

En dicho punto la derivada vale 1, pues la pendiente de la recta tangente es 1.

$$\left.\begin{array}{l} y' = 3x^2 + 2ax + b \\ y'\left(\frac{-a}{3}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 3\left(\frac{-a}{3}\right)^2 + 2a\left(\frac{-a}{3}\right) + b \Rightarrow 1 = 3\frac{a^2}{9} - \frac{2a^2}{3} + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b \Rightarrow 3 = a^2 - 2a^2 + 3b \Rightarrow \boxed{a^2 - 3b + 3 = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} 2a^3 - 9ab + 54 = 0 \\ a^2 - 3b + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a^3 - 3a(3b) + 54 = 0 \\ a^2 + 3 = 3b \end{array}\right\} \Rightarrow 2a^3 - 3a(a^2 + 3) + 54 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^3 - 3a^3 - 9a + 54 = 0 \Rightarrow -a^3 - 9a + 54 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & -9 & 54 \\ 3 & & -3 & -9 & -54 \\ \hline & -1 & -3 & -18 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow -a^3 - 9a + 54 = (a-3)(-a^2 - 3a - 18)$$

$$(a-3)\left(-a^2-3a-18\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=3} \\ -a^2-3a-18=0 \Rightarrow a=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(-3)(-18)}}{-2}=\dfrac{3\pm\sqrt{-207}}{-2} \quad \nexists \end{cases}$$

Por lo que el valor del parámetro *a* debe ser *a* = *3*.

Sustituimos en una ecuación y hallamos el valor de *b*.

$$\left.\begin{array}{l} a^2+3=3b \\ a=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 9+3=3b \Rightarrow \boxed{b=\frac{12}{3}=4}$$

Los valores buscados son *a* = *3* y *b* = *4*.

3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{tgx - x}{x - senx}$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-senx}=\frac{tg0-0}{0-sen0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cos^2 x\cancel{(1-\cos x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1+\cos 0}{\cos^2 0}=\frac{2}{1}=\boxed{2}$$

ii)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=1^{\infty}=Indeterminación(n^o e)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\cancel{4x^3}-6x^2\cancel{-4x^3}+1}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6x^2+1}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{-6x^2+1}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{-6x^2+1}}\right)^{\frac{4x^3-1}{-6x^2+1}\cdot\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{-6x^2+1}{4x^3-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{-6x^2+1}}\right)^{\frac{4x^3-1}{-6x^2+1}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{-6x^2+1}{4x^3-1}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{-6x^2+1}{4x^3-1}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^4+x^2-6x^2+1}{4x^4-x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^4-5x^2+1}{4x^4-x}}=e^{\frac{-6}{4}}=\boxed{e^{\frac{-3}{2}}}$$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a* y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+az=8 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=-2 \end{cases}$$

Utilizamos el método de Gauss para convertir este sistema en otro equivalente más sencillo.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+az=8 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^{\text{a}} - \text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} x & -y & +z & =-2 \\ -x & -y & -z & =-2 \\ \hline & -2y & & =-4 \end{array} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^{\text{a}} - \text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} x & +2y & +az & =8 \\ -x & -y & -z & =-2 \\ \hline & y & +(a-1)z & =6 \end{array} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^{\text{a}} - 2\cdot\text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & -y & -z & =1 \\ -2x & -2y & -2z & =-4 \\ \hline & -3y & -3z & =-3 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -3y-3z=-3 \\ y+(a-1)z=6 \\ -2y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ y+z=1 \\ y+(a-1)z=6 \Rightarrow \\ \boxed{y=\frac{-4}{-2}=2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2+z=2 \\ 2+z=1 \\ 2+(a-1)z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ \boxed{z=-1} \\ (a-1)z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ (a-1)(-1)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=1} \\ -a+1=4 \to \boxed{a=-3} \end{cases}$$

El sistema tiene solución única cuando $a=-3$. La solución es $x=1$, $y=2$, $z=-1$.

Si $a\neq -3$ entonces no tiene solución pues la ecuación final nos llevaría a una igualdad imposible.

5.- (2 puntos) Calcula sin desarrollar el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Justifica en cada paso la propiedad de determinante que has utilizado.

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco 2 como factor común} \\ \text{de } 1^{\text{a}} \text{ columna} \end{array} \right\} = 2 \begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 1 & a & b+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2^{\text{a}} \text{ fila } - 1^{\text{a}} \text{ fila} \\ \begin{array}{ccc} 1 & a & b+c \\ -1 & -b & -c-a \\ \hline 0 & a-b & b-a \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{\text{a}} \\ \text{Determinante no cambia} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 3^{\text{a}} \text{ fila } - 1^{\text{a}} \text{ fila} \\ \begin{array}{ccc} 1 & c & a+b \\ -1 & -b & -c-a \\ \hline 0 & c-b & b-c \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{\text{a}} \\ \text{Determinante no cambia} \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 0 & a-b & b-a \\ 0 & c-b & b-c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} Columna\, 2^{\text{a}} + Columna\, 3^{\text{a}} \rightarrow \text{Nueva columna } 2^{\text{a}} \\ \text{El determinante no cambia} \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & c+a \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & b-c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinante de matriz triangular} \\ \text{igual al producto de los elementos} \\ \text{de la diagonal principal} \end{array} \right\} = 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (b-c) = \boxed{0}$$

6.- (2 puntos) Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+6+0+0+0-5 = 1 \neq 0$$

Existe la inversa de A y la calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es $X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

7.- (2 puntos) Determina según los valores del parámetro real *a* la posición relativa de la recta $\begin{cases} ax+3y-2z=4 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$ y el plano de ecuación $6x+5y-3z=2$

Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos que definen la recta y el plano dado en el ejercicio.

$$\begin{cases} 6x+5y-3z=2 \\ ax+3y-2z=4 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$$

Estudiamos su compatibilidad.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \\ a & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

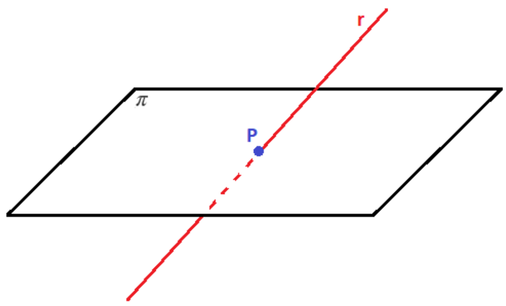
$$|A|=\begin{vmatrix} 6 & 5 & -3 \\ a & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=18-20+3a+18-5a-12=-2a+4$$

$$|A|=0 \Rightarrow -2a+4=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Hay dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

SITUACIÓN 1. $a \neq 2$

En esta situación el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una solución única.
Geométricamente significa que la recta y el plano son secantes (el punto que tiene por coordenadas la solución del sistema)



SITUACIÓN 2. $a=2$

En esta situación el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

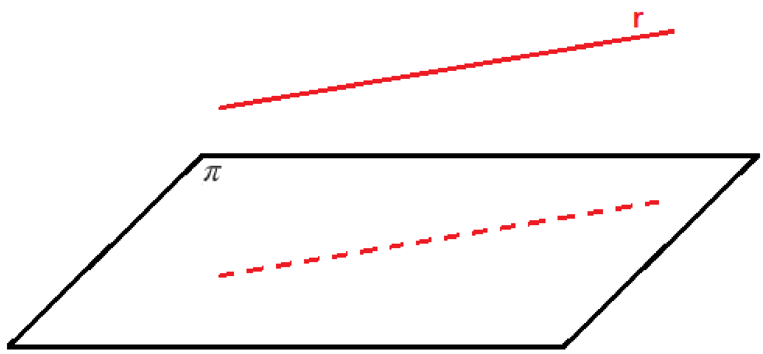
Aplicamos el método de Gauss para transformarla en una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 6 & 5 & -3 & 2 \\ -6 & -9 & 6 & -12 \\ \hline 0 & -4 & 3 & -10 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ \begin{array}{cccc} 6 & 5 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & -3 & -6 \\ \hline 0 & 8 & -6 & -4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -10 \\ 0 & 8 & -6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 8 & -6 & -4 \\ 0 & -8 & 6 & -20 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -24 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz ampliada A/B tiene rango 3. El sistema es incompatible (no tiene solución). Geométricamente significa que plano y recta son paralelos (no tienen ningún punto en común).



Resumiendo:
Si $a = 2$ recta y plano son paralelos y si $a \neq 2$ recta y plano son secantes (coinciden en un punto)

8.- (2 puntos) Estudia según los valores del parámetro real *a* la posición relativa de las rectas siguientes:

$$\begin{cases} ax+3y-2z=12, \\ 2x+5y-z=6 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x=5+3\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=6+4\lambda \end{cases}$$

Hallamos punto y vector director de cada recta.

$$\begin{cases} ax+3y-2z=12, \\ 2x+5y-z=6 \end{cases}$$

$$Si\ \boxed{x=0} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2z=12, \\ 5y-z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2z=12, \\ -10y+2z=-12 \end{cases}$$
$$\overline{-7y\quad =0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow 5\cdot 0-z=6 \Rightarrow \boxed{z=-6} \Rightarrow \boxed{A(0,0,-6)}$$

$$Si\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} a+3y-2z=12, \\ 2+5y-z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2z=12-a \\ 5y-z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2z=12-a \\ -10y+2z=-8 \end{cases}$$
$$\overline{-7y=4-a}$$

$$\Rightarrow y=\frac{4-a}{-7} \Rightarrow 5\frac{4-a}{-7}-z=4 \Rightarrow \frac{20-5a}{-7}-z=4 \Rightarrow 20-5a+7z=-28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7z=5a-48 \Rightarrow z=\frac{5a-48}{7} \Rightarrow \boxed{B\left(1,\frac{a-4}{7},\frac{5a-48}{7}\right)}$$

El vector director de la primera recta es

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\left(1,\frac{a-4}{7},\frac{5a-48}{7}\right)-(0,0,-6)=\left(1,\frac{a-4}{7},\frac{5a-48}{7}+6\right)=\left(1,\frac{a-4}{7},\frac{5a-48+42}{7}\right)$$

$$\vec{u}=\left(1,\frac{a-4}{7},\frac{5a-6}{7}\right) \Rightarrow \vec{v}=7\vec{u}=(7,a-4,5a-6)$$

En la primera recta:

$$\begin{cases} ax+3y-2z=12, \\ 2x+5y-z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0,0,-6) \\ \vec{v}=(7,a-4,5a-6) \end{cases}$$

En la segunda recta:

$$\begin{cases} x = 5+3\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 6+4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(5,1,6) \\ \vec{w} = (3,-1,4) \end{cases}$$

Para que las rectas sean paralelas o coincidentes deben tener coordenadas proporcionales los vectores directores:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (7, a-4, 5a-6) \\ \vec{w} = (3,-1,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{a-4}{-1} = \frac{5a-6}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{3} = \frac{a-4}{-1} \Rightarrow -7 = 3a-12 \Rightarrow 3a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} = \frac{5a-6}{4} \Rightarrow 28 = 15a-18 \Rightarrow 15a = 46 \Rightarrow a = \frac{46}{15} \end{cases} \Rightarrow \text{¡No es posible!}$$

Las rectas no pueden ser ni paralelas ni coincidentes.

Veamos si se cortan o cruzan en función del parámetro a.

$$\left.\begin{array}{l} A(0,0,-6) \\ C(5,1,6) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (5,1,6)-(0,0,-6) = (5,1,12)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (7, a-4, 5a-6) \\ \vec{w} = (3,-1,4) \\ \overrightarrow{AC} = (5,1,12) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} 7 & a-4 & 5a-6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= -84+20a-80+15a-18+25a-30-36a+144-28 = 24a-96$$

$$\left[\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AC}\right] = 0 \Rightarrow 24a-96 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{96}{24} = 4}$$

Si $a = 4$ entonces $\left[\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AC}\right] = 0$ y las rectas se cortan.

Si $a \neq 4$ entonces $\left[\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AC}\right] \neq 0$ y las rectas se cruzan.

9.- (2 puntos) Estudia la posible dependencia de los sucesos A y B, en los siguientes casos:
(i) A y B son incompatibles y ambos sucesos de probabilidad no nula.
(ii) B está incluido en A, y B es un suceso de probabilidad no nula.

Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

i) Si A y B son incompatibles significa que $A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cap B)=0$

Como A y B son dos sucesos de probabilidad no nula tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} P(A)\neq 0 \\ P(B)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)P(B)\neq 0$$

Comparando lo obtenido:

$$P(A\cap B)=0\neq P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

ii) Si B está incluido en A tenemos que:

$$A\cap B=A\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)$$

Como B es un suceso de probabilidad no nula entonces $0 < P(B) < 1$.
Multiplicamos la inecuación por $P(A) > 0$

$$0<P(A)P(B)<P(A)=P(A\cap B)\Rightarrow P(A)P(B)\neq P(A\cap B)$$

Los sucesos no son independientes.

10.- (2 puntos) La presión arterial sistólica de una muestra de adolescentes sigue una distribución normal de media 120 años y desviación típica 12. Si se elige un adolescente al azar, halla:
(i) la probabilidad de que su presión arterial sea superior a 132;
(ii) la probabilidad de que su presión arterial esté entre 96 y 144.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

X = La presión arterial sistólica de un adolescente.

X = N(120, 12)

i)

$$P(X>132)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{132-120}{12}\right)=$$

$$=P(Z>1)=1-P(Z\le 1)=$$

$$=\{\text{Miramos en la tabla}\}=1-0.8413=\boxed{0.1587}$$

z	0	0
0	0,5000	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6
0,6	0,7257	0,7
0,7	0,7580	0,7
0,8	0,7881	0,7
0,9	0,8159	0,8
1	0,8413	0,8
1,1	0,8643	0,8

ii)

$$P(96<X<144)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{96-120}{12}<Z<\frac{144-120}{12}\right)=$$

$$=P(-2<Z<2)=P(Z<2)-P(Z<-2)=P(Z<2)-P(Z\ge 2)=$$

$$=P(Z<2)-\left[1-P(Z\le 2)\right]=\{\text{Miramos en la tabla}\}=$$

$$=0.9772-[1-0.9772]=\boxed{0.9544}$$

z	0	0,0
0	0,5000	0,50
0,1	0,5398	0,54
0,2	0,5793	0,58
0,3	0,6179	0,62
0,4	0,6554	0,65
0,5	0,6915	0,69
0,6	0,7257	0,72
0,7	0,7580	0,76
0,8	0,7881	0,79
0,9	0,8159	0,81
1	0,8413	0,84
1,1	0,8643	0,86
1,2	0,8849	0,88
1,3	0,9032	0,90
1,4	0,9192	0,92
1,5	0,9332	0,93
1,6	0,9452	0,94
1,7	0,9554	0,95
1,8	0,9641	0,96
1,9	0,9713	0,97
2	0,9772	0,97