uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2021-2022** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x} & si \quad x<0 \\ x^2-4x+3 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de *f(x)* en $\mathbb{R}$.
b) (0.25 puntos) ¿Es *f(x)* derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.
c) (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.
d) (0.75 puntos) Determine para $x\in(0,\infty)$ el punto de la gráfica de *f(x)* en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza *f(x)* algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean el plano $\pi\equiv z=x$ y los puntos A(0,−1, 0) y B(0, 1, 0) pertenecientes al plano π.
a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices {A, B, C, D} que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.
b) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato.
Se pide:
a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.
c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se consideran las matrices reales

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro *k* tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para *k = 1*.
b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real *k*.
c) (0.5 puntos) En el caso *k = 1*, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} x & si \;\; x\le 0 \\ x\ln(x) & si \;\; x>0 \end{cases}$$

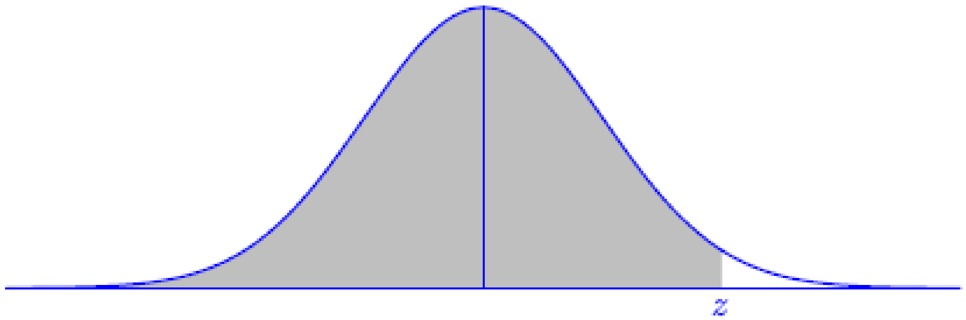
a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f(x)* en *x = 0*.
b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x), así como los máximos y mínimos relativos.
c) (1 punto) Calcule $\int_1^2 f(x)\,dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean las rectas $r\equiv\begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$.

a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.
b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas *r* y *s*.
c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas *r* y *s*, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación *z = 0*. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40% de los productos tipo A, un 60% de los productos tipo B y un 20% de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:
a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.
b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución N(0, 1), $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Llamamos "e" al número de libros de ensayos, "n" al número de novelas y "b" al número de libros de biografías.

El número total de libros de la estantería es $e + n + b$.

"Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos" → $\frac{3}{16}(e+n+b)=e$

"Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas" → $b+\frac{e}{3}=n+2$

"Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros" → $(e+n+b)-\frac{e}{2}-\frac{n}{5}=105$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{16}(e+n+b)=e\\ b+\frac{e}{3}=n+2\\ (e+n+b)-\frac{e}{2}-\frac{n}{5}=105\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3(e+n+b)=16e\\ 3b+e=3n+6\\ 10e+10n+10b-5e-2n=1050\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3e+3n+3b=16e\\ e=3n-3b+6\\ 5e+8n+10b=1050\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-13e+3n+3b=0\\ e=3n-3b+6\\ 5e+8n+10b=1050\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-13(3n-3b+6)+3n+3b=0\\ 5(3n-3b+6)+8n+10b=1050\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-39n+39b-78+3n+3b=0\\ 15n-15b+30+8n+10b=1050\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-36n+42b-78=0\\ 23n-5b=1020\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-6n+7b=13\\ 23n-5b=1020\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\times(5)\to -6n+7b=13\\ \times(7)\to 23n-5b=1020\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-30n+35b=65\\ 161n-35b=7140\end{array}\right\}$$

$$\overline{131n \qquad =7205} \Rightarrow \boxed{n=\frac{7205}{131}=55} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\cdot 55+7b=13 \Rightarrow 7b=13+330=343 \Rightarrow \boxed{b=\frac{343}{7}=49} \Rightarrow \boxed{e=3\cdot 55-3\cdot 49+6=24}$$

En la estantería hay 24 libros de ensayo, 55 novelas y 49 biografías.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x} & si \quad x<0\\ x^2-4x+3 & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de *f(x)* en $\mathbb{R}$.
b) (0.25 puntos) ¿Es *f(x)* derivable en *x = 0*? Justifique la respuesta.
c) (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.
d) (0.75 puntos) Determine para $x\in(0,\infty)$ el punto de la gráfica de *f(x)* en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza *f(x)* algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

a) En $(-\infty,0)$ la función es continua pues el denominador se anula en x = 0, pero está excluido del dominio. En $(0,+\infty)$ la función es continua pues es una función polinómica.
Estudiamos la continuidad en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x+1}{x}=\dfrac{0+1}{0}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-4x+3=0^2-4\cdot 0+3=3\\ f(0)=0^2-4\cdot 0+3=3\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Es discontinua en } x=0.$$

La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

b) No es derivable pues no es continua.

c) **Asíntota vertical.** $x=a$.
¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{x}=\frac{0+1}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical por la izquierda.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} x^2-4x+3=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{x}=2$$

$y=2$ es asíntota horizontal cuando x tiende a –∞.

d) La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada, por lo que hay que encontrar donde se anula la derivada.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1\cdot(2x+1)}{x^2}=\dfrac{-1}{x^2} & si \quad x<0\\ 2x-4 & si \quad x>0\end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2}=0 \to -1=0 \ \text{¡Imposible!} & si \quad x<0 \\ 2x-4=0 \to x=2 & si \quad x>0 \end{cases}$$

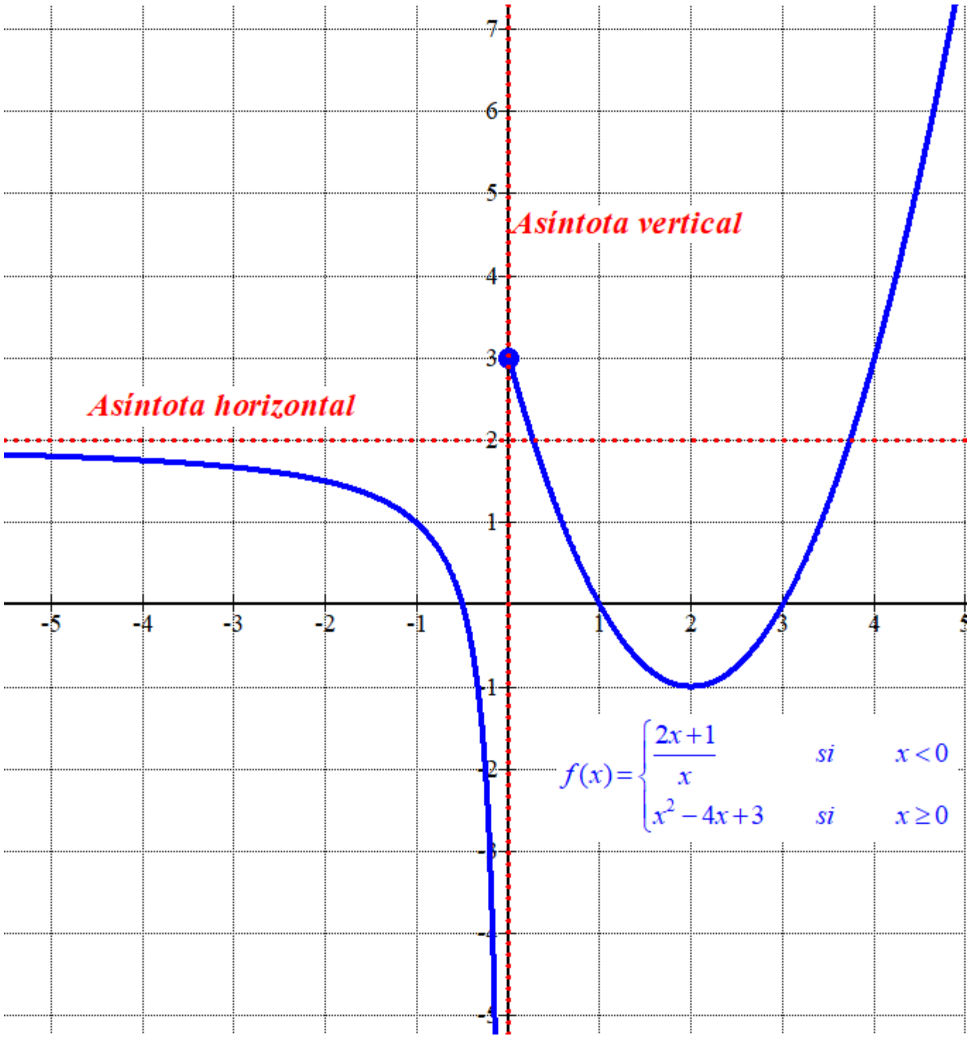
En $x = 2$ la derivada se anula. Calculamos la recta tangente en $x = 2$.

$$\begin{aligned} &f(2)=2^2-8+3=-1 \\ &f'(2)=0 \\ &y-f(2)=f'(2)(x-2) \Rightarrow y+1=0 \Rightarrow \boxed{y=-1} \end{aligned}$$

En $x = 2$ hay un extremo relativo de la función. Sustituimos este valor en la derivada segunda para comprobar si es máximo o mínimo.

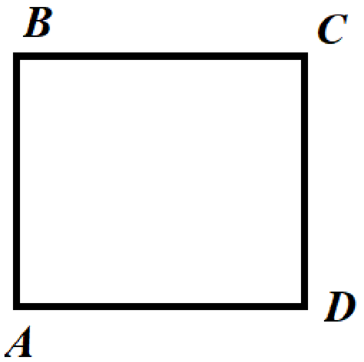
$$f'(x)=2x-4 \Rightarrow f''(x)=2 \Rightarrow f''(2)=2>0$$

En $x = 2$ la función presenta un mínimo relativo.
Como $f(2) = -1$ las coordenadas del mínimo relativo son $(2, -1)$



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos A(0,−1, 0) y B(0, 1, 0) pertenecientes al plano π.
a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices {A, B, C, D} que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.
b) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

a) La situación planteada es la del dibujo.



Los puntos C y D están en el plano $\pi \equiv z = x$ por lo que sus coordenadas son *C(c, e, c)* y $D(d, f, d)$

La longitud del lado AB es:

$$\overrightarrow{AB} = (0,1,0) - (0,-1,0) = (0,2,0)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2} = 2$$

Como es un cuadrado los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son iguales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,1,0) - (0,-1,0) = (0,2,0) \\ \overrightarrow{DC} = (c,e,c) - (d,f,d) = (c-d, e-f, c-d) \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \end{array}\right\} \Rightarrow (0,2,0) = (c-d, e-f, c-d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = c-d \\ 2 = e-f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = d \\ e = 2+f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(c, 2+f, c) \\ D(c, f, c) \end{cases}$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ deben ser ortogonales y su producto escalar nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,1,0) - (0,-1,0) = (0,2,0) \\ \overrightarrow{AD} = (c, f, c) - (0,-1,0) = (c, f+1, c) \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,2,0)(c, f+1, c) = 0 \Rightarrow 2(f+1) = 0 \Rightarrow f = -1$$

Los puntos tienen coordenadas *C(c,1, c)* y *D(c,–1, c)*.

La longitud del lado AD debe ser 2.

$$\left.\begin{array}{l} A(0,-1,0) \\ D(c,-1,c) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (c,-1,c)-(0,-1,0) = (c,0,c)$$

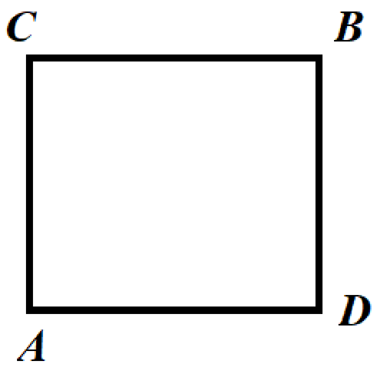
$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = 2 = \sqrt{c^2+0^2+c^2} \Rightarrow c^2+c^2 = 4 \Rightarrow 2c^2 = 4 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

Hay dos soluciones posibles:

Si $c=\sqrt{2}$ los vértices son $C\left(\sqrt{2},1,\sqrt{2}\right)$ y $D\left(\sqrt{2},-1,\sqrt{2}\right)$

Si $c=-\sqrt{2}$ los vértices son $C\left(-\sqrt{2},1,-\sqrt{2}\right)$ y $D\left(-\sqrt{2},-1,-\sqrt{2}\right)$

b) La situación planteada es la del dibujo.



Los puntos C y D están en el plano $\pi \equiv z = x$ por lo que sus coordenadas son *C(c, e, c)* y $D(d,\ f,\ d)$

Al ser un cuadrado la diagonal AB forma 90º con la diagonal DC:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,1,0)-(0,-1,0) = (0,2,0) \\ \overrightarrow{DC} = (c,e,c)-(d,f,d) = (c-d,e-f,c-d) \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \end{array}\right\} \Rightarrow (0,2,0)\cdot(c-d,e-f,c-d) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(e-f) = 0 \Rightarrow \boxed{e=f}$$

Las coordenadas son *C(c, e, c)* y $D(d,\ e,\ d)$

Como es un cuadrado los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DB}$ son iguales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(c,e,c)-(0,-1,0)=(c,e+1,c)\\ \overrightarrow{DB}=(0,1,0)-(d,e,d)=(-d,1-e,-d)\\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}\end{array}\right\}\Rightarrow(c,e+1,c)=(-d,1-e,-d)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c=-d\\ e+1=1-e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-d\\ 2e=0\to e=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C(-d,0,-d)\\ D(d,0,d)\end{cases}$$

La longitud de la diagonal AB debe ser igual a la longitud de la diagonal CD.

$$\left.\begin{array}{l}C(-d,0,-d)\\ D(d,0,d)\\ A(0,-1,0)\\ B(0,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,1,0)-(0,-1,0)=(0,2,0)\\ \overrightarrow{CD}=(d,0,d)-(-d,0,-d)=(2d,0,2d)\\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{2^2}=\sqrt{(2d)^2+(2d)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4=4d^2+4d^2\Rightarrow 4=8d^2\Rightarrow d^2=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{d=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Hay dos soluciones posibles:

Si $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$ los vértices son $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Si $d=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ los vértices son $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Realmente es la misma solución, solo cambia el nombre de los puntos.

La solución a esta situación es única: $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato.
Se pide:
a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.
c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

Es un problema que resolvemos utilizando la distribución binomial.

Número de repeticiones = $n = 6$.
Probabilidad de éxito (estar matriculado en matemáticas II) = $p = 3/5 = 0.6$. $q = 1 - 0.6 = 0.4$

X = Número de alumnos matriculados en matemáticas II de un grupo de 6.
X = B(6, 0.6)

a) Nos piden calcular $P(X = 4)$.

$$P(X=4)=\binom{6}{4}\cdot 0.6^4\cdot 0.4^2=\frac{6\cdot 5}{2}\cdot 0.6^4\cdot 0.4^2=\boxed{0.311}$$

b) Que "haya alguno matriculado" es lo mismo que "X ≥ 1". Nos piden calcular $P(X\geq 1)$

$$P(X\geq 1)=\left\{\begin{matrix} P(X=1)+P(X=2)+\ldots+P(X=6) \\ \text{Es muy largo, utilizamos el contrario}\end{matrix}\right\}=1-P(X=0)=$$

$$=1-\binom{10}{0}\cdot 0.6^0\cdot 0.4^6=1-0.4^6\simeq\boxed{0.996}$$

c) Pasamos a una binomial X = B(120, 0.6).

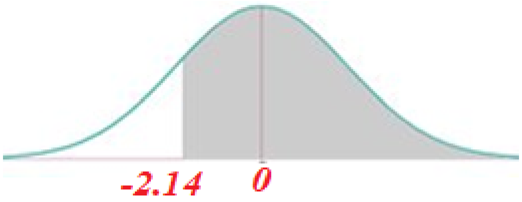
Como $\left.\begin{matrix} np=120\cdot 0.6=72>5 \\ nq=120\cdot 0.4=48>5\end{matrix}\right\}$ entonces la binomial se puede aproximar con una normal de media $\mu=np=72$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{120\cdot 0.6\cdot 0.4}=\frac{12\sqrt{5}}{5}\simeq 5.367$

La distribución binomial X = B(120, 0.6) se aproxima con una normal Y = N(72, 5.367).

Nos piden calcular $P(X>60)$

$$P(X>60)=\{\text{Correción de Yates}\}=P(Y\geq 60.5)=\{Tipificamos\}=P\left(Z\geq\frac{60.5-72}{12\sqrt{5}/5}\right)=$$

$$=P(Z\geq -2.14)=P(Z\leq 2.14)=\{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\}=\boxed{0.9838}$$



=

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se consideran las matrices reales

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & k\\ k & 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$.
b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.
c) (0.5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

a) Realizamos el producto AB.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & k\\ k & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1+k & 1+1+0\\ k+1-1 & k-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 2\\ k & k-1\end{pmatrix}$$

Para que tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$|AB|=\begin{vmatrix}k & 2\\ k & k-1\end{vmatrix}=k(k-1)-2k=k^2-k-2k=k^2-3k$$

$$|AB|=0\Rightarrow k^2-3k=0\Rightarrow k(k-3)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{k=0}\\ o\\ \boxed{k=3}\end{cases}$$

La matriz AB tiene inversa si k es distinto de 0 y de 3.

Para $k = 1$ la matriz AB tiene inversa. La calculamos.

$$|AB|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow (AB)^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1}=\frac{Adj\left((AB)^T\right)}{|AB|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}}$$

b) Calculamos BA.

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & k\\ k & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+k & -1+1 & k-1\\ 1-k & -1-1 & k+1\\ 1 & -1 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+k & 0 & k-1\\ 1-k & -2 & k+1\\ 1 & -1 & k\end{pmatrix}$$

Realizamos transformaciones de la matriz BA consiguiendo una matriz equivalente y que hace más fácil el cálculo de su rango.

$$BA=\begin{pmatrix}1+k & 0 & k-1\\ 1-k & -2 & k+1\\ 1 & -1 & k\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 2}^{\text{a}}\text{ + Fila 1}^{\text{a}}\\ \begin{array}{ccc}1-k & -2 & k+1\\ 1+k & 0 & k-1\\ \hline 2 & -2 & 2k\end{array}\to\text{Nueva fila 2}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1+k & 0 & k-1\\ 2 & -2 & 2k\\ 1 & -1 & k\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 2}^{\text{a}}\ -2\cdot\text{Fila 3}^{\text{a}}\\ \begin{array}{ccc}2 & -2 & 2k\\ -2 & 2 & -2k\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\to\text{Nueva fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1+k & 0 & k-1\\ 2 & -2 & 2k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Columna\,1^{\text{a}}+Columna\,2^{\text{a}}\\ \begin{array}{cc|c}1+k & 0 & 1+k\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1+k & 0 & k-1\\ 0 & -2 & 2k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

El rango de BA no es 3 sea cual sea el valor de *k*.

Estudiamos dos casos distintos.

CASO 1. $k\neq -1$

En este caso el rango de AB es 2 pues hay dos filas no nulas en la matriz equivalente a BA.

CASO 2. $k=-1$

En este caso la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. El rango de esta matriz también es 2 pues la matriz equivalente a BA sigue teniendo dos filas no nulas.

c) Para *k* = *1* la matriz $BA=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

Si $BA=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones el sistema debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} 2x=a \\ -2y+2z=b \\ x-y+z=c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{2} \\ -y+z=\dfrac{b}{2} \\ x-y+z=c \end{array}\right\}$$

Si elegimos a = 2 y b = 2 elegimos un valor de c que haga el sistema incompatible.

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{2}=1 \\ -y+z=\dfrac{2}{2}=1 \\ x-y+z=c \end{array}\right\} \Rightarrow 1+1=c \Rightarrow 2=c$$

Elegimos un valor de *c* distinto de 2, por ejemplo *c = 0* y el sistema es incompatible.

El sistema pedido sería $\left.\begin{array}{l} 2x=2 \\ -2y+2z=2 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$

Comprobamos que no tiene solución.

$$\left.\begin{array}{l} 2x=2 \\ -2y+2z=2 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{x=1} \\ -y+z=1 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=1+y \\ 1-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-y+1+y=0 \Rightarrow 2=0 \text{ ¡Imposible!}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} x & si \;\; x\leq 0 \\ x\ln(x) & si \;\; x>0 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f(x)* en *x = 0.*
b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x), así como los máximos y mínimos relativos.
c) (1 punto) Calcule $\int_1^2 f(x)\,dx$.

a) Para ser continua deben coincidir los limites laterales y el valor de la función.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{+\infty}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$ la función es continua en *x = 0*.

Estudiamos su derivabilidad.

La función derivada en $\mathbb{R}-\{0\}$ **es** $f´(x)=\begin{cases} 1 & si \;\; x<0 \\ \ln(x)+x\frac{1}{x}=1+\ln(x) & si \;\; x>0 \end{cases}$

Vemos si coinciden las derivadas laterales en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f´(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f´(x)=\lim_{x\to 0^-} 1=1 \\ f´(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f´(x)=\lim_{x\to 0^+} 1+\ln(x)=-\infty \end{array}\right\}$$

La función no es derivable en *x = 0* pues la derivada lateral por la derecha no es finita.

b) Igualamos la derivada a 0 en busca de los puntos críticos.

$$f´(x)=0\Rightarrow\begin{cases} 1=0 \text{ ¡Imposible!} & si \;\; x<0 \\ 1+\ln(x)=0\to\ln(x)=-1\to\boxed{x=e^{-1}\simeq 0.37>0} & si \;\; x>0 \end{cases}$$

Comprobamos si en $x=e^{-1}$ la derivada segunda es positiva o negativa.

$$f´(x)=1+\ln(x)\Rightarrow f´´(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f´´(e^{-1})=\frac{1}{e^{-1}}=e>0$$

La derivada segunda es positiva y en $x = e^{-1}$ existe un mínimo relativo.

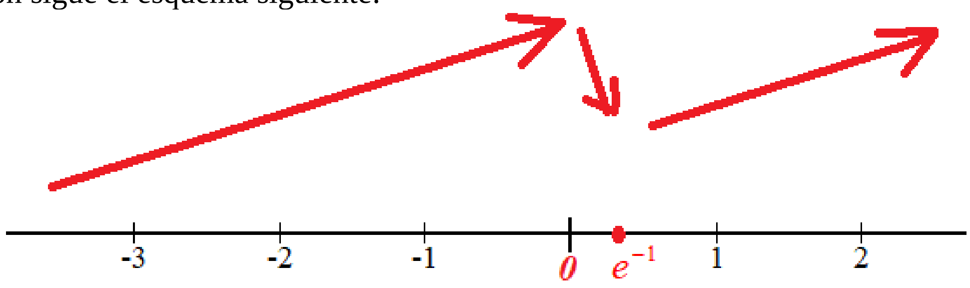
Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

En $(-\infty, 0)$ la función es una recta creciente, la función crece.

En $(0, e^{-1})$ tomamos *x = 0.1* y la derivada vale $f'(0.1) = 1 + \ln(0.1) = -1.3 < 0$. La función decrece en $(0, e^{-1})$.

En $(e^{-1}, +\infty)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1) = 1 + \ln(1) = 1 > 0$. La función crece en $(e^{-1}, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, 0) \cup (e^{-1}, +\infty)$ y decrece en $(0, e^{-1})$.

La función es continua y presenta un máximo relativo en *x = 0* y un mínimo relativo en $x = e^{-1}$.

Como *f(0) = 0* y $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} = -e^{-1}$ las coordenadas del máximo relativo son (0, 0) y del mínimo relativo $(e^{-1}, -e^{-1})$

c) Calculamos primero la integral indefinida.

En el intervalo (1, 2) la función es $f(x) = x\ln(x)$, por lo que:

$$\int f(x)dx = \int x\ln(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \to du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = xdx \to v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + K}$$

Calculamos el valor de la integral definida pedida.

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \left[\frac{2^2}{2}\ln 2 - \frac{2^2}{4}\right] - \left[\frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{1^2}{4}\right] = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{\ln 4 - \frac{3}{4}}$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$.

a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.
b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas *r* y *s*.
c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas *r* y *s*, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación *z = 0*. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2-y \\ -2z=-1-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2-y \\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-2-t \\ y=t \\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} t=1 \rightarrow P_r(-3,1,1) \\ \overrightarrow{v_r}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right) \rightarrow \overrightarrow{u_r}=2\overrightarrow{v_r}=(-2,2,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(2,5,0) \\ \overrightarrow{v_s}=(-2,2,1) \end{cases}$$

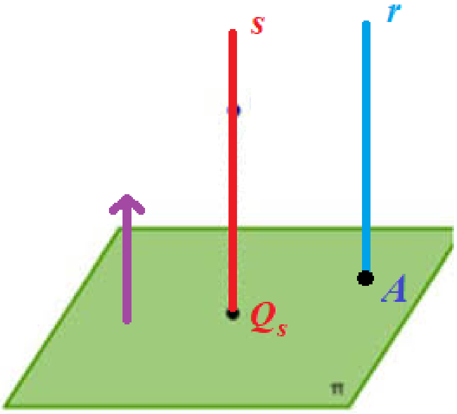
Los vectores directores tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas son paralelas o coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,2,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(-2,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{-2}=\frac{2}{2}=\frac{1}{1}$$

Comprobamos si el punto $Q_s(2,5,0)$ de la recta *s* pertenece a la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} ¿Q_s(2,5,0) \in r? \\ r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2+5+2=0 \\ 5-0+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9=0 \text{ ¡}No! \\ 6=0 \text{ ¡}No! \end{cases}$$

Por lo que las rectas no son coincidentes y son paralelas.



Para determinar la distancia entre las rectas hallamos el plano π perpendicular a la recta *s* que pasa por el punto Q_s, después determinamos el punto A de corte del plano y la recta *r*. La distancia entre las dos rectas es la distancia entre los puntos Q_s y A.

Hallamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\vec{v_s}=(-2,2,1)\\ Q_s(2,5,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi\equiv -2x+2y+z+D=0\\ Q_s(2,5,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow -4+10+0+D=0\Rightarrow D=-6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi\equiv -2x+2y+z-6=0}$$

Hallamos el punto A de corte del plano π y la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv -2x+2y+z-6=0\\ r\equiv\begin{cases}x=-2-t\\ y=t\\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow -2(-2-t)+2t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t-6=0\Rightarrow 4+2t+2t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t-6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8+4t+4t+1+t-12=0\Rightarrow 9t=3\Rightarrow t=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=-2-\frac{1}{3}=\frac{-7}{3}\\ y=\frac{1}{3}\\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{-7}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Calculamos la distancia.

$$\overrightarrow{Q_sA}=\left(\frac{-7}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)-(2,5,0)=\left(\frac{-13}{3},\frac{-14}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$d(r,s)=d(Q_s,A)=\left|\overrightarrow{Q_sA}\right|=\sqrt{\left(\frac{-13}{3}\right)^2+\left(\frac{-14}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{369}{9}}=\boxed{\sqrt{41}\simeq 6.4u}$$

b) El plano que contiene a las dos rectas tiene como vectores directores $\vec{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$ y pasa por el punto $Q_s(2,5,0)$.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(-3,1,1)\\ Q_s(2,5,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s}=(2,5,0)-(-3,1,1)=(5,4,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{P_rQ_s}=(5,4,-1)\\ \vec{v}=\vec{v_s}=(-2,2,1)\\ Q_s(2,5,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y-5 & z\\ 5 & 4 & -1\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-8+2y-10+10z+8z-5y+25+2x-4=0 \Rightarrow 6x-3y+18z+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x-y+6z+1=0}$$

c) Determinamos las coordenadas de los puntos P y Q.

$$r \equiv \left.\begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \atop z=0 \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-0+1=0 \rightarrow y=-1 \end{cases} \Rightarrow x-1+2=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \boxed{P(-1,-1,0)}$$

$$s \equiv \left.\begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t \\ z=t \end{cases} \atop z=0 \right\} \Rightarrow \begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t \\ 0=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-0=2 \\ y=5+0=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(2,5,0)}$$

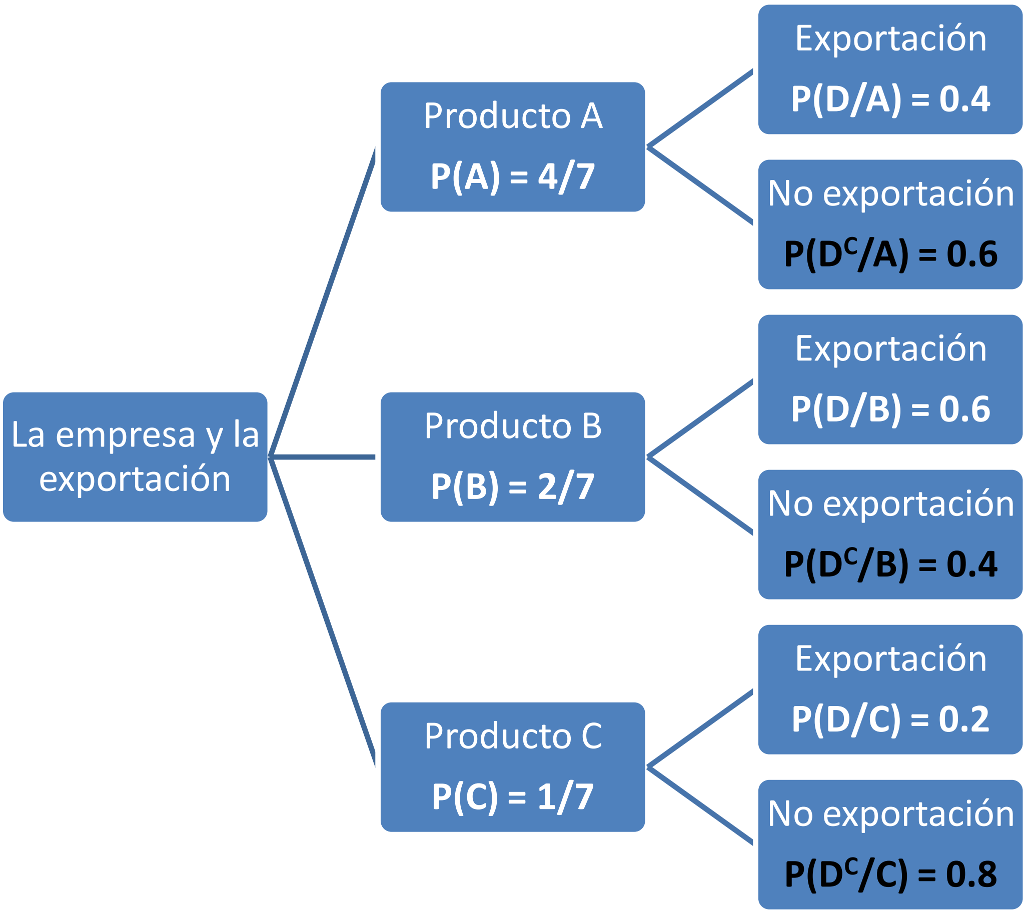
Hallamos la ecuación de la recta *t* que pasa por P y Q.

$$\left.\begin{matrix} P(-1,-1,0) \\ Q(2,5,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(2,5,0)-(-1,-1,0)=(3,6,0)$$

$$t \equiv \begin{cases} \vec{v}_t=\overrightarrow{PQ}=(3,6,0) \\ Q(2,5,0)\in t \end{cases} \Rightarrow \boxed{t \equiv \begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=5+6\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40% de los productos tipo A, un 60% de los productos tipo B y un 20% de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:
a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.
b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

Llamamos A = "ser producto A", B = "ser producto B", C = "ser producto C" y D = "ser producto de exportación".
Construimos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= \frac{4}{7}\cdot 0.4 + \frac{2}{7}\cdot 0.6 + \frac{1}{7}\cdot 0.2 = \boxed{\frac{3}{7} \simeq 0.43}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{7}\cdot 0.2}{\frac{3}{7}} = \boxed{\frac{1}{15} \approx 0.067}$$