UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2022 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: **[2,5 p.]** Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

2: Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$

a) **[0,75 p.]** Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.

b) **[0,75 p.]** Si A es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

c) **[1 p.]** Determine para que valores de a y b la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

3: Considere la función *f(x)* dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & si \quad x > 0 \ \ y \ \ x \neq 1 \\ a & si \quad x = 1 \end{cases}$$

a) **[0,5 p.]** Calcule el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a $+\infty$.

b) **[1 p.]** Determine el valor de *a* para que la función *f(x)* sea continua en *x = 1*.

c) **[1 p.]** Estudie si, para dicho valor de *a*, la función *f(x)* es derivable en *x = 1*. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de *f* en *x = 1*.

4: Considere la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.

b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función *f(x)* cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(0,1)$.

5: Considere el plano π de ecuación $\pi : x + y + z = 1$ y la recta *r* dada por

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ ax - z = a - 1 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta *r* en función del parámetro *a*.

b) **[1 p.]** Si a = –1 la recta *r* corta al plano π. Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta *r* con el plano π.

6: Considere las recta r y s dadas por

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad y \quad s : \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.

b) **[1 p.]** Calcule la distancia de la recta *r* al plano $\pi : x - y + 2z = 3$.

7: Un estudio publicado en *Environmental, Science and Technology* ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

a) **[0,5 p.]** Suponiendo que los sucesos "contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes" y "ser mujer" sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

b) **[1 p.]** En el mismo supuesto que en el apartado a), calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

c) **[1 p.]** Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

b) **[0,75 p.]** Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

c) **[1 p.]** Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

SOLUCIONES

1: [2,5 p.] Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

Llamamos “x” al dinero depositado en Islas Caimán (en millones de euros), “y” a lo depositado en Panamá y “z” a lo depositado en Fiji.

“La suma total de este dinero es de 150 millones de euros” → $x+y+z=150$

“Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán (se queda con ¾ de *x*), seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá” → $\frac{3}{4}x=3y$

“El dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán” → $y+\frac{2}{5}z=\frac{x}{2}$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=150 \\ \frac{3}{4}x=3y \\ y+\frac{2}{5}z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=150 \\ 3x=12y \\ 10y+4z=5x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=150 \\ x=4y \\ 10y+4z=5x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y+y+z=150 \\ 10y+4z=5(4y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5y+z=150 \\ 10y+4z=20y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=150-5y \\ 4z=10y \end{array}\right\} \Rightarrow 4(150-5y)=10y \Rightarrow 600-20y=10y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 600=30y \Rightarrow \boxed{y=\frac{600}{30}=20} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=4\cdot 20=80} \\ \boxed{z=150-5\cdot 20=50} \end{array}\right.$$

En las Islas Caimán tiene 80 millones de euros, en Panamá 20 y en Fiji tiene 50 millones.

2: Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$
a) **[0,75 p.]** Si *A* es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.
b) **[0,75 p.]** Si *A* es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.
c) **[1 p.]** Determine para que valores de *a* y *b* la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

a) Calculamos las potencias sucesivas de A en busca de una regularidad.

$$\begin{aligned} & A^2 = A \\ & A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A \\ & A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A \\ & A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A \\ & \ldots \\ & \ldots \\ & A^{2022} = A^{2021} \cdot A = A \cdot A = A^2 = A \end{aligned}$$

Realmemte cualquier potencia de A da como resultado la matriz A.

b)

$$A^2 = A \Rightarrow \left|A^2\right| = |A| \Rightarrow |A|^2 = |A| \Rightarrow |A|^2 - |A| = 0 \Rightarrow |A|\left(|A|-1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0, \text{ no es posible} \\ \text{pues A es regular y } |A| \neq 0 \\ o \\ |A| - 1 \Rightarrow \boxed{|A| = 1} \end{cases}$$

El determinante de A vale 1.

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a+2-2a & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2 & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2 & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \rightarrow a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ o \\ a = 1 \end{cases} \\ (1-a)^2 = 1-a \rightarrow a^2 - 2a + 1 = 1 - a \rightarrow a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ o \\ a = 1 \end{cases} \\ b^2 = b \rightarrow b^2 - b = 0 \rightarrow b(b-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ o \\ b = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Los valores serían $a = 0$ o $a = 1$ y $b = 0$ o $b = 1$.

3: Considere la función *f(x)* dada por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & si \quad x>0 \ y \ x\neq 1 \\ a & si \quad x=1 \end{cases}$$

a) **[0,5 p.]** Calcule el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a +∞.
b) **[1 p.]** Determine el valor de *a* para que la función *f(x)* sea continua en *x = 1*.
c) **[1 p.]** Estudie si, para dicho valor de *a*, la función *f(x)* es derivable en *x = 1*. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de *f* en *x = 1*.

a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

b) Para que sea continua en *x = 1* deben coincidir el límite con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x}=1 \\ f(1)=a \\ \displaystyle\lim_{x\to1} f(x)=f(1) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=1}$$

c) Para *a = 1* la función es $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & si \quad x>0 \ y \ x\neq 1 \\ 1 & si \quad x=1 \end{cases}$.

Calculamos la derivada en *x = 1* usando la definición.

$$f´(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x-x+1}{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\frac{\ln 1-1+1}{(1-1)^2}=$$

$$=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=\frac{0}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{2}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2x^2}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

La función es derivable en *x = 1* y su valor es $f´(1)=-\frac{1}{2}$.

4: Considere la función $f(x)=x^2e^{-x}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.
c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función *f(x)* cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(0,1)$.

a)

$$f'(x)=2xe^{-x}+x^2(-1)e^{-x}=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$$

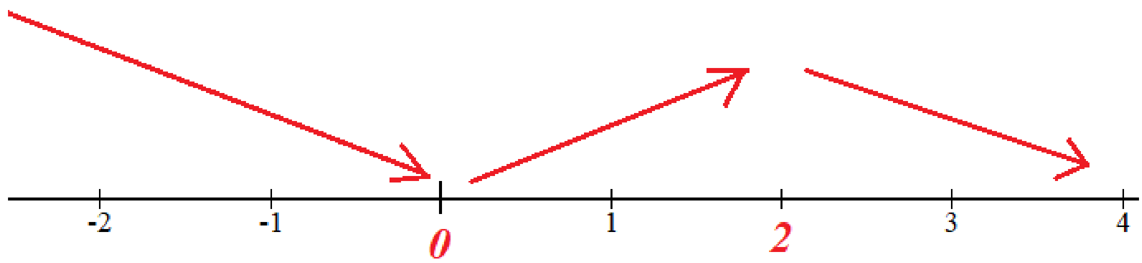
Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$f'(x)=0\Rightarrow xe^{-x}(2-x)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ e^{-x}=0 \quad \text{¡Imposible!}\\ 2-x=0\Rightarrow\boxed{x=2}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f'(-1)=(-1)e^{-(-1)}(2-(-1))=-3e<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1)=(1)e^{-1}(2-1)=e^{-1}>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos *x* = *3* y la derivada vale $f'(3)=3e^{-3}(2-3)=-3e^{-3}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(0,2)$.

b)

$$\int f(x)\,dx=\int x^2e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x^2\rightarrow du=2xdx\\ dv=e^{-x}dx\rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{array}\right\}=$$

$$=x^2\left(-e^{-x}\right)-\int 2x\left(-e^{-x}\right)dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=\ldots$$

$$\boxed{\int xe^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = x\left(-e^{-x}\right) - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}}$$

$$\dots = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} = \boxed{-e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + K}$$

c) La primitiva de la función es $F\left(x\right) = -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + K$. Si pasa por el punto (0, 1) entonces se debe cumplir que F(0) = 1.

$$F\left(0\right) = 1 \Rightarrow -e^{-0}\left(0^2 + 2\cdot 0 + 2\right) + K = 1 \Rightarrow -2 + K = 1 \Rightarrow \boxed{K = 3}$$

La primitiva buscada es $F\left(x\right) = -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + 3$

5: Considere el plano π de ecuación $\pi: x+y+z=1$ y la recta r dada por

$$r:\begin{cases} x-y=0 \\ ax-z=a-1 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

b) **[1 p.]** Si a = –1 la recta r corta al plano π. Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta r con el plano π.

a) El vector normal del plano $\pi: x+y+z=1$ es $\vec{n}=(1,1,1)$.

Hallamos un vector director de la recta.

$$r:\begin{cases} x-y=0 \\ ax-z=a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ ax-a+1=z \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=-a+1+a\lambda \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(0,0,1-a) \\ \vec{v_r}=(1,1,a) \end{cases}$$

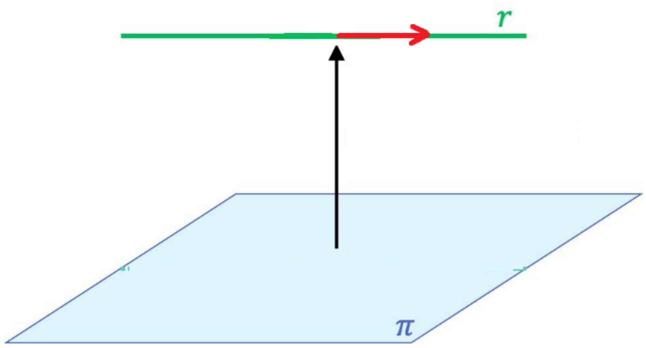
Recta y plano son paralelos o coincidentes si vector normal del plano y vector director de la recta forman 90º, es decir, su producto escalar es cero.

$$\left.\begin{matrix} \vec{v_r}=(1,1,a) \\ \vec{n}=(1,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{v_r}\cdot\vec{n}=(1,1,a)(1,1,1)=1+1+a=2+a$$

$$\vec{v_r}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow 2+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

Hay dos casos diferentes a estudiar.

CASO 1. $a=-2$

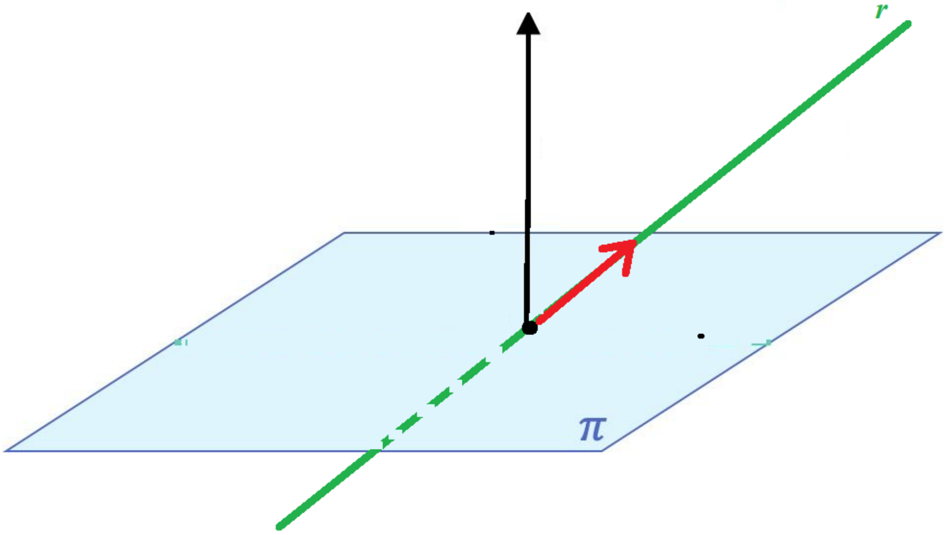


En este caso el producto escalar del vector normal del plano y vector director de la recta es cero. Plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.
Comprobamos si el punto $P_r(0,0,1-(-2))=(0,0,3)$ pertenece al plano $\pi: x+y+z=1$.

$$\left.\begin{matrix} P_r(0,0,3) \\ \pi: x+y+z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿0+0+3=1?$$

No se cumple. Recta y plano son paralelos.

CASO 2. $a \neq -2$



En este caso el producto escalar del vector normal del plano y vector director de la recta no es cero. La recta y el plano son secantes.

b) Si a = –1 la recta *r* queda $r:\begin{cases} x-y=0 \\ -x-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=2-x \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(0,0,2) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,-1) \end{cases}$.

Hallamos el punto A de corte de recta y plano.

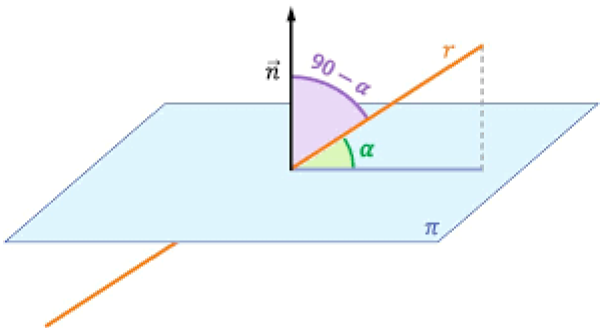
$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases} \\ \pi: x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow t+t+2-t=1 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=2-(-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1,-1,3)}$$

Hallamos el ángulo formado entre recta y plano. Hallamos primero el ángulo entre vector normal del plano $\vec{n}=(1,1,1)$ y el director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(1,1,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(1,1,-1) \\ \vec{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{v_r},\vec{n}\right)=\frac{\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{(1,1,-1)(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1+1-1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{v_r},\vec{n}\right)=arc\cos\frac{1}{3}=70.52^{\circ}$$

El ángulo entre recta y plano será 90º – 70.52º = 19.48º.



6: Considere las recta r y s dadas por

$$r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}\quad y\quad s:\begin{cases}x+2z=1\\ y=0\end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.
b) **[1 p.]** Calcule la distancia de la recta *r* al plano $\pi: x-y+2z=3$.

a) Las rectas son coplanarias si son paralelas o se cortan.
Obtenemos un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}\Rightarrow r:\begin{cases}P_r(1,0,0)\\ \overrightarrow{u_r}(-1,1,1)\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}x+2z=1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-2z\\ y=0\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1-2\lambda\\ y=0\\ z=\lambda\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}Q_s(1,0,0)\\ \overrightarrow{v_s}=(-2,0,1)\end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}(-1,1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(-2,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-1}{-2}\neq\frac{1}{0}\neq\frac{1}{1}$$

Comprobamos si el producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ es nulo.

$$\overrightarrow{P_rQ_s}=(1,0,0)-(1,0,0)=(0,0,0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

El producto mixto es nulo y las rectas son secantes y por tanto coplanarias.
Este último cálculo del producto mixto no era necesario pues el punto P_r y el Q_s son el mismo lo que quiere decir que las rectas se cortan en dicho punto y por tanto son secantes y coplanarias.

El plano π que las contiene tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto $P_r(1,0,0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}(-1,1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(-2,0,1)\\ P_r(1,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-1&y&z\\-1&1&1\\-2&0&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-1-2y+2z+y=0\Rightarrow\boxed{\pi:x-y+2z=1}$$

b) El plano $\pi: x-y+2z=3$ es paralelo al obtenido en el apartado a), por lo que la recta *r* y el plano son paralelos. La distancia de la recta al plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:x-y+2z-3=0\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|1-0-0-3|}{\sqrt{1+(-1)^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}u}$$

7: Un estudio publicado en *Environmental, Science and Technology* ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

a) **[0,5 p.]** Suponiendo que los sucesos “contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes” y “ser mujer” sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

b) **[1 p.]** En el mismo supuesto que en el apartado a), calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

c) **[1 p.]** Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

Llamamos C = “Contagiarse de Covid-19 en restaurantes” y M = “Ser mujer”.

a) Los sucesos “contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes” y “ser mujer” son independientes por lo que:

$$P(\text{Ser mujer y contraer el Covid}) = P(C \cap M) = P(C)P(M) = 0.45 \cdot 0.495 = \boxed{0.22275}$$

b)

$$P\left(\overline{M} \cup \overline{C}\right) = P\left(\overline{M \cap C}\right) = 1 - P(M \cap C) = 1 - 0.22275 = \boxed{0.77725}$$

c) Se trata de una binomial donde X = Número de personas que contraen el Covid-19 en el interior de restaurantes de un grupo de 8. Los parámetros son p = 0.45, n = 8.

X = B(8, 0.45).

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\right] =$$

$$= 1 - \left[\binom{8}{0}0.45^0 \cdot 0.55^8 + \binom{8}{1}0.45^1 \cdot 0.55^7 + \binom{8}{2}0.45^2 \cdot 0.55^6 + \binom{8}{3}0.45^3 \cdot 0.55^5\right] =$$

$$= 1 - \left[0.0084 + 0.0548 + 0.1569 + 0.2568\right] = \boxed{0.5231}$$

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.
b) **[0,75 p.]** Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.
c) **[1 p.]** Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

X = La altura de los individuos de una población

$$X = N(175, 4)$$

a) Nos piden calcular $P(X > 170)$.

$$P(X > 170) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-175}{4} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{170-175}{4}\right) = P(Z > -1.25) =$$

$$= P(Z < 1.25) = \{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\} = \boxed{0.8944}$$

b)

$$P(170 < X < 185) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-175}{4} \end{array} \right\} = P\left(\frac{170-175}{4} < Z < \frac{185-175}{4}\right) = P(-1.25 < Z < 2.5) =$$

$$= P(Z < 2.5) - P(Z < -1.25) = P(Z < 2.5) - P(Z > 1.25) = P(Z < 2.5) - [1 - P(Z < 1.25)]$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\} = 0.9938 - [1 - 0.8944] = \boxed{0.8882}$$

El porcentaje de población que mide entre 170 y 185 cm es del 88.82 %

c) Nos piden hallar “a” tal que $P(X > a) = 0.33$
Como el porcentaje es menor de 0.5 el valor de “a” debe ser mayor que la media 175 cm.

$$P(X > a) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-175}{4} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{a-175}{4}\right) = \left\{\frac{a-175}{4} > 0\right\} = 1 - P\left(Z < \frac{a-175}{4}\right) = 0.33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{a-175}{4}\right) = 1 - 0.33 = 0.67 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-175}{4} = 0.44 \Rightarrow a - 175 = 1.76 \Rightarrow a = 175 + 1.76 = \boxed{176.76\,cm}$$