Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Modelo 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1 Dado el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=1 \\ -mx+2y+z&=2 \end{aligned}$$

dependiente del parámetro *m*.

a) Discuta para qué valores de *m* el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (5 puntos)

b) Encuentre la solución para *m = 2*. (5 puntos)

2 Dadas las matrices

$$X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de *k* para los cuáles Y es invertible. (3 puntos)

b) Encuentre la inversa de Y para *k = 1*. (3 puntos)

c) Determine los valores de *m* y *n* para los que la matriz X satisface

$$X^2-4X+n\,Id=0,$$

Donde Id denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

3 El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1´5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.

a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal. (4 puntos)

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)

c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

4 Dada la función $f(x)=-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}$

a) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento. (5 puntos)

b) Encuentre una primitiva de *f(x)*. (3 puntos)

c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y las rectas *x = 4, x = 7* e *y = 0.* (2 puntos)

5 Una academia de inglés cobra una cuota de 50 euros mensuales y cuenta con 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2 euros que sube (o baja) la cuota se pierden (o se ganan) 10 estudiantes.

a) Escriba el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota. (3 puntos)
b) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes? (2 puntos)
c) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia? (5 puntos)

6 La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función

$$P(t)=\frac{20t}{4+t^2}+40,\ \ t\geq 0$$

donde t es el tiempo en años.

a) Calcule la población actual (para $t = 0$) (2 puntos)
b) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito. (3 puntos)
c) Determine al cabo de cuántos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo. (5 puntos)

7 En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu=5.1$ puntos y desviación típica $\sigma=1.6$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos? (3 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5.9? (4 puntos)
c) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos? (3 puntos)

8 Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(B/A)=0.9 \qquad p(A/B)=0.2 \qquad p(A)=0.1$$

a) Calcule $p(A\cap B)$ y $p(B)$. (5 puntos)
b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta. (2 puntos)
c) Calcule $p\left(A\cap \overline{B}\right)$, donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B. (3 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

1 Dado el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=1 \\ -mx+2y+z&=2 \end{aligned}$$

dependiente del parámetro *m*.

a) Discuta para qué valores de *m* el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (5 puntos)

b) Encuentre la solución para *m* = *2*. (5 puntos)

Obtenemos un sistema equivalente más sencillo de estudiar.

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y+z&=1 \\ -mx+2y+z&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2y+z+3x&=1 \\ 2y+z-mx&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2y+z+3x &=1 \\ -2y-z+mx &=-2 \end{aligned}\right\}$$

$$\overline{(3+m)x=-1}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2y+z+3x&=1 \\ (3+m)x&=-1 \end{aligned}\right\}$$

Se plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

- Si $3+m=0 \rightarrow m=-3$ entonces el sistema queda $\left.\begin{aligned} 2y+z+3x&=1 \\ 0&=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ ¡Imposible!

  Si $m=-3$ el sistema es incompatible (sin solución).

- Si $3+m\neq 0 \rightarrow m\neq -3$ entonces el sistema se puede resolver, pues queda:

$$\left.\begin{aligned} 2y+z+3x&=1 \\ (3+m)x&=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{3+m\neq 0\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2y+z+3x&=1 \\ &\boxed{x=\frac{-1}{3+m}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y+z+3\frac{-1}{3+m}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y+z=1+\frac{3}{3+m} \Rightarrow 2y+z=\frac{3+m+3}{3+m} \Rightarrow \boxed{z=\frac{6+m}{3+m}-2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Solución:}\begin{cases} x=\dfrac{-1}{3+m} \\ y=t \\ z=\dfrac{6+m}{3+m}-2t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

a) El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) cuando $m\neq -3$

b) Si $m=2$ el sistema tiene infinitas soluciones, Sustituimos en las soluciones obtenidas anteriormente para $m\neq -3$.

$$\text{Solución:}\begin{cases} x=\dfrac{-1}{3+2}=-\dfrac{1}{5} \\ y=t \\ z=\dfrac{6+2}{3+2}-2t=\dfrac{8}{5}-2t \end{cases}$$

Las infinitas soluciones son: $x=-\dfrac{1}{5};\ \ y=t;\ \ z=\dfrac{8}{5}-2t;\ \ t\in\mathbb{R}$

2 Dadas las matrices

$$X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de k para los cuáles Y es invertible. (3 puntos)
b) Encuentre la inversa de Y para $k = 1$. (3 puntos)
c) Determine los valores de m y n para los que la matriz X satisface

$$X^2-4X+n\,Id=0,$$

Donde Id denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

a) La matriz Y es invertible si su determinante es no nulo.

$$\left.\begin{array}{r} |Y|=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}=-k-4 \\ |Y|=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -k-4=0 \Rightarrow \boxed{k=-4}$$

La matriz Y es invertible si $k \neq -4$.

b) Si $k = 1$ la matriz Y es invertible.

$$|Y|=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0.$$

$$Y^{-1}=\frac{Adj\left(Y^T\right)}{|Y|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-5}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y^{-1}=\begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}}$$

c) Sustituimos en la ecuación matricial los valores de las matrices y resolvemos.

$$X^2-4X+n\,Id=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2-4m+n & 0 \\ 0 & -3+n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2-4m+n=0 \\ -3+n=0 \rightarrow \boxed{n=3} \end{cases} \Rightarrow m^2-4m+3=0 \Rightarrow m=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} \frac{4+2}{2}=\boxed{3=m} \\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=m} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m = n = 3$ o $m = 1$ y $n = 3$.

3 El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1´5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.
a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal. (4 puntos)
b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

a) Llamamos x = número de paquetes del tipo A, y = número de paquetes del tipo B.

Realizamos una tabla.

	Paquetes de pipas	chicles	Bombones	Beneficio
Nº paquetes tipo A (x)	**x**	**2x**	**2x**	**1.5x**
Nº paquetes tipo B (y)	**y**	**4y**	**y**	**2y**
TOTAL	$x+y$	$2x+4y$	$2x+y$	$1.5x+2y$

La función a maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión:

$$B(x,y)=1.5x+2y$$

Las restricciones son:

"*dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones*" → $x+y\le 10;\ 2x+4y\le 30;\ 2x+y\le 18$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 10 \\ 2x+4y\le 30 \\ 2x+y\le 18 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\le 10 \\ x+2y\le 15 \\ 2x+y\le 18 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=10$

x	$y=10-x$
0	10
5	5
8	2

$x+2y=15$

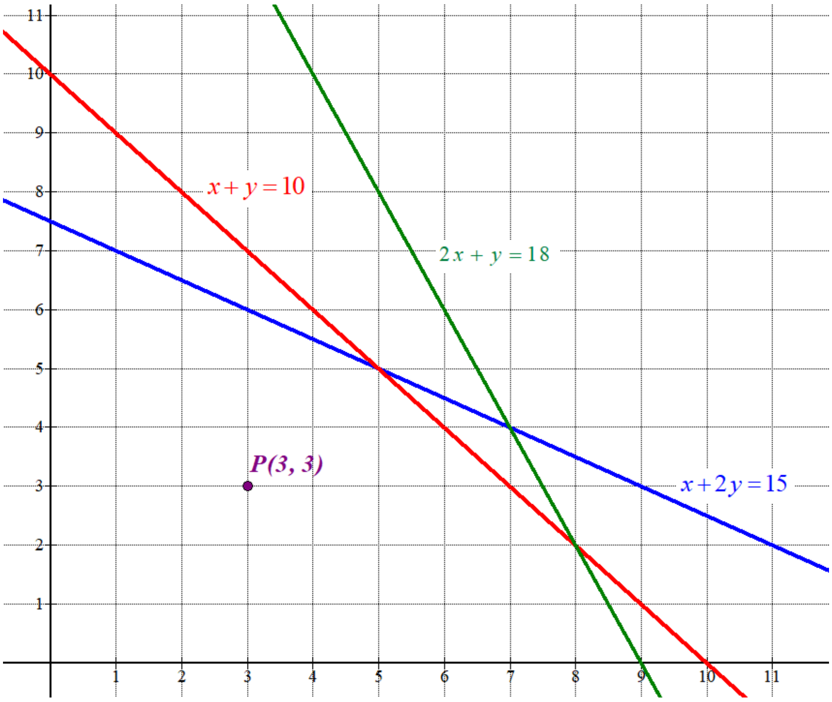
x	$y=\dfrac{15-x}{2}$
0	7.5
5	5
15	0

$2x+y=18$

x	$y=18-2x$
0	18
7	4
8	2

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante



La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones

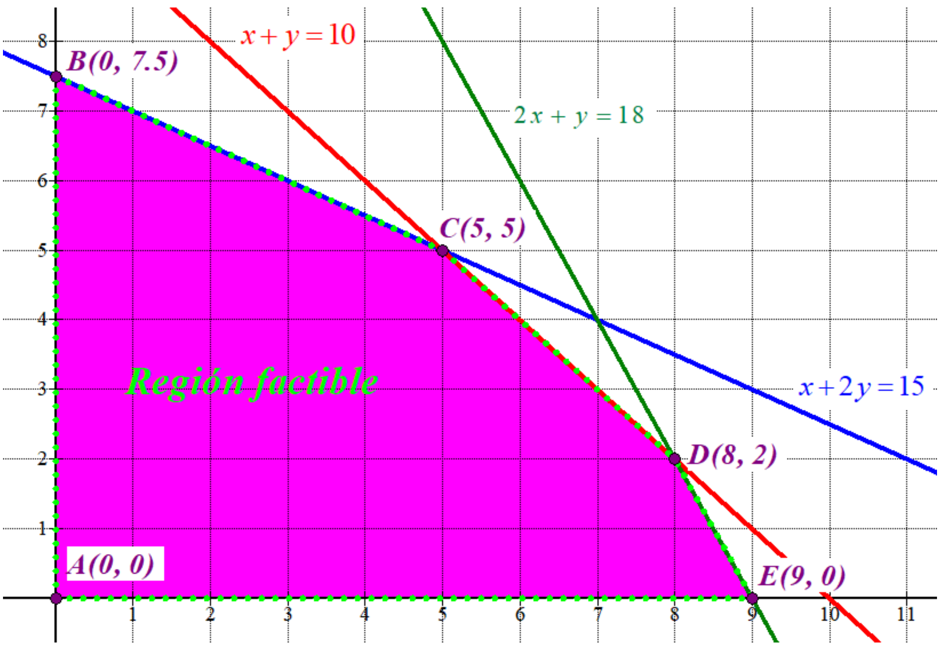
$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 10 \\ x+2y\leq 15 \\ 2x+y\leq 18 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

, por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto P(3, 3) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3+3\leq 10 \\ 3+6\leq 15 \\ 6+3\leq 18 \\ 3\geq 0;\ 3\geq 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



c) Para obtener el máximo beneficio valoramos la función $B(x,y)=1.5x+2y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 7.5) → $B(0,7.5)=0+15=15$

C(5, 5) → $B(5,5)=7.5+10=17.5$ ¡Máximo!

D(8, 2) → $B(8,2)=12+4=16$

E(9, 0) → $B(9,0)=13.5+0=13.5$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(5, 5). Significa que confeccionando y vendiendo 5 paquetes de cada tipo se consiguen unos beneficios máximos de 17.5 €.

4 Dada la función $f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}$

a) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento. (5 puntos)

b) Encuentre una primitiva de *f(x)*. (3 puntos)

c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y las rectas *x = 4, x = 7* e *y = 0*. (2 puntos)

a) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento utilizamos la derivada.

$$f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}=\frac{-(x+3)+x-1}{(x-1)(x+3)}=\frac{-x-3+x-1}{x^2+3x-x-3}=\frac{-4}{x^2+2x-3}$$

$$f'(x)=\frac{0-(-4)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{8x+8}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{8x+8}{(x^2+2x-3)^2}=0\Rightarrow 8x+8=0\Rightarrow 8x=-8\Rightarrow\boxed{x=-1}$$

Tenemos un punto crítico. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=-3$, $x=-1$ y $x=1$.

En el intervalo $(-\infty,-3)$ tomamos *x = –4* y la derivada vale

$f'(-4)=\frac{8(-4)+8}{\left((-4)^2+2(-4)-3\right)^2}=\frac{-24}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-3)$.

En el intervalo $(-3,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale

$f'(-2)=\frac{8(-2)+8}{\left((-2)^2+2(-2)-3\right)^2}=\frac{-8}{9}<0$. La función decrece en $(-3,-1)$.

En el intervalo $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=\frac{8}{(-3)^2}=\frac{8}{9}>0$. La función crece en $(-1,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=\frac{16+8}{(2^2+4-3)^2}=\frac{24}{25}>0$.

La función crece en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)$ y crece en $(-1,1)\cup(1,+\infty)$

b)

$$F(x)=\int f(x)dx=\int-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}dx=-\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x+3}dx=\boxed{-\ln|x-1|+\ln|x+3|+K}$$

c) Vemos si la función corta el eje de abscisas.

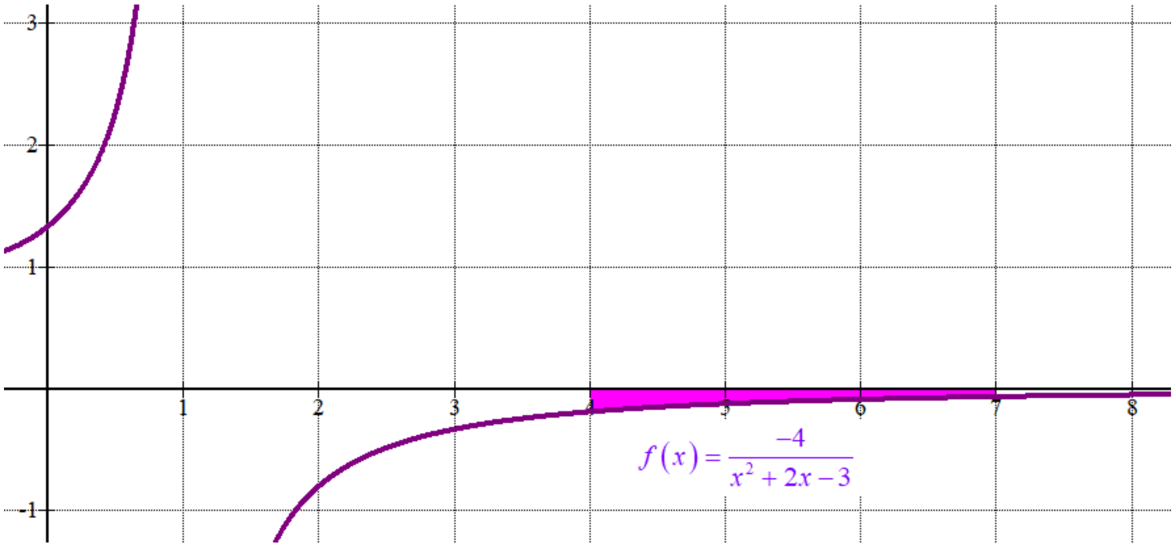
$$\left.\begin{array}{r} f(x) = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{-4}{x^2+2x-3} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \frac{-4}{x^2+2x-3} \Rightarrow -4 = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La función no corta el eje de abscisas.
El área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y las rectas *x = 4, x = 7* e *y = 0* será el valor absoluto de la integral definida entre 4 y 7 de la función.

$$Área = \left|\int_4^7 f(x)\,dx\right| = \left|\left[-\ln|x-1| + \ln|x+3|\right]_4^7\right| =$$

$$= \left|\left[-\ln|7-1| + \ln|7+3|\right] - \left[-\ln|4-1| + \ln|4+3|\right]\right| = \left|-\ln 6 + \ln 10 + \ln 3 - \ln 7\right| \simeq |-0.336|$$

$$\boxed{Área = \ln\frac{42}{30} \simeq 0.336\,u^2}$$



5 Una academia de inglés cobra una cuota de 50 euros mensuales y cuenta con 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2 euros que sube (o baja) la cuota se pierden (o se ganan) 10 estudiantes.
a) Escriba el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota. (3 puntos)
b) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes? (2 puntos)
c) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia? (5 puntos)

a) Llamamos "x" a la cuota mensual y N(x) al número de estudiantes.

N(x) es una función lineal → $N(x) = ax + b$.

Tenemos que N(50) = 200 y N(52) = 200 – 10 = 190.

$$\left.\begin{array}{l} N(x) = ax+b \\ N(50) = 200 = 50a+b \\ N(52) = 190 = 52a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 200 = 50a+b \\ 190 = 52a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 200-50a = b \\ 190 = 52a+b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 190 = 52a + 200 - 50a \Rightarrow -10 = 2a \Rightarrow \boxed{a=-5} \Rightarrow \boxed{b = 200-50(-5) = 450} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N(x) = -5x+450}$$

La función es $N(x) = -5x+450$, siendo *x* la cuota mensual y *N(x)* el número de estudiantes.

b) Nos piden averiguar cuando *N(x) = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} N(x) = -5x+450 \\ N(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -5x+450 = 0 \Rightarrow 5x = 450 \Rightarrow x = \frac{450}{5} = 90$$

Con una cuota de 90 euros la academia se queda sin estudiantes.

c) El ingreso mensual es el producto del número de estudiantes por la cuota que paga cada uno.

$$I(x) = x \cdot N(x) = x(-5x+450) = -5x^2 + 450x$$

Derivamos esta función e igualamos la derivada a cero en busca de su unto crítico.

$$\left.\begin{array}{r} I(x) = -5x^2+450x \Rightarrow I'(x) = -10x+450 \\ I'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -10x+450 = 0 \Rightarrow 10x = 450 \Rightarrow \boxed{x=45}$$

Calculamos la derivada segunda y vemos su signo para *x = 45*.

$$I'(x) = -10x+450 \Rightarrow I''(x) = -10 \Rightarrow I''(45) = -10 < 0$$

La función ingresos mensuales alcanza un máximo para una cuota mensual de 45 €.

Como $N(45) = -5 \cdot 45 + 450 = 225$ el número de estudiantes es de 225.

Como $I(45) = -5 \cdot 45^2 + 450 \cdot 45 = 10125$ los ingresos máximos que se consiguen son 10125 €.

6 La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función

$$P(t)=\frac{20t}{4+t^2}+40,\ \ t\geq 0$$

donde t es el tiempo en años.

a) Calcule la población actual (para $t = 0$) (2 puntos)

b) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito. (3 puntos)

c) Determine al cabo de cuántos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo. (5 puntos)

a) $P(0)=\frac{0}{4+0^2}+40=40$. La población inicial es de 40 millones de habitantes.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{20t}{4+t^2}+40=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\frac{20t}{t^2}}{\frac{4}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}+40=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\frac{20}{t}}{\frac{4}{t^2}+1}+40=\frac{\frac{20}{\infty}}{\frac{4}{\infty}+1}+40=\frac{0}{1}+40=40$.

c) Derivamos la función e igualamos a cero la función derivada.

$$P'(t)=\frac{20(4+t^2)-2t(20t)}{(4+t^2)^2}+0=\frac{80+20t^2-40t^2}{(4+t^2)^2}=\frac{80-20t^2}{(4+t^2)^2}$$

$$P'(t)=0\Rightarrow\frac{80-20t^2}{(4+t^2)^2}=0\Rightarrow 80-20t^2=0\Rightarrow 20t^2=80\Rightarrow t^2=4\Rightarrow\boxed{t=\sqrt{4}=2}$$

Valoramos la derivada antes y después del segundo año para comprobar si es un máximo o un mínimo.

En $(0,2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1)=\frac{80-20\cdot 1^2}{(4+1^2)^2}=\frac{60}{25}>0$.

La función crece en $(0,2)$.

En $(2,+\infty)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $P'(3)=\frac{80-20\cdot 3^2}{(4+3^2)^2}=\frac{-100}{169}<0$.

La función decrece en $(2,+\infty)$.

Por lo que la función presenta un máximo relativo en $t = 2$.

Para $t = 2$ la función vale $P(2)=\frac{40}{4+2^2}+40=45$.

Resumiendo: Al cabo de dos años se alcanza una población máxima de 45 millones de habitantes.

7 En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu = 5.1$ puntos y desviación típica $\sigma = 1.6$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos? (3 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5.9? (5 puntos)

c) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos? (3 puntos)

X = Las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática.
X = N(5.1, 1.6)

a) Nos piden calcular $P(X<4)$.

$$P(X<4) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-5.1}{1.6} < \frac{4-5.1}{1.6}\right) = P(Z < -0.6875) =$$

$$= P(Z \geq 0.6875) = 1 - P(Z \leq 0.6875) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} =$$

$$= 1 - 0.7549 = \boxed{0.2451}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852

b)

Si X = N(5.1, 1.6) entonces $\overline{X}_{64} = N\left(5.1, \frac{1.6}{\sqrt{64}}\right) = N(5.1, 0.2)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{64} > 5.9)$.

$$P(\overline{X}_{64} > 5.9) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{5.9-5.1}{0.2}\right) =$$

$$= P(Z>4) = 1 - P(Z<4) = 1 - 1 = \boxed{0}$$

c) Calculamos $P(X>4)$.

$$P(X>4) = 1 - P(X<4) = 1 - 0.2451 = 0.7549$$

El número de alumnos de un grupo de 50 que se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos es de 0.7549 · 50 = 37.745. Aproximadamente se esperan unos 38 alumnos con dicha nota.

	0	
0.0	0.5000	0.
0.1	0.5398	0.
0.2	0.5793	0.
0.3	0.6179	0.
0.4	0.6554	0.
0.5	0.6915	0.
0.6	0.7257	0.
0.7	0.7580	0.
0.8	0.7881	0.
0.9	0.8159	0.
1.0	0.8413	0.
1.1	0.8643	0.
1.2	0.8849	0.
1.3	0.9032	0.
1.4	0.9192	0.
1.5	0.9332	0.
1.6	0.9452	0.
1.7	0.9554	0.
1.8	0.9641	0.
1.9	0.9713	0.
2.0	0.9772	0.
2.1	0.9821	0.
2.2	0.9861	0.
2.3	0.9893	0.
2.4	0.9918	0.
2.5	0.9938	0.
2.6	0.9953	0.
2.7	0.9965	0.
2.8	0.9974	0.
2.9	0.9981	0.
3.0	0.9987	0.
3.1	0.9990	0.
3.2	0.9993	0.
3.3	0.9995	0.
3.4	0.9997	0.
3.5	0.9998	0.
3.6	0.9998	0.
3.7	0.9999	0.
3.8	0.9999	0.
3.9	1.0000	1.
4.0	1.0000	1.
4.1	1.0000	1.

8 Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(B/A)=0.9 \qquad p(A/B)=0.2 \qquad p(A)=0.1$$

a) Calcule $p(A\cap B)$ y $p(B)$. (5 puntos)

b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta. (2 puntos)

c) Calcule $p(A\cap \overline{B})$, donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B. (3 puntos)

a)

$$\left.\begin{array}{l} p(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ p(A)=0.1 \\ p(B/A)=0.9 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.9=\frac{P(A\cap B)}{0.1} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0.09}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(A\cap B)=0.09 \\ p(A/B)=0.2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.2=\frac{0.09}{p(B)} \Rightarrow 0.2\cdot p(B)=0.09 \Rightarrow \boxed{p(B)=\frac{0.09}{0.2}=0.45}$$

b) Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse: $p(A\cap B)=p(A)\,p(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} p(A\cap B)=0.09 \\ p(A)\,p(B)=0.1\cdot 0.45=0.045 \end{array}\right\} \Rightarrow p(A\cap B)\neq p(A)\,p(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

c)

$$\left.\begin{array}{l} p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap \overline{B}) \\ p(A)=0.1 \\ p(A\cap B)=0.09 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.1=0.09+p(A\cap \overline{B}) \Rightarrow \boxed{p(A\cap \overline{B})=0.1-0.09=0.01}$$