	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	**EXAMEN** **Nº Páginas: 2 (tabla adicional)**

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y **UNA** CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN
Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)
Una empresa de diseño ha comprado dos impresoras 3D para imprimir figuras y fichas para juegos de mesa. La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas y necesita 6 horas para imprimir cada figura y 5 horas para cada ficha. La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas y necesita 2 horas para hacer cada figura y 5 horas para cada ficha. El beneficio neto que obtiene la empresa por imprimir cada figura es de 1 € mientras que el beneficio neto que obtiene por imprimir cada ficha es de 1.5 €. Si el número máximo de figuras ha de ser 25, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas figuras y fichas ha de imprimir para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real *a*: $\begin{cases} 3x+2y+az=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de *a*.
b) Resolver el sistema para $a = 0$.

P3. (Análisis)
El consumo (medido en litros/hora) de combustible, en una explotación industrial durante un turno de 8 horas, se puede expresar por la función: $f(t)=\begin{cases} -t^2+6t+3 & si\ 0\le t\le 2 \\ -t+a & si\ 2<t\le 8 \end{cases}$
donde *t* representa el tiempo desde el inicio del turno, medido en horas.
a) Establecer el valor de *a* para que el consumo sea continuo a lo largo de todo el turno. ¿A partir de la segunda hora cuánto cambia el consumo por cada hora que pasa?
b) ¿En qué momento se alcanza el máximo consumo? ¿Cuánto se está consumiendo en ese momento? ¿En qué periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora?

P4. (Análisis)

El número de usuarios de una estación de metro a lo largo de un domingo evoluciona según la función $N(x) = -2x^3 + 75x^2 - 600x + 2000 \; con \; 0 \leq x < 24$, donde x indica la hora del día.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de usuarios de la estación a lo largo del domingo.

b) ¿A qué hora el número de usuarios es máximo y a qué hora es mínimo? Calcular el número de usuarios correspondiente a dichas horas.

P5. (Estadística y probabilidad)

Una compañía ofrece seguros de cancelación de viajes a destinos exóticos: el 30 % de sus seguros se contratan para viajar al país A, el 50 % para viajar al país B y el resto para viajar al país C. Según estudios previos, se cancela el viaje en el 1 % de los seguros contratados para el país A, el 1.5 % de los contratados para B y el 3.5 % de los contratados para C. Elegido un seguro al azar,

a) Calcular la probabilidad de que sea un viaje que se cancela.

b) Si es un seguro de un viaje cancelado, calcular la probabilidad de que haya sido contratado para viajar al país C.

P6. (Estadística y probabilidad)

La distancia recorrida para ir a clase por los estudiantes de cierta universidad se distribuye según un modelo normal de media μ kilómetros y varianza 2.25. Se toma una muestra de 100 estudiantes, obteniéndose una distancia media de 4 kilómetros para esa muestra. Tomando esta información, se pide

a) Hallar el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 96 %.

b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que, al nivel de confianza del 95 %, el error máximo de estimación de la distancia media μ sea de 0.1 kilómetros?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Dadas tres matrices A, B y C se sabe que $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de dimensiones 2×3 y que $B \cdot C$ es de dimensiones 4×3, determinar las dimensiones que debe tener A.

C2. (Análisis)

Dada $f(x) = \dfrac{ax^2+1}{5x}$. Dar un valor de a para que en $x = 1$ haya un extremo relativo de. $f(x)$.

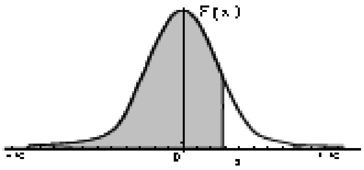
C3. (Estadística y probabilidad)

La ficha técnica de una encuesta electoral realizada para las pasadas elecciones autonómicas indica que se ha encuestado a 1000 individuos con derecho a voto residentes en Castilla y León. La muestra se ha tomado mediante muestreo aleatorio simple. El error de estimación de la proporción de individuos de la población que vota al *partido K* es de ± 3.2 % fijada una confianza del 95.5 %.

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

P1. (Números y álgebra)
Una empresa de diseño ha comprado dos impresoras 3D para imprimir figuras y fichas para juegos de mesa. La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas y necesita 6 horas para imprimir cada figura y 5 horas para cada ficha. La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas y necesita 2 horas para hacer cada figura y 5 horas para cada ficha. El beneficio neto que obtiene la empresa por imprimir cada figura es de 1 € mientras que el beneficio neto que obtiene por imprimir cada ficha es de 1.5 €. Si el número máximo de figuras ha de ser 25, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas figuras y fichas ha de imprimir para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

Llamamos x = número de figuras a imprimir, y = número de fichas a imprimir.

Hacemos una tabla para establecer mejor las restricciones.

	Horas primera impresora	Horas segunda impresora	Beneficio
Nº figuras (x)	6x	2x	x
Nº fichas (y)	5y	5y	1.5y
TOTAL	$6x+5y$	$2x+5y$	$x+1.5y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como:

$$B(x,y)=x+1.5y$$

Las restricciones son:

"*La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas*" → $6x+5y\le 300$

"*La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas*" → $2x+5y\le 200$

"*El número máximo de figuras ha de ser 25*" → $x\le 25$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 6x+5y\le 300 \\ 2x+5y\le 200 \\ x\le 25 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$6x+5y=300$

x	$y=\dfrac{300-6x}{5}$
0	60
25	30
50	0

$2x+5y=200$

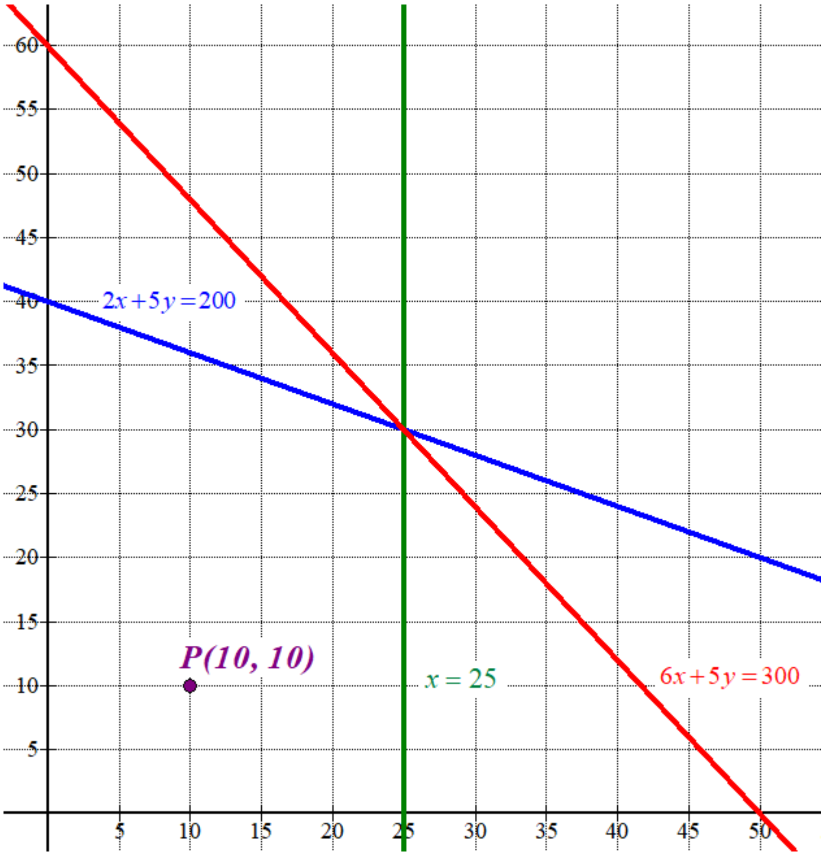
x	$y=\dfrac{200-2x}{5}$
0	40
25	30

$x=25$

Recta vertical

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

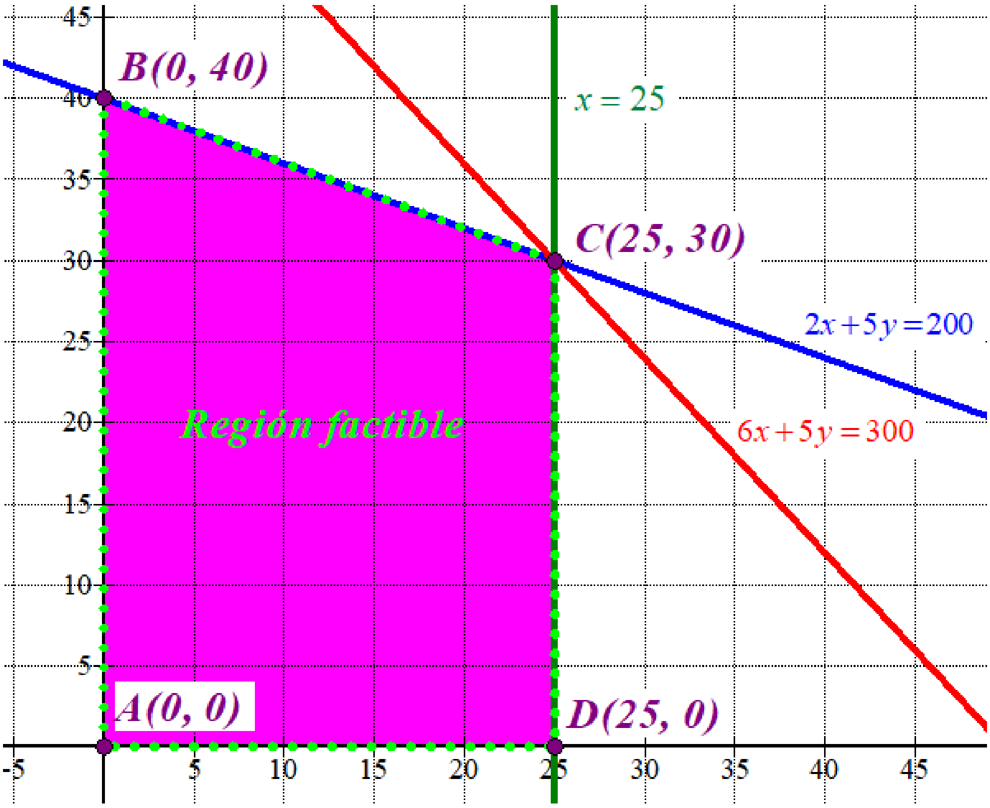


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} 6x+5y\leq 300 \\ 2x+5y\leq 200 \\ x\leq 25 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja y a la izquierda de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto P(10, 10) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 60+50\leq 300 \\ 20+50\leq 200 \\ 10\leq 25 \\ 10\geq 0; 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son A(0, 0); B(0, 40); C(25, 30) y D(25, 0).

Valoramos la función objetivo $B(x,y)=x+1.5y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 40) → $B(0,40)=0+60=60$

C(25, 30) → $B(25,30)=25+45=70$ ¡Máximo!

$D(25,0)$ → $B(25,0)=25+0=25$

El máximo beneficio es de 70 € y se produce en el vértice C (25, 30) que significa imprimir 25 figuras y 30 fichas.

El beneficio máximo es de 70 €.

P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real *a*: $\begin{cases} 3x+2y+az=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de *a*.
b) Resolver el sistema para *a* = *0*.

a) Transformamos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$\begin{cases} 3x+2y+az=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ Ecuación 1^a \leftrightarrow Ecuación 3^a \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ 3x+2y+az=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\, 2^a - 5 \cdot Ecuación\, 1^a \\ \begin{array}{cccc} 5x & +3y & +3z & =2 \\ -5x & -5y & +5z & =-5 \\ \hline & -2y & +8z & =-3 \end{array} \to Nueva\, ecuación\, 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\, 3^a - 3 \cdot Ecuación\, 1^a \\ \begin{array}{cccc} 3x & +2y & +az & =1 \\ -3x & -3y & +3z & =-3 \\ \hline & -y & +(a+3)z & =-2 \end{array} \to Nueva\, ecuación\, 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -2y+8z=-3 \\ -y+(a+3)z=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot Ecuación\, 3^a - Ecuación\, 2^a \\ \begin{array}{ccc} -2y & +(2a+6)z & = -4 \\ 2y & -8z & = 3 \\ \hline & (2a-2)z & = -1 \end{array} \to Nueva\, ecuación\, 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y \quad -z=1 \\ -2y \quad +8z=-3 \\ (2a-2)z=-1 \end{cases}$$

La compatibilidad del sistema depende del valor de "a".

$$2a-2=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Se plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 1$.
En este caso el sistema es compatible determinado y se puede resolver teniendo una única solución.

CASO 2. Si $a=1$.
Vemos como queda el sistema equivalente obtenido:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -2y+8z=-3 \Rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 0=-1 \end{cases}$$

Queda un sistema incompatible (sin solución) pues una de las igualdades es imposible.

Resumiendo: Si $a \neq 1$ el sistema tiene una única solución y si $a = 1$ el sistema no tiene solución.

b) Si *a = 0* el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos utilizando el sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -2y+8z=-3 \\ -2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -2y+8z=-3 \\ \boxed{z=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-\frac{1}{2}=1 \\ -2y+8\frac{1}{2}=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1+\frac{1}{2} \\ -2y+4=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ -2y=-7 \to \boxed{y=\frac{7}{2}} \end{cases} \Rightarrow x+\frac{7}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}-\frac{7}{2}=-2}$$

La solución es $x=-2;\ y=\frac{7}{2};\ z=\frac{1}{2}$

P3. (Análisis)
El consumo (medido en litros/hora) de combustible, en una explotación industrial durante un turno de 8 horas, se puede expresar por la función: $f(t)=\begin{cases} -t^2+6t+3 & si\ 0\le t\le 2 \\ -t+a & si\ 2<t\le 8 \end{cases}$
donde t representa el tiempo desde el inicio del turno, medido en horas.
a) Establecer el valor de a para que el consumo sea continuo a lo largo de todo el turno. ¿A partir de la segunda hora cuánto cambia el consumo por cada hora que pasa?
b) ¿En qué momento se alcanza el máximo consumo? ¿Cuánto se está consumiendo en ese momento? ¿En qué periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora?

a) La función debe ser continua en $t = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 2^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 2^-} -t^2+6t+3=-2^2+12+3=11 \\ \lim\limits_{t\to 2^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 2^+} -t+a=-2+a \\ f(2)=11 \\ \lim\limits_{t\to 2^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 2^+} f(t)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow -2+a=11 \Rightarrow \boxed{a=13}$$

El valor buscado es $a = 13$.

A partir de la segunda hora ($t = 2$) la función consumo es lineal con pendiente $m = -1$, por lo que por cada hora que pasa el consumo disminuye una unidad (1 litro/hora).
Para $t = 3$ el consumo es $P(3) = -3 + 13 = \mathbf{10}$ y $P(4) = -4 + 13 = \mathbf{9}$. Disminuye el consumo 1 litro/hora como se ha indicado.

b) Estudiamos la variación del consumo en cada intervalo de definición.

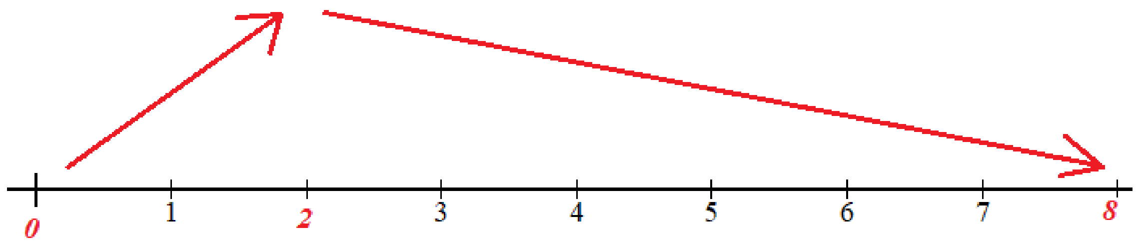
$$si\ 0\le t\le 2 \to f(t)=-t^2+6t+3 \Rightarrow f'(t)=-2t+6$$
$$f'(t)=0 \Rightarrow -2t+6=0 \Rightarrow t=3\notin[0,2]$$

Como el extremo de la parábola no pertenece al intervalo de definición la función es creciente o decreciente en [0, 2]. Como $f'(1)=-2+6=4>0$ la función es creciente en [0, 2].

$$si\ 2<t\le 8 \to f(t)=-t+13 \Rightarrow f'(t)=-1$$

Como la derivada siempre es negativa la función es decreciente en (2,8].

La función sigue el esquema siguiente:



El máximo consumo se produce a las 2 horas.
Como $f(2)=11$, el consumo en dicho momento es de 11 litros/hora.

Para averiguar en que periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora averiguamos cuando el consumo es de 8 litros/hora y por la evolución del consumo se superará entre esos dos valores que obtengamos.

$$f(t)=8 \Rightarrow \begin{cases} -t^2+6t+3=8 \rightarrow -t^2+6t-5=0 \rightarrow t=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-20}}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-6+4}{-2}=\boxed{1=t} \\ \dfrac{-6-4}{-2}=5\notin[0,2]\end{cases} \\ -t+13=8 \rightarrow \boxed{t=5} \end{cases}$$

El consumo supera los 8 litros/hora entre la primera hora y la quinta.

P4. (Análisis)

El número de usuarios de una estación de metro a lo largo de un domingo evoluciona según la función $N(x)=-2x^3+75x^2-600x+2000 \; con\, 0\le x<24$, donde x indica la hora del día.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de usuarios de la estación a lo largo del domingo.

b) ¿A qué hora el número de usuarios es máximo y a qué hora es mínimo? Calcular el número de usuarios correspondiente a dichas horas.

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$N'(x)=-6x^2+150x-600$$

$$N'(x)=0 \Rightarrow -6x^2+150x-600=0 \Rightarrow x^2-25x+100=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{25\pm\sqrt{(-25)^2-400}}{2}=\frac{25\pm 15}{2}=\begin{cases}\dfrac{25+15}{2}=\boxed{20=x}\\ \dfrac{25-15}{2}=\boxed{5=x}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $(0,5)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $N'(1)=-6+150-600=-456<0$. La función decrece en $(0,5)$.

En el intervalo $(5,20)$ tomamos *x = 10* y la derivada vale $N'(10)=-600+1500-600=300>0$. La función crece en $(5,20)$.

En el intervalo $(20,24)$ tomamos *x = 22* y la derivada vale $N'(22)=-6\cdot 22^2+150\cdot 22-600=-204<0$. La función decrece en $(20,24)$.

El número de usuarios decrece durante las primeras cinco horas y también entre las 20 y las 24 horas. Crece en las horas centrales, entre la hora 5 y la hora 20.

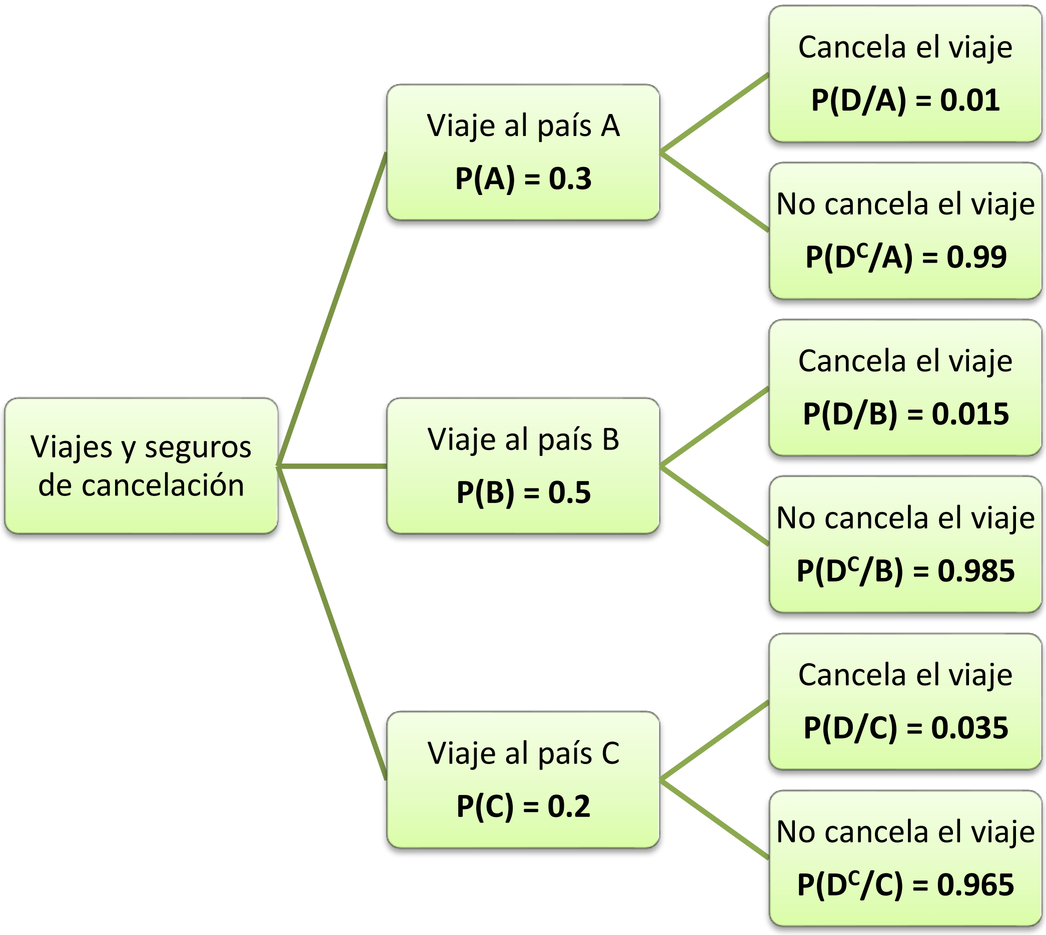
b) Por la evolución del número de usuarios en la hora 5 hay un mínimo relativo y en la hora 20 hay un máximo relativo. Valoramos el número de usuarios en estas horas intermedias y en los extremos del intervalo [0, 24) para decidir cuándo se produce el máximo y mínimo absolutos.

$$\left.\begin{array}{l} N(0)=2000 \\ N(5)=-2\cdot 5^3+75\cdot 5^2-600\cdot 5+2000=625 \text{ ¡Mínimo!} \\ N(20)=-2\cdot 20^3+75\cdot 20^2-600\cdot 20+2000=4000 \text{ ¡Máximo!} \\ N(24)=-2\cdot 24^3+75\cdot 24^2-600\cdot 24+2000=3152 \end{array}\right\}$$

El número máximo de usuarios es de 4000 y se produce en la hora 5 y el mínimo es de 625 y se produce a la hora 20.

P5. (Estadística y probabilidad)
Una compañía ofrece seguros de cancelación de viajes a destinos exóticos: el 30 % de sus seguros se contratan para viajar al país A, el 50 % para viajar al país B y el resto para viajar al país C. Según estudios previos, se cancela el viaje en el 1 % de los seguros contratados para el país A, el 1.5 % de los contratados para B y el 3.5 % de los contratados para C. Elegido un seguro al azar,
a) Calcular la probabilidad de que sea un viaje que se cancela.
b) Si es un seguro de un viaje cancelado, calcular la probabilidad de que haya sido contratado para viajar al país C.

Llamamos A "Viajar al país A", B = "Viajar al país B", C = "Viajar al país C" y D = "Cancelar un viaje".
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)=$$

$$=0.3\cdot 0.01+0.5\cdot 0.015+0.2\cdot 0.035=\boxed{0.0175}$$

b) Nos piden calcular $P(C/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

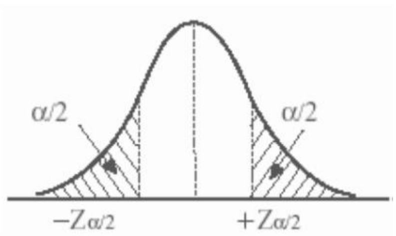
$$P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{P(C)P(D/C)}{P(D)}=\frac{0.2\cdot 0.035}{0.0175}=\boxed{0.4}$$

P6. (Estadística y probabilidad)
La distancia recorrida para ir a clase por los estudiantes de cierta universidad se distribuye según un modelo normal de media μ kilómetros y varianza 2.25. Se toma una muestra de 100 estudiantes, obteniéndose una distancia media de 4 kilómetros para esa muestra. Tomando esta información, se pide
a) Hallar el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 96 %.
b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que, al nivel de confianza del 95 %, el error máximo de estimación de la distancia media μ sea de 0.1 kilómetros?

X = La distancia recorrida para ir a clase por los estudiantes de cierta universidad (en km)
Como la varianza es 2.25 la desviación típica es $\sqrt{2.25} = 1.5$
X = N(μ, 1.5)
Tamaño muestra = n = 100. Media muestral = $\bar{x} = 4$.

a) Con un nivel de confianza del 96%

$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.055}$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846

Utilizamos la fórmula del error.

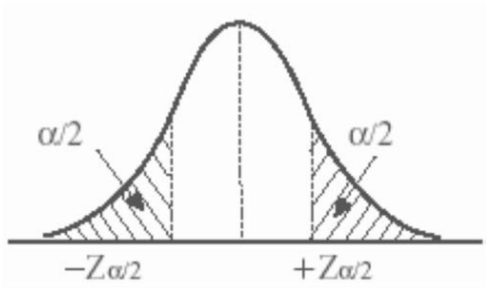
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{100}} = 0.30825$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(4 - 0.30825, 4 + 0.30825\right) = \left(3.69175, 4.30825\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 95%

$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea 0.1.
Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1 = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1\sqrt{n} = 1.96 \cdot 1.5 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 1.5}{0.1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 1.5}{0.1}\right)^2 = 864.36$$

Como *n* debe ser entero y superior al "*n*" hallado el tamaño mínimo es de 865 estudiantes.

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)
Dadas tres matrices A, B y C se sabe que $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de dimensiones 2×3 y que $B \cdot C$ es de dimensiones 4×3, determinar las dimensiones que debe tener A.

Si la matriz A es de dimensión $m \times n$ tenemos que $\overset{A \cdot \ B \cdot C}{\xrightarrow{m \times \boxed{n \ \cdot \ 4} \times 3}} m \times 3$.

Para poderse realizar el producto debe ser $n = 4$ y como el resultado debe ser una matriz 2×3 y obtenemos una matriz de dimensiones m ×3 se debe cumplir que $m = 2$.
La matriz A es de dimensiones 2×4.

C2. (Análisis)

Dada $f(x) = \frac{ax^2+1}{5x}$. Dar un valor de a para que en $x = 1$ haya un extremo relativo de. $f(x)$.

Si tiene un extremo debe de anularse la derivada, es decir, $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{ax^2+1}{5x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2ax \cdot 5x - 5(ax^2+1)}{(5x)^2} = \frac{10ax^2 - 5ax^2 - 5}{(5x)^2} = \frac{5ax^2-5}{(5x)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \frac{5ax^2-5}{(5x)^2} \\ f'(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5a-5}{(5)^2} = 0 \Rightarrow 5a - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Debe ser $a = 1$.

C3. (Estadística y probabilidad)
La ficha técnica de una encuesta electoral realizada para las pasadas elecciones autonómicas indica que se ha encuestado a 1000 individuos con derecho a voto residentes en Castilla y León. La muestra se ha tomado mediante muestreo aleatorio simple. El error de estimación de la proporción de individuos de la población que vota al *partido K* es de ± 3.2 % fijada una confianza del 95.5 %.
Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

Población: Residentes en Castilla y León con derecho a voto.
Diseño muestral: Muestreo aleatorio simple.
Tamaño muestral: n = 1000
Parámetro estimado: Proporción de la población que vota al partido K,