Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2022
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y)=8x+3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} -2x+4\geq y \\ x+2y\geq 2 \\ y\leq 3 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

2. El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15 Goyas. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los premios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos premios Goya han recibido cada una. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x+2t & si \ \ x<-1 \\ t+1 & si \ \ -1\leq x\leq 1 \\ -x^3+4x^2+3x-1 & si \ \ x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua $x = -1$? (0.5 puntos)
b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,\infty)$. (0.5 puntos)
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1,\infty)$. (0.5 puntos)

2. La función $f(x)=ax^3+bx+c$ presenta un mínimo en el punto (2, 1) y la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es –12. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un concurso se les proponen a los participantes 3 pruebas (A, B y C) de las que han de elegir una. El 40% de los participantes eligen la prueba A, superándola el 50% de estos. El 25% eligen la prueba B y en este caso la prueba no es superada por el 45% de los participantes. La prueba C la superan el 60% de los participantes que la escogen.
a) Elegido un participante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya superado la prueba? (0.75 puntos)
b) Si se sabe que un participante no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la prueba A? (0.75 puntos)

4. El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 6.4 minutos. Se ha tomado una muestra de 9 personas y los tiempos empleados en resolver el problema han sido 12, 11, 10, 9, 7, 12, 11, 8 y 10 minutos.
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo empleado en resolver el problema con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)
b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 3 minutos. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. Un concesionario de automóviles tiene en oferta tres modelos de coche: uno deportivo, otro familiar y el tercero es un monovolumen. El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851000 euros. El coche deportivo vale 2000 euros más que el familiar. Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio de cada uno de los tres modelos. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Resuelve la ecuación matricial $X + X\cdot\frac{1}{2}A = A\cdot B$. (1.5 puntos)

b) Calcula $-\frac{1}{2}A - 2B^T + C$. (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En un ejercicio de oposición, el opositor ha de presentar un tema de los cuatro que se seleccionan al azar de un programa de 40 temas. Si los cuatro temas seleccionados han de ser distintos y el opositor tiene bien preparados 22 temas,
a) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de aprobar el examen? (0.75 puntos)
b) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de saberse exactamente uno de los cuatro temas elegidos? (0.75 puntos)

6. Una marca de neumáticos ha tomado una muestra aleatoria de 100 ruedas y ha medido la presión de inflado, proporcionando una media de 2.3 bares. Si se sabe que la presión de inflado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 0.81$ bares^2.
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la presión de inflado con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)
b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)
c) La marca de neumáticos afirma que la media de presión de inflado es de 2 bares. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 90 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2+t & si\ x<-1\\ 3 & si\ -1\le x\le 2\\ x^2-6x+9+t & si\ x>2\end{cases}$

a) ¿Existe un valor de *t* para el que la función *f(x)* es continua en *x = –1* y en *x = 2*? (0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función *f(x)* para *t = 0.* (0.75 puntos)

6. El tiempo de publicidad (en minutos) en una emisora de radio a lo largo de la semana viene dado por la siguiente función $S(x)=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+36$ con *x = días* y $1\le x\le 7$.

a) ¿Cuántos minutos de publicidad emite el tercer día? (0.5 puntos)
b) ¿Durante qué día se emite más publicidad y cuánto tiempo? (0.75 puntos)
c) ¿Qué día emitieron menos publicidad? ¿Cuántos minutos? (0.75 puntos)

SOLUCIONES

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y)=8x+3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} -2x+4\geq y \\ x+2y\geq 2 \\ y\leq 3 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

a) Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$-2x+4=y$

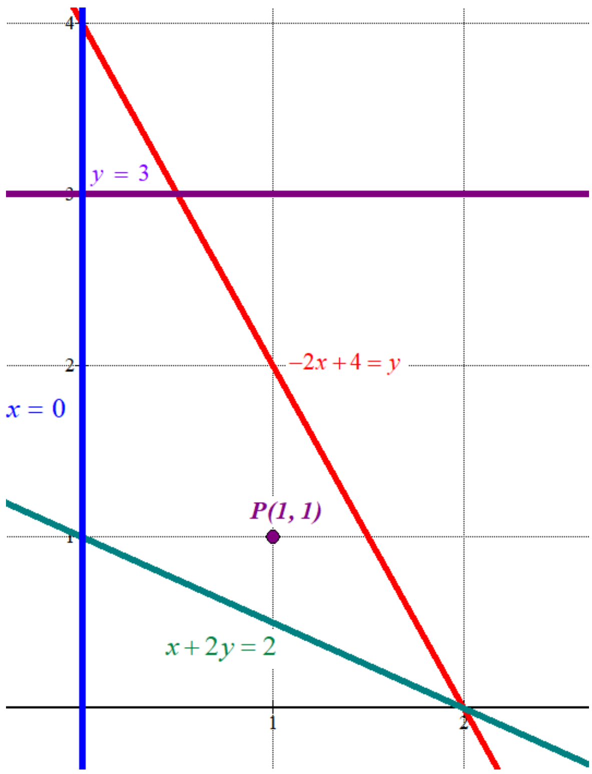
x	$y=-2x+4$
0	4
2	0

$x+2y=2$

x	$y=\frac{2-x}{2}$
0	1
2	0

$y=3$ Recta horizontal

$x=0$ Recta vertical

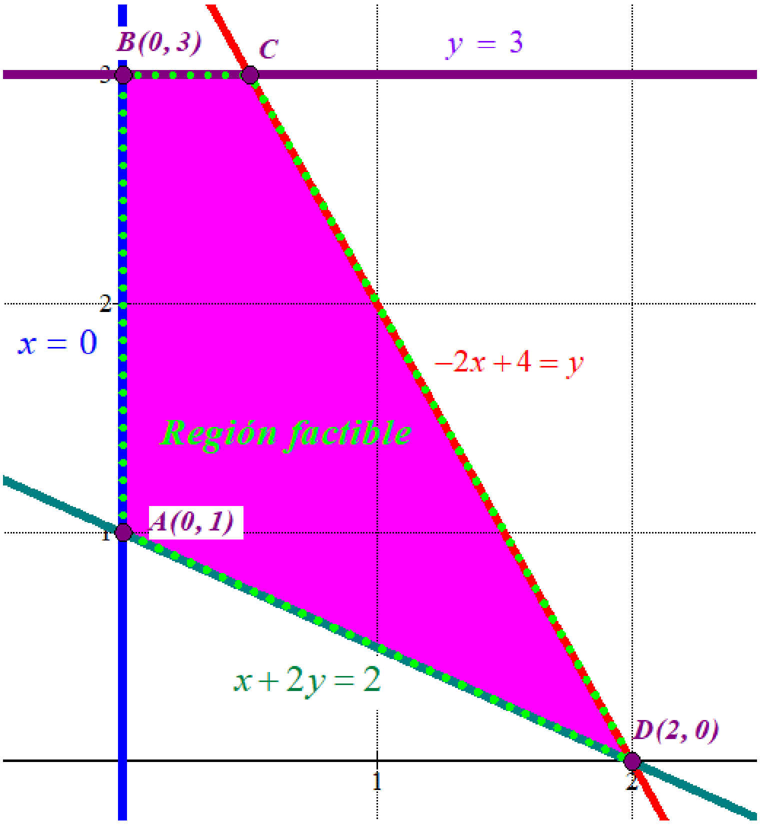


Como las restricciones son $\begin{cases} -2x+4\geq y \\ x+2y\geq 2 \\ y\leq 3 \\ x\geq 0 \end{cases}$ la región factible es la zona situada por debajo de la recta roja, por encima de la verde, a la derecha de la recta vertical azul y por debajo de la recta horizontal violeta.

Comprobamos si el punto P(1, 1) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\begin{cases} -2+4 \geq 1 \\ 1+2 \geq 2 \\ 1 \leq 3 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



Determinamos las coordenadas del vértice C.

$$C \to \begin{cases} -2x+4=y \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow -2x+4=3 \Rightarrow -2x=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{1}{2},3\right)}$$

Los vértices de la región factible son A(0, 1), B(0, 3), $C\left(\frac{1}{2},3\right)$ y D(2, 0).

b) Valoramos la función $f(x,y)=8x+3y$ en cada vértice de la región factible.

A(0, 1) → $f(0,1)=0+3=3$ ¡Mínimo!

B(0, 3) → $f(0,3)=0+9=9$

$C\left(\frac{1}{2},3\right)$ → $f\left(\frac{1}{2},3\right)=8\cdot\frac{1}{2}+9=13$

D(2, 0) → $f(2,0)=16+0=16$ ¡Máximo!

El máximo se produce en el vértice D(2, 0) y alcanza un valor de 16.

El mínimo se produce en el vértice A(0, 1) y alcanza un valor de 3.

2. El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15 Goyas. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los premios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos premios Goya han recibido cada una. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos x = número de premios Goya de Isabel; y = número de premios Goya de Carmen; z = número de premios Goya de Enma.

"El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15 Goyas" → $x+y+z=15$

"Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los premios ganados por Enma" → $x+1=3z$

"los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen" → $z=\frac{3}{4}y$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ x+1=3z \\ z=\frac{3}{4}y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ x-3z=-1 \\ z=\frac{3}{4}y \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ x-3z=-1 \\ z=\frac{3}{4}y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+\frac{3}{4}y=15 \\ x-3\frac{3}{4}y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+\frac{3y}{4}=15 \\ x-\frac{9y}{4}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+4y+3y=60 \\ 4x-9y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+7y=60 \\ 4x-9y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 4x+7y=60 \\ \boxed{\times(-1)} \rightarrow -4x+9y=4 \\ \hline 16y=64 \end{array} \Rightarrow \boxed{y=64/16=4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{3}{4}\cdot 4=3} \Rightarrow x+4+3=15 \Rightarrow \boxed{x=8}$$

Isabel ha recibido 8 premios Goya, Carmen 4 y Enma ha recibido 3 premios Goya.

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x+2t & si \ \ x<-1 \\ t+1 & si \ \ -1\leq x\leq 1 \\ -x^3+4x^2+3x-1 & si \ \ x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua $x=-1$? (0.5 puntos)
b) Calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo (1,∞). (0.5 puntos)
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en (1,∞). (0.5 puntos)

a) Para que la función sea continua en $x=-1$ se debe cumplir $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} 2x+2t=-2+2t \\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} t+1=t+1 \\ f(-1)=t+1 \\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow -2+2t=t+1 \Rightarrow \boxed{t=3}$$

El valor de *t* debe ser 3.

b) En el intervalo (1,∞) la función es $f(x)=-x^3+4x^2+3x-1$.
Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los posibles puntos críticos.

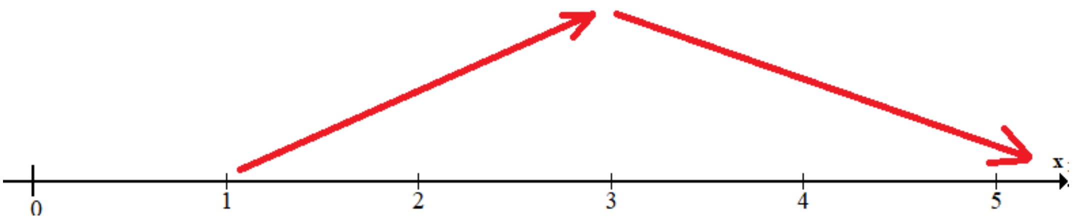
$$f(x)=-x^3+4x^2+3x-1 \Rightarrow f'(x)=-3x^2+8x+3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -3x^2+8x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2+36}}{-6}=\frac{-8\pm 10}{-6}=\begin{cases} \frac{-8+10}{-6}=\frac{-1}{3}\notin(1,\infty) \\ \frac{-8-10}{-6}=\boxed{3=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del valor obtenido.

En el intervalo (1, 3) tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=-3\cdot 2^2+8\cdot 2+3=7>0$.
La función crece en (1, 3).
En el intervalo (3, ∞) tomamos $x=10$ y la derivada vale $f'(10)=-300+80+3=-217<0$.
La función decrece en (3, ∞).

La función sigue el esquema siguiente:



La función tiene un máximo en $x=3$. Como $f(3)=-3^3+4\cdot 3^2+3\cdot 3-1=-27+36+9-1=17$, el punto máximo tiene coordenadas (3, 17).

c) Como se ha estudiado en el apartado anterior la función crece en (1, 3) y decrece en (3, +∞).

2. La función $f(x)=ax^3+bx+c$ presenta un mínimo en el punto (2, 1) y la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es –12. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 puntos)

Si la función $f(x)=ax^3+bx+c$ presenta un mínimo en el punto (2, 1) significa que $f(2) = 1$ y que $f'(2)=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^3+bx+c \\ f(2)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=a\cdot 2^3+2b+c \Rightarrow \boxed{8a+2b+c=1}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^3+bx+c \Rightarrow f'(x)=3ax^2+b \\ f'(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot 2^2+b \Rightarrow \boxed{12a+b=0}$$

Como la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es –12 tenemos que $f'(0)=-12$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+b \\ f'(0)=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow -12=3a\cdot 0^2+b \Rightarrow \boxed{b=-12}$$

Sustituimos el valor de b por –12 y resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones iniciales.

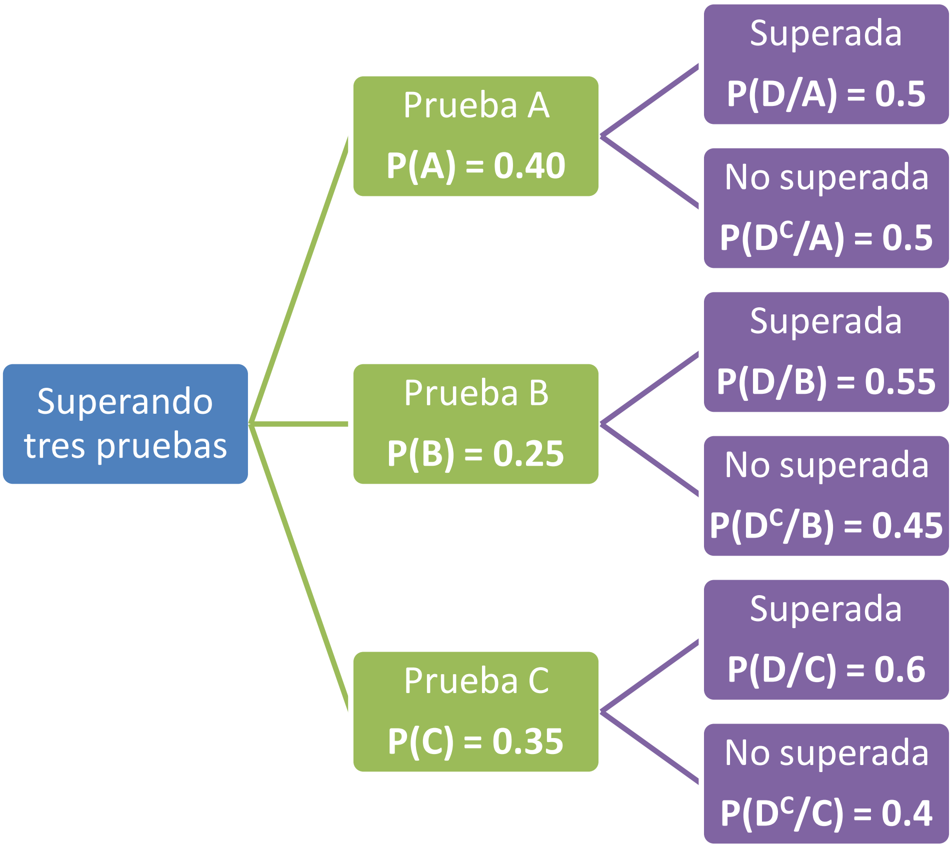
$$\left.\begin{array}{l} 8a+2b+c=1 \\ 12a+b=0 \\ \boxed{b=-12} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8a+2(-12)+c=1 \\ 12a-12=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8a-24+c=1 \\ 12a=12 \rightarrow \boxed{a=1} \end{array}\right\} \Rightarrow 8-24+c=1 \Rightarrow \boxed{c=17}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -12$ y $c = 17$.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un concurso se les proponen a los participantes 3 pruebas (A, B y C) de las que han de elegir una. El 40% de los participantes eligen la prueba A, superándola el 50% de estos. El 25% eligen la prueba B y en este caso la prueba no es superada por el 45% de los participantes. La prueba C la superan el 60% de los participantes que la escogen.
a) Elegido un participante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya superado la prueba? (0.75 puntos)
b) Si se sabe que un participante no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la prueba A? (0.75 puntos)

Llamamos A = "Elegir la prueba A", B = "Elegir la prueba B", C = "Elegir la prueba C" y D = "superar la prueba".
La prueba C la eligen 100 – 40 – 25 = 35% de los participantes.
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)=$$

$$=0.4\cdot 0.5+0.25\cdot 0.55+0.35\cdot 0.6=\boxed{0.5475}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^C)=\frac{P(A\cap D^C)}{P(D^C)}=\frac{P(A)P(D^C/A)}{1-P(D)}=\frac{0.4\cdot 0.5}{1-0.5475}=\boxed{\frac{80}{181}\simeq 0.442}$$

4. El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 6.4 minutos. Se ha tomado una muestra de 9 personas y los tiempos empleados en resolver el problema han sido 12, 11, 10, 9, 7, 12, 11, 8 y 10 minutos.
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo empleado en resolver el problema con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)
b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 3 minutos. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

X = El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística.
Desviación típica = σ = 6.4 minutos
X = N(μ,6.4)

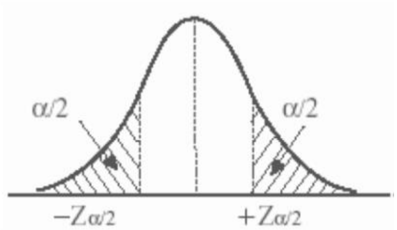
$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{12+11+10+9+7+12+11+8+10}{9} = 10 \text{ minutos}$$

Tamaño de la muestra = n = 9

a) Con un nivel de confianza del 97 %

$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{6.4}{\sqrt{9}} = 4.629 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (10 - 4.629, 10 + 4.629) = (5.371, 14.629)$$

b) Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3 = 2.17 \cdot \frac{6.4}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3\sqrt{n} = 2.17 \cdot 6.4 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.17 \cdot 6.4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{2.17 \cdot 6.4}{3}\right)^2 \simeq \boxed{21.43}$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y mayor que 21.43 debemos tomar un mínimo de 22 personas para tener un error menor de 3 minutos.

Bloque 2

3. Un concesionario de automóviles tiene en oferta tres modelos de coche: uno deportivo, otro familiar y el tercero es un monovolumen. El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851000 euros. El coche deportivo vale 2000 euros más que el familiar. Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio de cada uno de los tres modelos. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos x = precio del deportivo; y = precio del familiar; z = precio del monovolumen**.**

"El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851000 euros**"** → $10x+6y+3z=851000$
"El coche deportivo vale 2000 euros más que el familiar**"** → $x=y+2000$
"Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes**"** → $5x=6z+13000$

Juntamos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 10x+6y+3z=851000 \\ x=y+2000 \\ 5x=6z+13000 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 10x+6y+3z=851000 \\ x=y+2000 \\ 5x=6z+13000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10(y+2000)+6y+3z=851000 \\ 5(y+2000)=6z+13000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10y+20000+6y+3z=851000 \\ 5y+10000=6z+13000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 16y+3z=831000 \\ 5y-6z=3000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{\times 2} \to 32y+6z=1662000 \\ 5y-6z=3000 \end{array}\right\}$$

$$37y \quad =1665000 \to \boxed{y=1665000/37=45000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=45000+2000=47000} \Rightarrow 470000+270000+3z=851000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z=111000 \Rightarrow \boxed{z=\frac{111000}{3}=37000}$$

Un coche deportivo cuesta 47000 €, uno familiar 45000 y un monovolumen 37000 €.

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

a) Resuelve la ecuación matricial $X+X\cdot\frac{1}{2}A=A\cdot B$. (1.5 puntos)

b) Calcula $-\frac{1}{2}A-2B^T+C$. (0.5 puntos)

a) Despejamos X en la ecuación.

$$X+X\cdot\frac{1}{2}A=A\cdot B\Rightarrow X\left(I+\frac{1}{2}A\right)=A\cdot B\Rightarrow X=A\cdot B\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}$$

Comprobamos que la matriz $I+\frac{1}{2}A$ es invertible y determinamos su inversa.

$$I+\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\left|I+\frac{1}{2}A\right|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2+1=-1\neq 0. \text{ Existe la inversa.}$$

$$\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(I+\frac{1}{2}A\right)^T\right)}{\left|I+\frac{1}{2}A\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Aplicamos este resultado a terminar de resolver la ecuación matricial.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & -8\\ -30 & -2-24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & -8\\ -30 & -26\end{pmatrix}$$

$$X=A\cdot B\left(I-\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-10 & -8\\ -30 & -26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20-8 & 10+8\\ -60-26 & 30+26\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-28 & 18\\ -86 & 56\end{pmatrix}=X}$$

b)

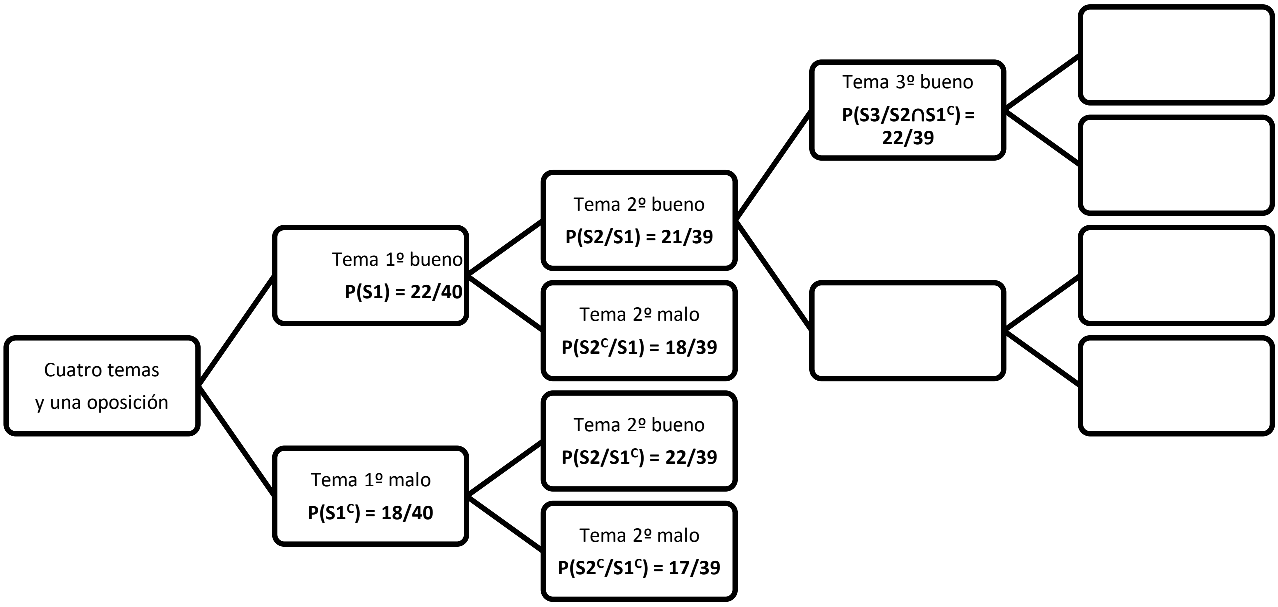
$$-\frac{1}{2}A-2B^T+C=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -10\\ 2 & -8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}A-2B^T+C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}}$$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En un ejercicio de oposición, el opositor ha de presentar un tema de los cuatro que se seleccionan al azar de un programa de 40 temas. Si los cuatro temas seleccionados han de ser distintos y el opositor tiene bien preparados 22 temas,
a) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de aprobar el examen? (0.75 puntos)
b) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de saberse exactamente uno de los cuatro temas elegidos? (0.75 puntos)

El opositor se sabe 22 de los 40 temas y no se sabe los 18 restantes.
Llamamos S1 = "Sale un primer tema que sabe" y $S1^C$ = "Sale un primer tema que no sabe" y así sucesivamente S2, S3 y S4.
Realizamos un diagrama de árbol.



Es muy laborioso construir el diagrama. Pero nos permite analizar la situación y tener claro cómo funciona el experimento compuesto que nos plantean.
Debemos de tener en cuenta en que cada elección de un tema influye en las siguientes habiendo un tema menos para elegir: 40, 39, 38 y 37.

a) Calculamos la probabilidad de que no le salga ningún tema de los que sabe (es más sencillo con el suceso contrario).

$$P\left(S1^C \cap S2^C \cap S3^C \cap S4^C\right) =$$

$$= P\left(S1^C\right) P\left(S2^C / S1^C\right) P\left(S3^C / \left(S1^C \cap S2^C\right)\right) P\left(S4^C / \left(S1^C \cap S2^C \cap S3^C\right)\right) =$$

$$= \frac{18}{40} \cdot \frac{17}{39} \cdot \frac{16}{38} \cdot \frac{15}{37} = \frac{306}{9139} \simeq 0.033$$

Como la probabilidad de que no salga ningún tema de los que se sabe es $\frac{306}{9139}$ entonces la probabilidad de que salga alguno de los que sabe es $1 - \frac{306}{9139} = \frac{8833}{9139} \simeq 0.967$.

b) Si debe de saberse solo uno de los cuatro temas que se eligen, este puede ser el primero, el segundo, el tercero o el cuarto, no sabiéndose los otros tres.

$$P(\text{Saberse solo uno de los 4 temas}) = P\left(S1 \cap S2^C \cap S3^C \cap S4^C\right) + P\left(S1^C \cap S2 \cap S3^C \cap S4^C\right) +$$

$$+P\left(S1^C \cap S2^C \cap S3 \cap S4^C\right) + P\left(S1^C \cap S2^C \cap S3^C \cap S4\right) =$$

$$= \frac{22}{40}\cdot\frac{18}{39}\cdot\frac{17}{38}\cdot\frac{16}{37} + \frac{18}{40}\cdot\frac{22}{39}\cdot\frac{17}{38}\cdot\frac{16}{37} + \frac{18}{40}\cdot\frac{17}{39}\cdot\frac{22}{38}\cdot\frac{16}{37} + \frac{18}{40}\cdot\frac{17}{39}\cdot\frac{16}{38}\cdot\frac{22}{37} =$$

$$= 4\frac{22}{40}\cdot\frac{18}{39}\cdot\frac{17}{38}\cdot\frac{16}{37} = \boxed{\frac{8976}{45695} \simeq 0.196}$$

6. Una marca de neumáticos ha tomado una muestra aleatoria de 100 ruedas y ha medido la presión de inflado, proporcionando una media de 2.3 bares. Si se sabe que la presión de inflado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 0.81$ bares^2.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la presión de inflado con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)

c) La marca de neumáticos afirma que la media de presión de inflado es de 2 bares. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 90 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

X = La presión de inflado de ruedas.

Desviación típica = $\sigma = \sqrt{0.81} = 0.9$ bares

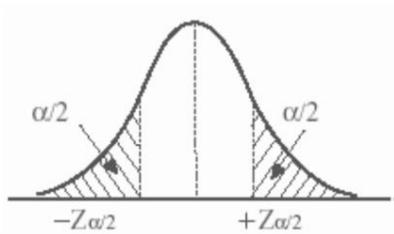
X = N(μ, 0.9)

$Media\ muestral = \bar{x} = 2.3$ bares. Tamaño de la muestra = n = 100

a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	$\boxed{0.9750}$	0.9756	0.9761	0.9767



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{100}} = 0.1764$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(2.3 - 0.1764,\ 2.3 + 0.1764\right) = \left(2.1236,\ 2.4764\right)$$

b) Si disminuimos el tamaño de la muestra (n) el error o amplitud del intervalo de confianza será mayor, pues $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

c) El valor de 2 bares no está en el intervalo $\left(2.1236,\ 2.4764\right)$ calculado al 95 %, como al disminuir el nivel de confianza disminuye la amplitud del intervalo, el valor de 2 bares tampoco estará en el Intervalo de confianza al 90% y por lo tanto no se puede aceptar la afirmación.

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2+t & si\ x<-1\\ 3 & si\ -1\le x\le 2\\ x^2-6x+9+t & si\ x>2\end{cases}$

a) ¿Existe un valor de *t* para el que la función *f(x)* es continua en *x = –1* y en *x = 2*? (0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función *f(x)* para *t = 0.* (0.75 puntos)

a) Para que la función sea continua en *x = –1* se debe cumplir $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(x+2)^2+t=(-1+2)^2+t=1+t\\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}3=3\\ f(-1)=3\\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)\end{array}\right\}\Rightarrow 3=t+1\Rightarrow \boxed{t=2}$$

Para que la función sea continua en *x = 2* se debe cumplir $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}3=3\\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}x^2-6x+9+t=4-12+9+t=1+t\\ f(2)=3\\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\end{array}\right\}\Rightarrow 3=t+1\Rightarrow \boxed{t=2}$$

El valor de *t* debe ser 2.

b) Para *t = 0* la función queda $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x<-1\\ 3 & si\ -1\le x\le 2\\ x^2-6x+9 & si\ x>2\end{cases}$

Es una función definida a trozos, siendo un trozo de parábola antes de –1, un trozo de recta horizontal entre –1 y 2, y otro trozo de parábola después de 2.
Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica.

$si\ x<-1$

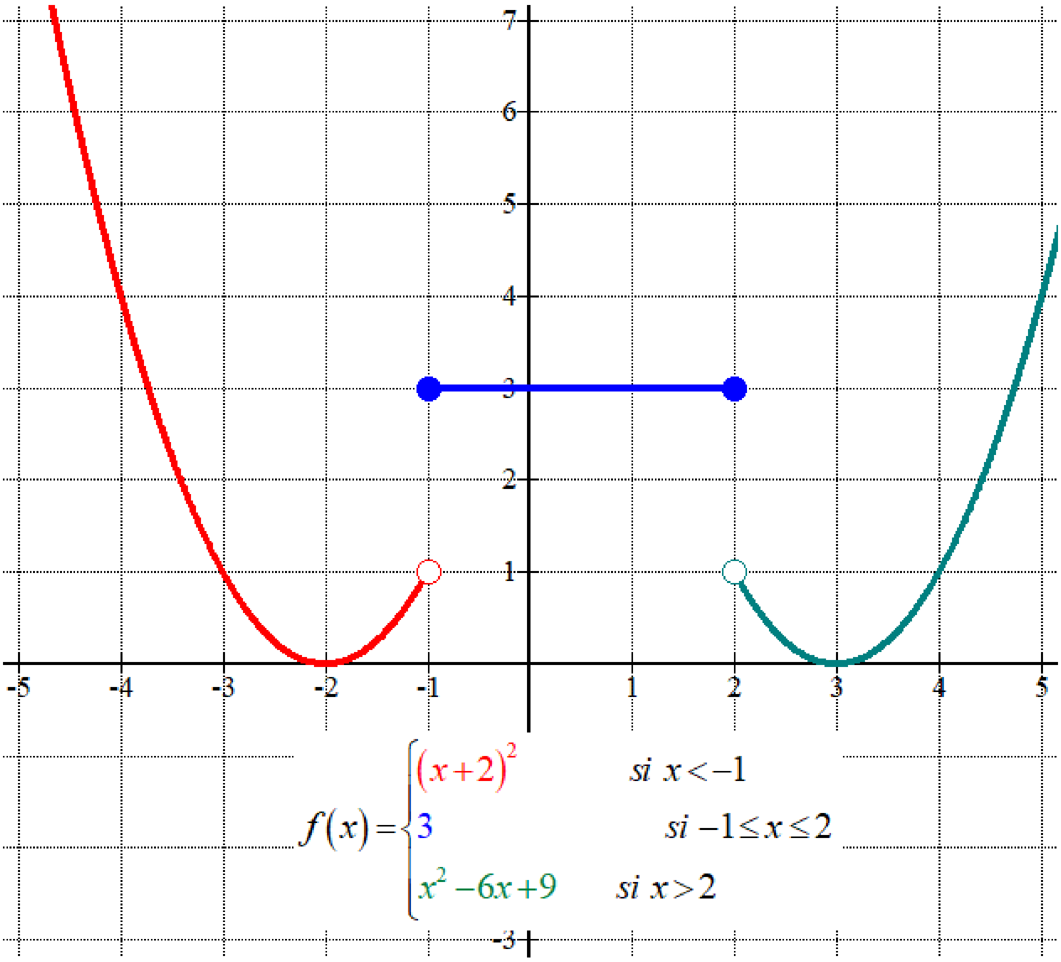
x	$y=(x+2)^2$
–3	1
–2	0
–1	1Punto vacío

$si\ -1\le x\le 2$

x	$y=3$
–1	3
0	3
2	3

$si\ x>2$

x	$y=x^2-6x+9$
2	1Punto vacío
3	0
4	1



$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x<-1\\ 3 & si\ -1\le x\le 2\\ x^2-6x+9 & si\ x>2\end{cases}$$

6. El tiempo de publicidad (en minutos) en una emisora de radio a lo largo de la semana viene dado por la siguiente función $S(x)=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+36$ con x = *días* y $1\leq x\leq 7$.

a) ¿Cuántos minutos de publicidad emite el tercer día? (0.5 puntos)
b) ¿Durante qué día se emite más publicidad y cuánto tiempo? (0.75 puntos)
c) ¿Qué día emitieron menos publicidad? ¿Cuántos minutos? (0.75 puntos)

a) Nos piden calcular S(3).

$$S(3)=3^3-\frac{21}{2}\cdot 3^2+30\cdot 3+36=58.5.$$

El miércoles se emiten 58.5 minutos.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$S(x)=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+36 \Rightarrow S'(x)=3x^2-21x+30$$

$$S'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-21x+30=0 \Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{7+3}{2}=5=x\\ \frac{7-3}{2}=2=x\end{cases}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos estos valores para decidir si son máximos o mínimos.

$$S'(x)=3x^2-21x+30 \Rightarrow S''(x)=6x-21 \Rightarrow \begin{cases}S''(2)=-9<0 \to \text{Máximo relativo}\\ S''(5)=9>0 \to \text{Mínimo relativo}\end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo [1, 7] y en los puntos que son máximo y mínimo relativo: $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$ y $x = 7$ para decidir donde se alcanza el máximo y mínimo absoluto de emisión de publicidad.

$$S(1)=1^3-\frac{21}{2}1^2+30+36=56.5$$

$$S(2)=2^3-\frac{21}{2}2^2+60+36=62$$

$$S(5)=5^3-\frac{21}{2}5^2+150+36=48.5 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$S(7)=7^3-\frac{21}{2}7^2+210+36=74.5 \text{ ¡Máximo!}$$

Se emite más publicidad el séptimo día. Se emiten 74.5 minutos.

c) Observando lo estudiado en el apartado anterior tenemos que el día que se emitió menos publicidad fue el quinto día. Se emitieron 48.5 minutos.