Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. La siguiente tabla muestra los ingresos, en miles de euros, de una tienda que dispone de tres locales, durante los meses de enero, febrero y marzo de 2020.

	Enero	Febrero	Marzo
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Se ha recogido la información anterior en la matriz ***A***, en la que cada fila indica un local y cada columna el mes correspondiente:

$$A=\begin{pmatrix}13,5 & 13,2 & 4,2\\ 11 & 12,5 & 3,8\\ 15 & 14 & 2,7\end{pmatrix}$$

a) Considere los vectores v = (1 1 1) y $w=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Realice las operaciones v ·A y A·w. Interprete en cada caso el resultado obtenido. [1,25 puntos]

b) La matriz B recoge los resultados del siguiente trimestre, es decir, los ingresos correspondientes a los meses de abril, mayo y junio de 2020:

$$B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 4\\ 2 & 7 & 5\\ 4 & 11 & x\end{pmatrix}$$

Se desconoce el dato correspondiente al mes de junio del local 3, que se ha denominado *x*, pero se sabe que el rango de la matriz ***B*** es 2. Encuentre el valor de *x*. [1,25 puntos]

2. Filomena hace una fiesta e invita a sus amigos a comer un pastel. Ha ido a la tienda y ha comprado una docena de huevos, una bolsa de harina de almendra y un paquete de azúcar moreno. La fiesta ha sido un éxito y decide repetir el encuentro y volver a hacer el pastel. Vuelve a la tienda y compra otra docena de huevos y dos bolsas de harina de almendra. Pero una vez en casa se da cuenta de que no tiene nada de azúcar. Vuelve a la tienda y compra un paquete de azúcar moreno y también otra docena de huevos. La primera compra le costó 6 €, la segunda 6,5 € y la última 3,5 €.

a) Plantee un sistema de ecuaciones con los datos del problema. [0,75 puntos]

b) Calcule el precio de una docena de huevos, el de una bolsa de harina de almendra y el de un paquete de azúcar moreno. [1,75 puntos]

3. Un restaurante que acaba de abrir quiere poner anuncios en la radio y en la televisión locales durante una semana para darse a conocer y aumentar así el número de clientes. Tiene un presupuesto máximo de 18.000 euros. Cada anuncio en la radio cuesta 1.000 euros y el contrato prevé que como mínimo hay que hacer 3. Cada anuncio en la televisión cuesta 3.000 euros y, por disponibilidad de programación, pueden hacerse como máximo 4. Se estima que cada anuncio en la radio supone un incremento de 10 clientes para el restaurante y que cada anuncio en la televisión supone un incremento de 60 clientes.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) Calcule cuántos anuncios tendrá que poner en la radio y cuántos en la televisión para que el número de nuevos clientes sea máximo. ¿Cuántos clientes nuevos obtendrá? [1,25 puntos]

4. La función $C(t)=3-\dfrac{1}{t^2-4t+5}$, en la que *t* son los años transcurridos y *C(t)* la cantidad de clientes, expresada en miles, modeliza la evolución de una empresa que ha entrado en crisis.

a) Calcule cuántos clientes tenía la empresa en el momento inicial y cuántos tenía un año después. [0,5 puntos]

b) Encuentre el instante en el que la empresa deja de perder clientes y calcule cuántos clientes tiene en ese instante. [1 punto]

c) Calcule cuánto tiempo tendrá que pasar para que la empresa consiga tener de nuevo el mismo número de clientes que en el momento de iniciar el estudio. [1 punto]

5. Una empresa pone a la venta un producto que distribuye en cajas. El beneficio *B* obtenido por la empresa, expresado en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x)=-x^2+16x-55$, donde $x>0$ es el precio de venta de cada caja, expresado en euros.

a) ¿Qué beneficio obtendrá si el precio de venta de cada caja es de 6 euros? ¿Entre qué valores hay que fijar el precio de venta de una caja para obtener beneficios? [1,25 puntos]

b) ¿A qué precio tiene que vender cada caja para que el beneficio sea lo más grande posible? ¿Cuál es ese beneficio máximo? [1,25 puntos]

6. Considere la función $f(x)=px^3-4x^2+7px-18$.

a) Calcule cuál tiene que ser el valor del parámetro *p* para que las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas. [1,25 puntos]

b) Escriba la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ para el valor de $p = 2$. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. La siguiente tabla muestra los ingresos, en miles de euros, de una tienda que dispone de tres locales, durante los meses de enero, febrero y marzo de 2020.

	Gener	Febrer	Març
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Se ha recogido la información anterior en la matriz ***A***, en la que cada fila indica un local y cada columna el mes correspondiente:

$$A=\begin{pmatrix}13,5 & 13,2 & 4,2\\ 11 & 12,5 & 3,8\\ 15 & 14 & 2,7\end{pmatrix}$$

a) Considere los vectores v = (1 1 1) y $w=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Realice las operaciones v ·A y A·w. Interprete en cada caso el resultado obtenido. [1,25 puntos]

b) La matriz B recoge los resultados del siguiente trimestre, es decir, los ingresos correspondientes a los meses de abril, mayo y junio de 2020:

$$B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 4\\ 2 & 7 & 5\\ 4 & 11 & x\end{pmatrix}$$

Se desconoce el dato correspondiente al mes de junio del local 3, que se ha denominado *x*, pero se sabe que el rango de la matriz ***B*** es 2. Encuentre el valor de *x*. [1,25 puntos]

a)

$$v\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13,5 & 13,2 & 4,2\\ 11 & 12,5 & 3,8\\ 15 & 14 & 2,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13,5+11+15 & 13,2+12,5+14 & 4,2+3,8+2,7\end{pmatrix}$$

$$v\cdot A=\begin{pmatrix}39,5 & 39,7 & 10,7\end{pmatrix}$$

El vector tiene unos elementos que se corresponden con los ingresos totales en miles de euros del conjunto de los tres locales en los meses de enero (39,5), febrero (39,7) y marzo (10,7) de 2020.

$$A\cdot w=\begin{pmatrix}13,5 & 13,2 & 4,2\\ 11 & 12,5 & 3,8\\ 15 & 14 & 2,7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13,5+13,2+4,2\\ 11+12,5+3,8\\ 15+14+2,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30,9\\27,3\\31,7\end{pmatrix}$$

En esta matriz aparecen los ingresos totales durante los tres meses en cada uno de los locales.

b) Calculamos el determinante de B y vemos cuando se anula.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{vmatrix} = 14x + 120 + 88 - 112 - 12x - 110 = 2x - 14$$

$$|B| = 0 \Rightarrow 2x - 14 = 0 \Rightarrow x = 7$$

Para $x = 7$ el determinante de B es nulo y por tanto su rango no es 3.

¿El rango de B es 2 para $x = 7$?

La matriz B queda $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}$ y de ella podemos extraer un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo quitando la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2 \neq 0$

Queda demostrado que el rango de la matriz B para $x = 7$ no es 3 (detB = 0) y si es 2.

2. Filomena hace una fiesta e invita a sus amigos a comer un pastel. Ha ido a la tienda y ha comprado una docena de huevos, una bolsa de harina de almendra y un paquete de azúcar moreno. La fiesta ha sido un éxito y decide repetir el encuentro y volver a hacer el pastel. Vuelve a la tienda y compra otra docena de huevos y dos bolsas de harina de almendra. Pero una vez en casa se da cuenta de que no tiene nada de azúcar. Vuelve a la tienda y compra un paquete de azúcar moreno y también otra docena de huevos. La primera compra le costó 6 €, la segunda 6,5 € y la última 3,5 €.
a) Plantee un sistema de ecuaciones con los datos del problema. [0,75 puntos]
b) Calcule el precio de una docena de huevos, el de una bolsa de harina de almendra y el de un paquete de azúcar moreno. [1,75 puntos]

a) Llamamos *x, y, z* al precio de una docena de huevos, una bolsa de harina y un paquete de azúcar moreno, respectivamente.

"*Compra una docena de huevos, una bolsa de harina y un paquete de azúcar por 6 €*" → $x+y+z=6$

"*Compra una docena de huevos y dos bolsas de harina por 6,5 €*" → $x+2y=6.5$

"*Compra una docena de huevos y un paquete de azúcar por 3,5 €*" → $x+z=3.5$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+2y=6.5 \\ x+z=3.5 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+2y=6.5 \\ x+z=3.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+2y=6.5 \\ x=3.5-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3.5-z+y+z=6 \\ 3.5-z+2y=6.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=6-3.5 \\ -z+2y=6.5-3.5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{y=2.5} \\ -z+2y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow -z+5=3 \Rightarrow \boxed{z=2} \Rightarrow \boxed{x=3.5-2=1.5}$$

El precio de una docena de huevos es de 1.5 €, el de una bolsa de harina de almendra es 2.5 € y el de un paquete de azúcar moreno es de 2 €.

3. Un restaurante que acaba de abrir quiere poner anuncios en la radio y en la televisión locales durante una semana para darse a conocer y aumentar así el número de clientes. Tiene un presupuesto máximo de 18.000 euros. Cada anuncio en la radio cuesta 1.000 euros y el contrato prevé que como mínimo hay que hacer 3. Cada anuncio en la televisión cuesta 3.000 euros y, por disponibilidad de programación, pueden hacerse como máximo 4. Se estima que cada anuncio en la radio supone un incremento de 10 clientes para el restaurante y que cada anuncio en la televisión supone un incremento de 60 clientes.
a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
b) Calcule cuántos anuncios tendrá que poner en la radio y cuántos en la televisión para que el número de nuevos clientes sea máximo. ¿Cuántos clientes nuevos obtendrá? [1,25 puntos]

a) Llamamos "x" al número de anuncios en la radio e "y" al número de anuncios en la televisión.

Realizamos una tabla con los datos.

	Nº clientes nuevos	Coste
Nº anuncios radio (x)	*10x*	*1000x*
Nº anuncios TV (y)	*60y*	*3000y*
TOTALES	$10x+60y$	$1000x+3000y$

La función objetivo es el número de clientes nuevos $f(x,y)=10x+60y$. Deseamos maximizar esta función.

Las restricciones son:

"*Disponemos de un presupuesto de 18000 €*" → $1000x+3000y\leq 18000$
"Debemos de hacer, al menos, 3 anuncios en la radio" → $x\geq 3$
"Podemos hacer como máximo 4 anuncios en la TV" → $y\leq 4$
Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 1000x+3000y\leq 18000 \\ x\geq 3 \\ y\leq 4 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y\leq 18 \\ x\geq 3 \\ y\leq 4 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas al sistema de inecuaciones.

$x+3y=18$

x	$y=\dfrac{18-x}{3}$
6	4
3	5

$x=3$

$x=3$	y
3	5
3	4

$y=4$

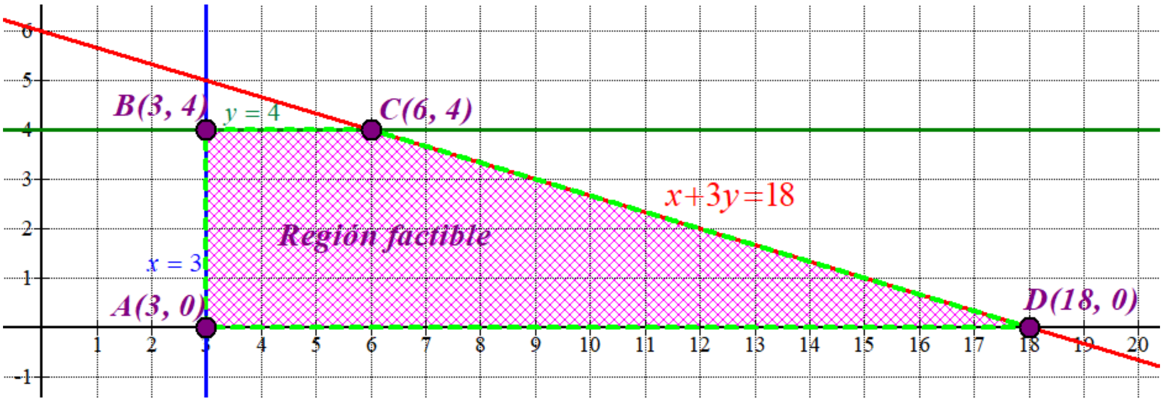
x	$y=4$
3	4
6	4

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+3y\leq 18 \\ x\geq 3 \\ y\leq 4 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región del plano que cumple estas restricciones es la región del primer cuadrante situada por debajo de la recta roja y la recta horizontal verde y a la derecha de la recta vertical azul.

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo y marcamos los vértices.



b) La función objetivo es el número de clientes nuevos que viene reflejada en la expresión dependiente del número de anuncios en radio y TV como $f(x,y)=10x+60y$.

Valoramos la función en cada vértice.

A(3, 0) → $f(3,0)=30$

B(3, 4) → $f(3,4)=30+240=270$

A(6, 4) → $f(6,4)=60+240=300$ ¡¡MÁXIMO!!

A(18, 0) → $f(18,0)=180$

El número máximo de clientes nuevos es 300 y se consigue con 6 anuncios de radio y 4 de TV.

4. La función $C(t)=3-\frac{1}{t^2-4t+5}$, en la que *t* son los años transcurridos y *C(t)* la cantidad de clientes, expresada en miles, modeliza la evolución de una empresa que ha entrado en crisis.
a) Calcule cuántos clientes tenía la empresa en el momento inicial y cuántos tenía un año después. [0,5 puntos]
b) Encuentre el instante en el que la empresa deja de perder clientes y calcule cuántos clientes tiene en ese instante. [1 punto]
c) Calcule cuánto tiempo tendrá que pasar para que la empresa consiga tener de nuevo el mismo número de clientes que en el momento de iniciar el estudio. [1 punto]

a) En el momento *t = 0* el número de clientes es $C(0)=3-\frac{1}{0^2-0+5}=3-\frac{1}{5}=2.8$, lo que significa 2800 clientes. En el momento *t = 1* el número de clientes es $C(1)=3-\frac{1}{1^2-4+5}=3-\frac{1}{2}=2.5$, lo que significa 2500 clientes al cabo de 1 año.

b) Averiguamos cuando la función deja de decrecer utilizando la derivada.

$$C(t)=3-\frac{1}{t^2-4t+5}\Rightarrow C'(t)=0-\frac{0-(2t-4)}{(t^2-4t+5)^2}=\frac{-4+2t}{(t^2-4t+5)^2}$$

$$C'(t)=0\Rightarrow\frac{-4+2t}{(t^2-4t+5)^2}=0\Rightarrow -4+2t=0\Rightarrow t=2$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de *t = 2*.

- En $(0,2)$ tomamos *t = 1* y la derivada vale $C'(1)=\frac{-4+2}{(1^2-4+5)^2}=\frac{-2}{4}<0$. La función decrece en $(0,2)$.
- En $(2,+\infty)$ tomamos *t = 3* y la derivada vale $C'(3)=\frac{-4+6}{(3^2-12+5)^2}=\frac{2}{4}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

El número de clientes decrece los dos primeros años y a partir del segundo año empiezan a crecer, siendo en este momento $C(2)=3-\frac{1}{2^2-8+5}=3-\frac{1}{1}=2$, es decir, 2000 clientes.

c) Igualamos la función a 2.8 para ver cuando vuelve a tener 2800 clientes como en el momento inicial.

$$C(t)=3-\frac{1}{t^2-4t+5}=2.8\Rightarrow\frac{1}{t^2-4t+5}=0.2\Rightarrow\frac{1}{t^2-4t+5}=\frac{1}{5}\Rightarrow t^2-4t+5=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-4t=0\Rightarrow t(t-4)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ t-4=0\Rightarrow\boxed{t=4}\end{cases}$$

En el cuarto año se vuelve a tener los 2800 clientes del momento inicial.

5. Una empresa pone a la venta un producto que distribuye en cajas. El beneficio B obtenido por la empresa, expresado en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, donde $x > 0$ es el precio de venta de cada caja, expresado en euros.
a) ¿Qué beneficio obtendrá si el precio de venta de cada caja es de 6 euros? ¿Entre qué valores hay que fijar el precio de venta de una caja para obtener beneficios? [1,25 puntos]
b) ¿A qué precio tiene que vender cada caja para que el beneficio sea lo más grande posible? ¿Cuál es ese beneficio máximo? [1,25 puntos]

a) Nos piden calcular *B(6)*.

$$B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = 5$$

El beneficio con un precio de 6 euros por cada caja es de 5000 euros.

Nos piden que precio hay que fijar para obtener beneficios. Es decir, a partir de que *x* se tiene que *B(x) > 0*.

Vemos cuando se anula la función beneficio.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 16x - 55 = 0 \Rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(-1)(-55)}}{-2}$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(-1)(-55)}}{-2} = \frac{-16 \pm 6}{-2} = \begin{cases} \frac{-16+6}{-2} = 5 \\ \frac{-16-6}{-2} = 11 \end{cases}$$

El beneficio es nulo para un precio de 5 euros y de 11 euros.
Veamos como evoluciona el beneficio antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(0,5)$ tomamos $x = 1$ y el beneficio es $B(1) = -1^2 + 16 - 55 = -40 < 0$
- En $(5,11)$ tomamos $x = 6$ y el beneficio es $B(6) = 5 > 0$
- En $(11,+\infty)$ tomamos $x = 20$ y el beneficio es $B(20) = -20^2 + 320 - 55 = -135 < 0$

El beneficio es positivo en el intervalo de precio de la caja de 5 a 11 euros.

b) Nos piden determinar el máximo de la función beneficio.
Derivamos la función e igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55 \Rightarrow B'(x) = -2x + 16$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 16 = 0 \Rightarrow -2x = -16 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

Vemos si el punto crítico es máximo o mínimo sustituyendo el valor en la segunda derivada.

$$B'(x) = -2x + 16 \Rightarrow B''(x) = -2$$
$$B''(8) = -2 < 0$$

El beneficio tiene un máximo relativo en *x = 8*.
El beneficio máximo es de $B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9$, es decir, de 9000 euros.

6. Considere la función $f(x) = px^3 - 4x^2 + 7px - 18$.

a) Calcule cuál tiene que ser el valor del parámetro *p* para que las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas *x* = 1 y *x* = 3 sean paralelas. [1,25 puntos]

b) Escriba la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa *x* = 3 para el valor de *p = 2*. [1,25 puntos]

a) Para que las rectas tangentes a la curva sean paralelas deben de tener la misma pendiente y para ello la derivada de la función en ambos valores debe ser igual, es decir, *f ´(3) = f ´(1)*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = px^3 - 4x^2 + 7px - 18 \Rightarrow f'(x) = 3px^2 - 8x + 7p \\ f'(3) = f'(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3p(3)^2 - 24 + 7p = 3p(1)^2 - 8 + 7p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27p - 24 + 7p = 3p - 8 + 7p \Rightarrow 24p = 16 \Rightarrow \boxed{p = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}}$$

El valor buscado es *p = 2/3*.

b) Para *p = 2* la función es $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 14x - 18$.

La ecuación de la recta tangente a la curva en *x = 3* tiene ecuación $y - f(3) = f'(3)(x-3)$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 14x - 18 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 8x + 14 \\ f(3) = 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 14 \cdot 3 - 18 = 42 \\ f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 14 = 44 \\ y - f(3) = f'(3)(x-3) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 42 = 44(x-3) \Rightarrow \boxed{y = 44x - 90}$$