Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 2

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Una fábrica estima que el beneficio mensual, en miles de euros, por cada tonelada de confeti vendida viene dado por la función $f(x)=\dfrac{-0,2x^2+5x-20}{x}$, la que x representa el número de toneladas de confeti vendidas.

a) Determine en qué intervalo de valores debe encontrarse la variable x para que la fábrica no tenga pérdidas. [1,25 puntos]

b) Calcule la cantidad de toneladas de confeti que proporciona el beneficio máximo y diga cuál es ese beneficio. [1,25 puntos]

2. En una pastelería quieren preparar cajitas de *panellets* para obsequiar a los mejores clientes durante la semana de la Castañada. En total, disponen de 120 *panellets* de piñones y de 150 *panellets* de coco. Quieren preparar cajitas de dos tipos: las del primer tipo contendrán 3 *panellets* de piñones y 2 de coco, y las del segundo tipo contendrán 4 *panellets* de piñones y 6 de coco. La idea de la pastelería es preparar el máximo número de cajitas posible con los *panellets* de los que disponen teniendo en cuenta que, como mínimo, deben preparar 9 cajitas de cada tipo.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) Determine cuántas cajitas hay que preparar de cada tipo para realizar el máximo número de obsequios posible. Indique si, en este caso, se utilizarán todos los *panellets* disponibles y, si no es así, cuántos sobrarán de cada tipo. [1,25 puntos]

3. En una fiesta familiar se han reunido 20 personas. Contando el total de hombres y mujeres juntos, se observa que hay el triple que de niños. Además, se sabe que, si hubiera asistido una mujer más, el número de mujeres habría sido igual al número de hombres.

a) Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños asistieron a la fiesta. [0,75 puntos]

b) Resuelva el sistema del apartado anterior e interprete el resultado. [1,75 puntos]

4. Un granjero quiere construir un corral rectangular para sus conejos. Se sabe que solo dispone de 40 m lineales de valla metálica.

a) Se denomina x la anchura del corral e y su longitud. Escriba la función que permite calcular el área del corral teniendo en cuenta solo la anchura x. [1,25 puntos]

b) Calcule en qué punto alcanza su máximo la función que ha encontrado en el apartado anterior. Deduzca cuál debe ser la anchura x y cuál la longitud y para que el corral tenga el área máxima. ¿Cuál será esa área máxima? [1,25 puntos]

5. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre la expresión general de $\boldsymbol{A}^n$. Demuestre que la inversa de $\boldsymbol{A}^n$ es $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

b) Encuentre la matriz $\boldsymbol{X}$ que satisface la ecuación matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$. [1,25 puntos]

6. Considere la función real de variable real $f\left(x\right) = 4x^3 + ax^2 - 2$.

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$. [1,25 puntos]

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ cuando $a = 12$. Indique también los puntos en los que hay extremos relativos y clasifíquelos. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Una fábrica estima que el beneficio mensual, en miles de euros, por cada tonelada de confeti vendida viene dado por la función $f(x)=\frac{-0,2x^2+5x-20}{x}$, la que x representa el número de toneladas de confeti vendidas.

a) Determine en qué intervalo de valores debe encontrarse la variable x para que la fábrica no tenga pérdidas. [1,25 puntos]

b) Calcule la cantidad de toneladas de confeti que proporciona el beneficio máximo y diga cuál es ese beneficio. [1,25 puntos]

a) Averiguamos cuando los beneficios son cero.

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{-0,2x^2+5x-20}{x}=0 \Rightarrow -0,2x^2+5x-20=0 \Rightarrow 2x^2-50x+200=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-25x+100=0 \Rightarrow x=\frac{25\pm\sqrt{(-25)^2-400}}{2}=\frac{25\pm15}{2}=\begin{cases}\frac{25+15}{2}=20\\ \frac{25-15}{2}=5\end{cases}$$

Estudiamos el comportamiento de los beneficios según las toneladas de confeti vendidas.

- En $(0,5)$ tomamos $x = 4$ y los beneficios son $f(4)=\frac{-0,2(4)^2+5(4)-20}{4}=-\frac{4}{5}<0$.
  En el intervalo $(0,5)$ el beneficio es negativo (tiene pérdidas).

- En $(5,20)$ tomamos $x = 10$ y los beneficios son $f(10)=\frac{-0,2(10)^2+5(10)-20}{10}=1>0$.
  En el intervalo $(5,20)$ el beneficio es positivo (no tiene pérdidas).

- En $(20,+\infty)$ tomamos $x = 30$ y los beneficios son
  $f(30)=\frac{-0,2(30)^2+5(30)-20}{30}=-\frac{5}{3}<0$. En el intervalo $(0,5)$ el beneficio es negativo (tiene pérdidas).

Para que no tenga pérdidas se deben producir entre 5 y 20 toneladas.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f(x)=\frac{-0,2x^2+5x-20}{x} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{(-0,4x+5)x-1\cdot(-0,2x^2+5x-20)}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,'(x)=\frac{-0,4x^2+5x+0,2x^2-5x+20}{x^2}=\frac{-0,2x^2+20}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-0,2x^2+20}{x^2} = 0 \Rightarrow -0,2x^2+20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,2x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = \frac{20}{0,2} = 100 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{100} = 10}$$

No consideramos el valor *x = –10* pues los valores de *x* son las toneladas de confetis y no puede tomar un valor negativo.
En *x = 10* la función presenta un punto crítico, veamos si la función crece o decrece antes y después de este valor.

- En $(0,10)$ tomamos *x = 5* y la derivada vale $f\,'(5) = \frac{-0,2 \cdot 5^2+20}{5^2} = \frac{3}{5} > 0$. La función crece en $(0,10)$.
- En $(10,+\infty)$ tomamos *x = 20* y la derivada vale $f\,'(20) = \frac{-0,2 \cdot 20^2+20}{20^2} = -\frac{3}{20} < 0$. La función decrece en $(10,+\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en *x = 10*, pues crece antes de *x = 10* y luego decrece.

Los beneficios son máximos fabricando 10 toneladas de confeti.
Como $f(10) = \frac{-0,2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 20}{10} = 1$ estos beneficios máximos son de 1000 €.

2. En una pastelería quieren preparar cajitas de *panellets* para obsequiar a los mejores clientes durante la semana de la Castañada. En total, disponen de 120 *panellets* de piñones y de 150 *panellets* de coco. Quieren preparar cajitas de dos tipos: las del primer tipo contendrán 3 *panellets* de piñones y 2 de coco, y las del segundo tipo contendrán 4 *panellets* de piñones y 6 de coco. La idea de la pastelería es preparar el máximo número de cajitas posible con los *panellets* de los que disponen teniendo en cuenta que, como mínimo, deben preparar 9 cajitas de cada tipo.
a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
b) Determine cuántas cajitas hay que preparar de cada tipo para realizar el máximo número de obsequios posible. Indique si, en este caso, se utilizarán todos los *panellets* disponibles y, si no es así, cuántos sobrarán de cada tipo. [1,25 puntos]

a) Llamamos "x" al número de cajitas de panellets del primer tipo e "y" al número de cajitas de panellets del segundo tipo.

Queremos maximizar el número de cajitas (función objetivo) → $f(x,y)=x+y$

Hacemos una tabla para ordenar los datos.

	Nº panellets de pinyons	Nº de panellets de coco
Nº de cajitas tipo I (x)	**3x**	**2x**
Nº de cajitas tipo II (y)	**4y**	**6y**
TOTALES	$3x+4y$	$2x+6y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones.

"*Com a mínim, han de preparar 9 capsetes de cada tipus*" → $x\geq 9;\ y\geq 9$

"*Disposen de 120 panellets de pinyons*" → $3x+4y\leq 120$

"*Disposen de 150 panellets de coco*" → $2x+6y\leq 150$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x\geq 9;\ y\geq 9 \\ 3x+4y\leq 120 \\ 2x+6y\leq 150 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x\geq 9;\ y\geq 9 \\ 3x+4y\leq 120 \\ x+3y\leq 75 \end{array}\right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas asociadas.

$x=9$

$x=9$	y
9	9
9	22

$y=9$

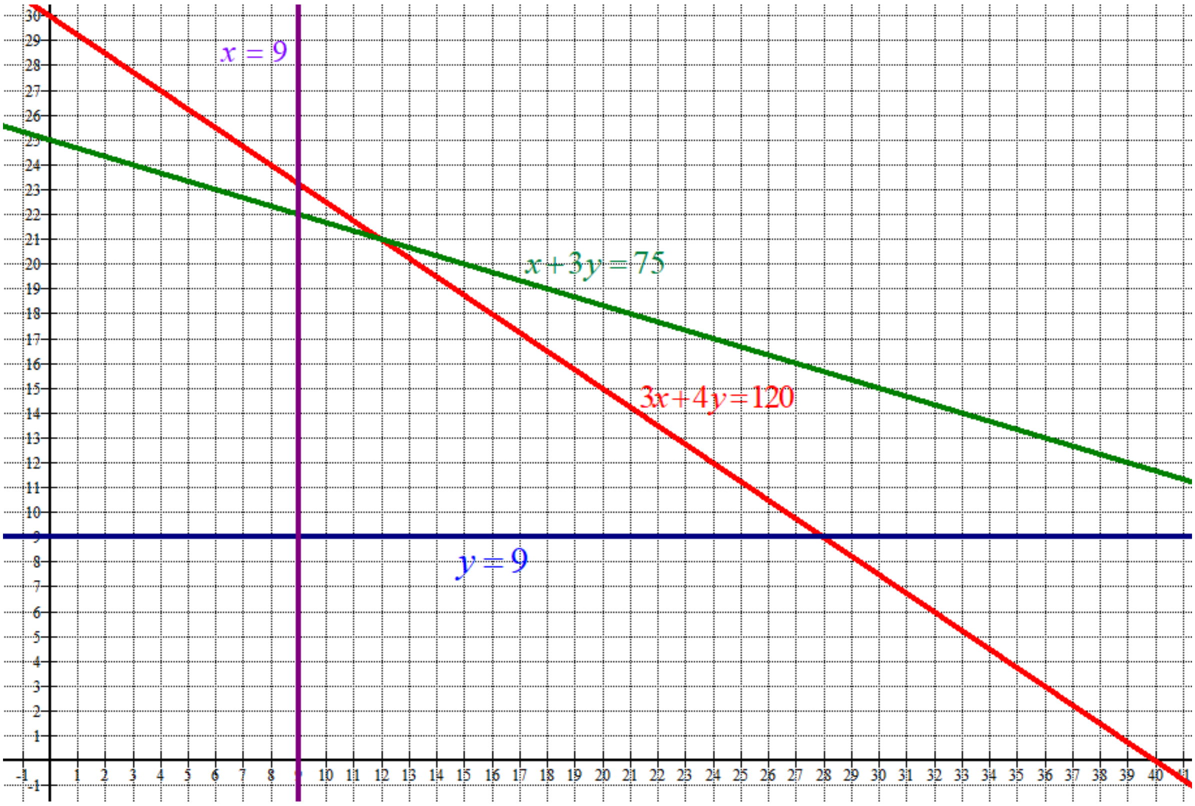
x	$y=9$
9	9
28	9

$3x+4y=120$

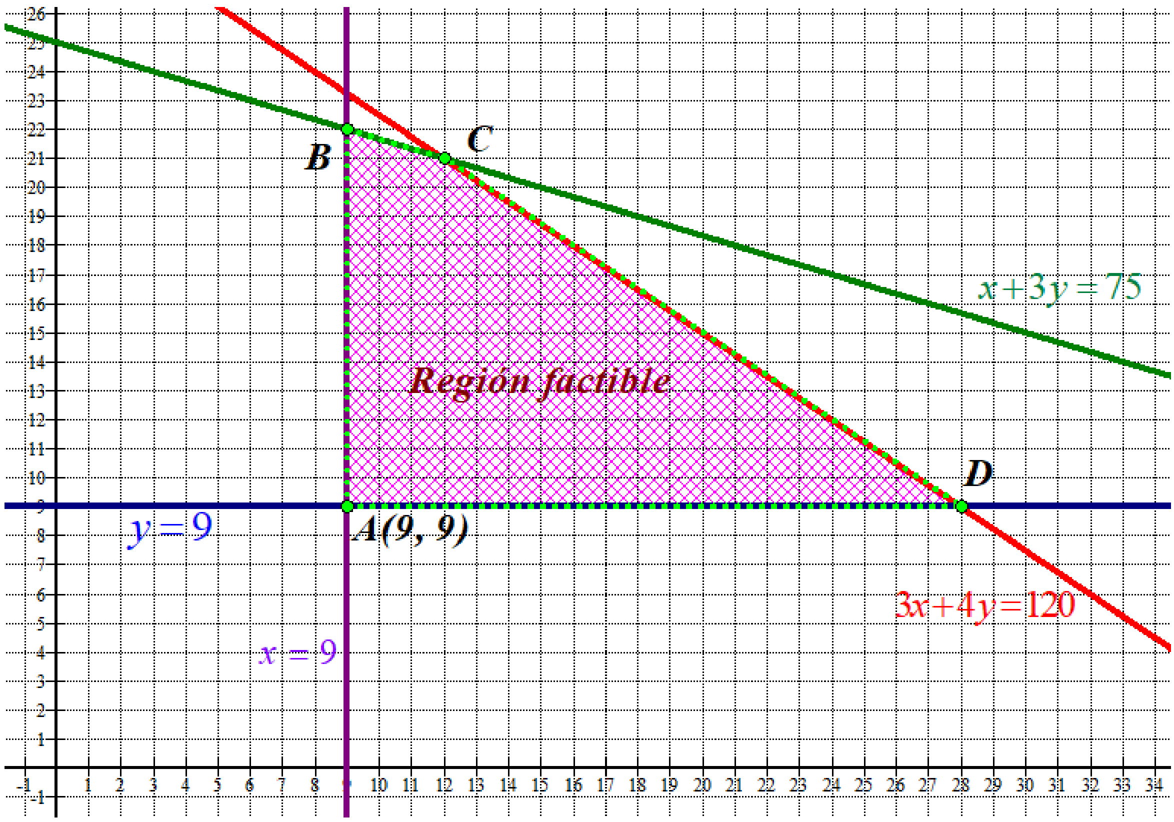
x	$y=\dfrac{120-3x}{4}$
28	9
12	21

$x+3y=75$

x	$y=\dfrac{75-x}{3}$
9	22
12	21



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 9;\ y \geq 9 \\ 3x+4y \leq 120 \\ x+3y \leq 75 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada a la derecha de la recta vertical, por encima de la recta horizontal de color azul y por debajo de las rectas roja y verde. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Las coordenadas del vértice A es fácil de determinar. Las coordenadas de los restantes vértices las determinamos resolviendo los sistemas de ecuaciones:

$$B \Rightarrow \begin{cases} x+3y=75 \\ x=9 \end{cases} \Rightarrow 9+3y=75 \Rightarrow 3y=66 \Rightarrow y=22 \Rightarrow B(9,22)$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} x+3y=75 \\ 3x+4y=120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x-9y=-225 \\ 3x+4y=120 \end{cases}$$

$$-5y=-105 \Rightarrow y=\frac{105}{5}=21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+63=75 \Rightarrow x=75-63=12 \Rightarrow C(12,21)$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=120 \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow 3x+36=120 \Rightarrow 3x=84 \Rightarrow x=\frac{84}{3}=28 \Rightarrow D(28,9)$$

b) Valoramos la función objetivo $f(x,y)=x+y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo en la región factible.

A(9, 9) → $f(9,9)=18$
B(9, 22) → $f(9,22)=31$
C(12,21) → $f(12,21)=33$
D(28,9) → $f(28,9)=37$

El numero máximo de cajitas que se pueden hacer ajustándose a las restricciones pedidas son 37 y se consiguen con 28 del tipo 1 y 9 del tipo 2.

Rellenamos la tabla siguiente y vemos si sobran panellets.

	Nº panellets de pinyons	Nº de panellets de coco
Nº de cajitas tipo I (28)	**84**	**56**
Nº de cajitas tipo II (9)	**36**	**54**
TOTALES	**120**	**110**

Se disponen de 120 panellets de piñones y se utilizan todos.
Se disponen de 150 panellets de coco y utilizamos 110, nos sobran 40 panellets de coco.

3. En una fiesta familiar se han reunido 20 personas. Contando el total de hombres y mujeres juntos, se observa que hay el triple que de niños. Además, se sabe que, si hubiera asistido una mujer más, el número de mujeres habría sido igual al número de hombres.
a) Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños asistieron a la fiesta. [0,75 puntos]
b) Resuelva el sistema del apartado anterior e interprete el resultado. [1,75 puntos]

a) Llamamos “x” al número de hombres, “y” al número de mujeres y “z” al número de niños.

“*En una festa familiar s’han reunit 20 persones*” → $x+y+z=20$

“*Si comptem el total d’homes i dones junts, observem que n’hi ha el triple que de nens*” → $x+y=3z$

“*Si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d’homes*” → $y+1=x$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right\}$$

b)

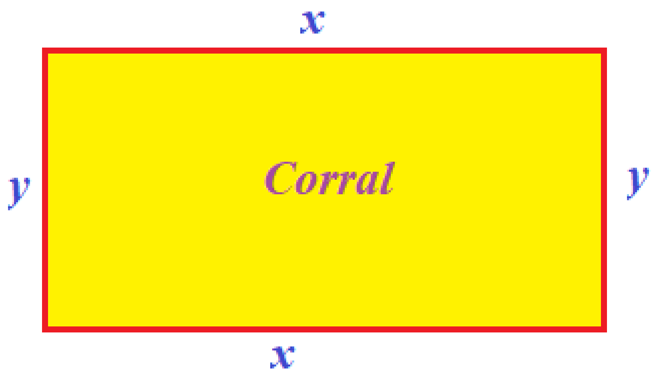
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (y+1)+y+z=20 \\ (y+1)+y=3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+z=19 \\ 2y+1=3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=19-2y \\ 2y+1=3z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y+1=3(19-2y) \Rightarrow 2y+1=57-6y \Rightarrow 8y=56 \Rightarrow \boxed{y=\frac{56}{8}=7} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=19-14=5} \\ \boxed{x=7+1=8} \end{cases}$$

Acuden a la fiesta 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

4. Un granjero quiere construir un corral rectangular para sus conejos. Se sabe que solo dispone de 40 m lineales de valla metálica.
a) Se denomina x la anchura del corral e y su longitud. Escriba la función que permite calcular el área del corral teniendo en cuenta solo la anchura x. [1,25 puntos]
b) Calcule en qué punto alcanza su máximo la función que ha encontrado en el apartado anterior. Deduzca cuál debe ser la anchura x y cuál la longitud y para que el corral tenga el área máxima. ¿Cuál será esa área máxima? [1,25 puntos]

a)



El área del corral viene dada por la expresión $A(x,y) = x \cdot y$.
Como el perímetro debe ser de 40 metros, tenemos que $2x + 2y = 40$.
Aplicando esto a la expresión del área del corral tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y) = x \cdot y \\ 2x + 2y = 40 \rightarrow x + y = 20 \rightarrow y = 20 - x \end{array}\right\} \Rightarrow A(x) = x(20-x) = 20x - x^2$$

b) Derivamos la función e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$A(x) = 20x - x^2 \Rightarrow A'(x) = 20 - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow 20 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

Sustituimos en la derivada segunda para comprobar si $x = 10$ es un máximo relativo del área del corral.

$$A'(x) = 20 - 2x \Rightarrow A''(x) = -2 \Rightarrow A''(10) = -2 < 0$$

En $x = 10$ la función $A(x) = 20x - x^2$ presenta un máximo.
Este valor máximo es de $A(10) = 200 - 10^2 = 100\ m^2$
El valor del lado "y" es $y = 20 - 10 = 10$ metros

El corral rectangular de área máxima con perímetro 40 metros es un corral cuadrado de lado 10. El área máxima es de 100 metros cuadrados.

5. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Encuentre la expresión general de $\boldsymbol{A}^n$. Demuestre que la inversa de $\boldsymbol{A}^n$ es $\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

b) Encuentre la matriz ***X*** que satisface la ecuación matricial $A^{10}\cdot X-A^{20}=A$. [1,25 puntos]

a)

$$A^1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

….

Observamos que en cada potencia de la matriz A los valores no cambian salvo el elemento situado en la primera fila y segunda columna. Su valor cambia en función de la potencia calculada y se cumple la regla $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

La matriz A^n tiene inversa pues su determinante es no nulo. $|A^n|=\begin{vmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

Calculamos su inversa.

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A^n\right)^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(A^n\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^n\right)^T\right)}{\left|\left(A^n\right)^T\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Utilizando lo obtenido en el apartado anterior sabemos que la matriz A^{10} tiene inversa y la inversa de A^{10} es $\left(A^{10}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

También sabemos que $A^{20}=\begin{pmatrix}1 & 20\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^{10}\cdot X-A^{20}=A\Rightarrow\left(A^{10}\right)^{-1}A^{10}\cdot X-\left(A^{10}\right)^{-1}\cdot A^{20}=\left(A^{10}\right)^{-1}A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X-\left(A^{10}\right)^{-1}\cdot A^{20}=\left(A^{10}\right)^{-1}A\Rightarrow X=\left(A^{10}\right)^{-1}\cdot A^{20}+\left(A^{10}\right)^{-1}A$$

Sustituyendo los valores de cada matriz y haciendo las operaciones tendremos la expresión de la matriz X.

$$X = \left(A^{10}\right)^{-1} \cdot A^{20} + \left(A^{10}\right)^{-1} A$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 20-10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1-10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

6. Considere la función real de variable real $f(x)=4x^3+ax^2-2$.

a) Determine el valor del parámetro real *a* para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa *x* = –1. [1,25 puntos]

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*(*x*) cuando *a* = 12. Indique también los puntos en los que hay extremos relativos y clasifíquelos. [1,25 puntos]

a) Para tener un extremo relativo en *x = –1* la derivada primera debe anularse, por lo que debe ser $f'(-1)=0$.

$$f(x)=4x^3+ax^2-2 \Rightarrow f'(x)=12x^2+2ax$$

$$f'(-1)=0 \Rightarrow 12(-1)^2+2a(-1)=0 \Rightarrow 12-2a=0 \Rightarrow 2a=12 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

Para que la función $f(x)=4x^3+ax^2-2$ tenga un extremo relativo en *x = –1* debe ser *a = 6*.

b) Siendo *a = 12* la función queda $f(x)=4x^3+12x^2-2$.

Calculamos su derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

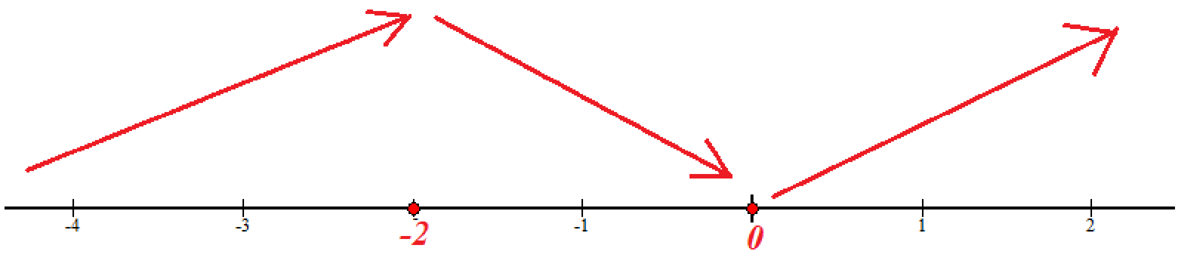
$$f(x)=4x^3+12x^2-2 \Rightarrow f'(x)=12x^2+24x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^2+24x=0 \Rightarrow 12x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ x+2=0 \to x=-2 \end{cases}$$

Evaluamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores críticos obtenidos.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos *x = –3* y la derivada vale $f'(-3)=12(-3)^2+24(-3)=36>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$
- En $(-2,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=12(-1)^2+24(-1)=-12<0$. La función decrece en $(-2,0)$
- En $(0,+\infty)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=12+24=36>0$. La función crece en $(0,+\infty)$

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-2,0)$.

La función presenta un máximo relativo en *x = –2*. Como $f(-2)=4(-2)^3+12(-2)^2-2=14$ las coordenadas del máximo relativo son (–2, 14).

La función presenta un mínimo relativo en *x = 0*. Como $f(0)=4(0)^3+12(0)^2-2=-2$ las coordenadas del máximo relativo son (0, –2)