Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 2

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. En el instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de Sant Jordi. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción de ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Se sabe que se han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.

a) ¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo? [1,75 puntos]

b) Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, el de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos? [0,75 puntos]

2. Experimentalmente se ha comprobado que la producción de un determinado tipo de fruta que se cultiva en invernaderos depende de la temperatura, según la función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, donde x representa la temperatura del invernadero en grados Celsius y *f(x)* es la producción anual en centenares de kilogramos por hectárea. El precio de venta de la fruta se mantiene estable a 1,2 euros por cada kilogramo.

a) Determine el intervalo de temperaturas entre las que hay que mantener el invernadero para que haya producción de fruta. Calcule los ingresos anuales por hectárea si se mantiene el invernadero a 20 °C de temperatura. [1,25 puntos]

b) ¿A qué temperatura se obtiene la producción máxima de fruta? ¿Qué ingresos por hectárea se obtienen en este caso? [1,25 puntos]

3. Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para sus trabajadores y trabajadoras. Cada cesta de tipo A contendrá 1 jamón, 1 botella de cava y 5 barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá 2 jamones, 3 botellas de cava y 2 barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por lo tanto, seguro que cava no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa? [1,75 puntos]

b) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa cambia de opinión y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo habrá que hacer? [0,75 puntos]

4. Un grupo de biólogos está estudiando un cultivo de bacterias. La población de estas bacterias (en centenares) viene dada por la función $P(t) = a + \dfrac{12t}{t^2 + b}$, donde a y b son constantes positivas reales y $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en minutos. Se sabe que en el instante inicial del estudio la población de bacterias era de 6 centenares y que el valor máximo de población se ha alcanzado al cabo de 2 minutos de haber iniciado el estudio.

a) Encuentre los valores de las constantes a y b. [1,25 puntos]

b) Calcule la población máxima de bacterias y estudie su comportamiento a largo plazo, es decir, hacia qué valor se estabiliza el número de bacterias. [1,25 puntos

5. Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentre para qué valores de a es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P \cdot A$. [1,5 puntos]

b) Si a = 2, encuentra la matriz ***X*** que satisface la ecuación matricial $P \cdot A + X = I$, donde ***I*** denota la matriz identidad de orden 2. [1 punto]

6. En los modelos matemáticos que se utilizan para describir la evolución de una enfermedad, se denomina R_0 al número medio de nuevas infecciones que cada persona infectada provoca en la población. Cuando este número es inferior a 1, cada individuo infectado transmite la enfermedad, de media, a menos de una persona y la enfermedad tiende a desaparecer. En cambio, si R_0 es mayor que 1, la enfermedad se extiende y se produce una epidemia.

Cuando se descubre una vacuna efectiva contra la enfermedad, se puede controlar la epidemia vacunando solo a una proporción p de la población. Es lo que se conoce como inmunidad de grupo. Efectivamente, una vez vacunada una proporción $p \in (0, 1)$ de la población, la nueva R_0, que se denomina efectiva y se denota con R_e, es el producto de la R_0 original por la proporción de individuos que no están vacunados, $1 - p$. Y se consigue controlar la epidemia si la R_e es inferior a 1.

a) En el caso del sarampión, se estima que $R_0 = 15$. Si se analiza una población con un porcentaje de individuos vacunados del 95 %, según el modelo descrito, ¿hay riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión en esta población? [0,75 puntos]

b) En el caso concreto de la denominada gripe española del 1918, se estima que $R_0 = 4$. Calcule qué porcentaje de población se tendría que haber vacunado, como mínimo, para parar la epidemia de esta enfermedad. [0,75 puntos]

c) Exprese, en general, el umbral de población mínima que debe vacunarse en función del valor R_0 de una enfermedad. Realice un esbozo de esta función para los valores de R_0 entre 1 y 20. [1 punto]

SOLUCIONES

1. En el instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de Sant Jordi. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción de ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Se sabe que se han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.
a) ¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo? [1,75 puntos]
b) Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, el de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos? [0,75 puntos]

a) Llamamos x, y, z al número de ramos de tipo clásico, pequeño y grande que se elaboran.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Rosas	Espigas	Envoltorio
Nº ramos clásicos (x)	x	x	x
Nº ramos pequeños (y)	3y	2y	y
Nº ramos grandes (z)	6z	3z	z
TOTAL	$x+3y+6z$	$x+2y+3z$	$x+y+z$

Como se han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+6z=200 \\ x+2y+3z=135 \\ x+y+z=85 \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+6z=200 \\ x+2y+3z=135 \\ x+y+z=85 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{a} - \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{ccccc} x & +2y & +3z & = & 135 \\ -x & -3y & -6z & = & -200 \\ \hline & -y & -3z & = & -65 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{a} - \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 85 \\ -x & -3y & -6z & = & -200 \\ \hline & -2y & -5z & = & -115 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+6z=200 \\ -y-3z=-65 \\ -2y-5z=-115 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{a} - 2\cdot\text{Ecuación } 2^{a} \\ \begin{array}{cccc} -2y & -5z & = & -115 \\ 2y & +6z & = & 130 \\ \hline & z & = & 15 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+6z=200 \\ -y-3z=-65 \\ \boxed{z=15} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+90=200 \\ -y-45=-65 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=110 \\ -y=-20 \rightarrow \boxed{y=20} \end{array}\right\} \Rightarrow x+60=110 \Rightarrow \boxed{x=50}$$

Se han elaborado 50 ramos clásicos, 20 pequeños y 15 grandes.

b) Se han elaborado y vendido 50 ramos clásicos a 3 € cada uno, 20 pequeños a 5 € cada uno y 15 grandes a 10 € cada uno.
Las ganancias son $50 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 15 \cdot 10 = 400$ € por la venta de todos los ramos elaborados.

2. Experimentalmente se ha comprobado que la producción de un determinado tipo de fruta que se cultiva en invernaderos depende de la temperatura, según la función $f(x)=-x^2+46x-360$, donde x representa la temperatura del invernadero en grados Celsius y *f(x)* es la producción anual en centenares de kilogramos por hectárea. El precio de venta de la fruta se mantiene estable a 1,2 euros por cada kilogramo.

a) Determine el intervalo de temperaturas entre las que hay que mantener el invernadero para que haya producción de fruta. Calcule los ingresos anuales por hectárea si se mantiene el invernadero a 20 °C de temperatura. [1,25 puntos]

b) ¿A qué temperatura se obtiene la producción máxima de fruta? ¿Qué ingresos por hectárea se obtienen en este caso? [1,25 puntos]

a) Averiguamos cuando la producción es cero.

$$f(x)=0 \Rightarrow -x^2+46x-360=0 \Rightarrow x=\frac{-46\pm\sqrt{46^2-1440}}{-2}=\frac{-46\pm 26}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-46+26}{-2}=10\\[2mm] \dfrac{-46-26}{-2}=36\end{cases}$$

Valoramos la función antes, entre y después de estos dos valores para averiguar cuando $f(x)>0$.

Por debajo de 10º C, por ejemplo, $x = 5^o$ tenemos que $f(5)=-5^2+46\cdot 5-360=-155<0$.

Entre 10º y 36º, por ejemplo, $x = 20^o$ tenemos que $f(20)=-20^2+46\cdot 20-360=160>0$.

Por encima de 36º, por ejemplo, $x = 40^o$ tenemos que $f(40)=-40^2+46\cdot 40-360=-120<0$.

La producción es positiva entre 10º y 36º.

La producción a 20º C es $f(20)=-20^2+46\cdot 20-360=160$, lo que significa una producción de 16000 kilos por hectárea. Como el precio por kilo es de 1.2 € los ingresos son de 16000 · 1.2 = 19200 €.

b) Derivamos la función e igualamos a cero la derivada.

$$f(x)=-x^2+46x-360 \Rightarrow f'(x)=-2x+46$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -2x+46=0 \Rightarrow x=\frac{46}{2}=23$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada y vemos su signo.

$$f'(x)=-2x+46 \Rightarrow f''(x)=-2 \Rightarrow f''(23)=-2<0$$

Al ser negativo el valor de la derivada segunda en $x = 23$ hay un máximo de la función.
Calculamos el valor de la función para $x = 23$ → $f(23)=-23^2+46\cdot 23-360=169$.

La producción máxima se produce a 23º C y dicha producción máxima es de 16900 kilos por hectárea. Siendo los ingresos de 16900 · 1.2 = 20280 €

3. Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para sus trabajadores y trabajadoras. Cada cesta de tipo A contendrá 1 jamón, 1 botella de cava y 5 barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá 2 jamones, 3 botellas de cava y 2 barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por lo tanto, seguro que cava no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa? [1,75 puntos]

b) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa cambia de opinión y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo habrá que hacer? [0,75 puntos]

a) Llamamos "x" al número de cestas de navidad de tipo A e "y" al número de cestas de navidad de tipo B.

Queremos maximizar el número de cestas (función objetivo) → $f(x,y)=x+y$

Hacemos una tabla para ordenar los datos.

	Nº de jamones	Nº de botellas de cava	Nº de barras de turrón
Nº de cestas tipo A (x)	x	x	$5x$
Nº de cestas tipo B (y)	$2y$	$3y$	$2y$
TOTALES	$x+2y$	$x+3y$	$5x+2y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones.

"*disposen de 40 pernils, 120 barres de torró i moltes ampolles de cava, i que, per tant, de cava segur que no en faltarà*" → $x+2y\leq 40;\ 5x+2y\leq 120$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\leq 40 \\ 5x+2y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas asociadas.

$x+2y=40$

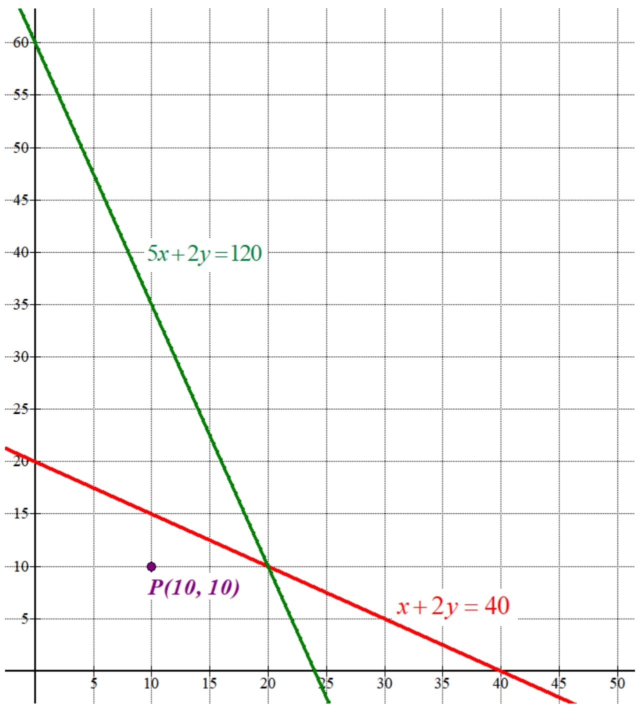
x	$y=\frac{40-x}{2}$
0	20
20	10

$5x+2y=120$

x	$y=\frac{120-5x}{2}$
0	60
20	10

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer Cuadrante

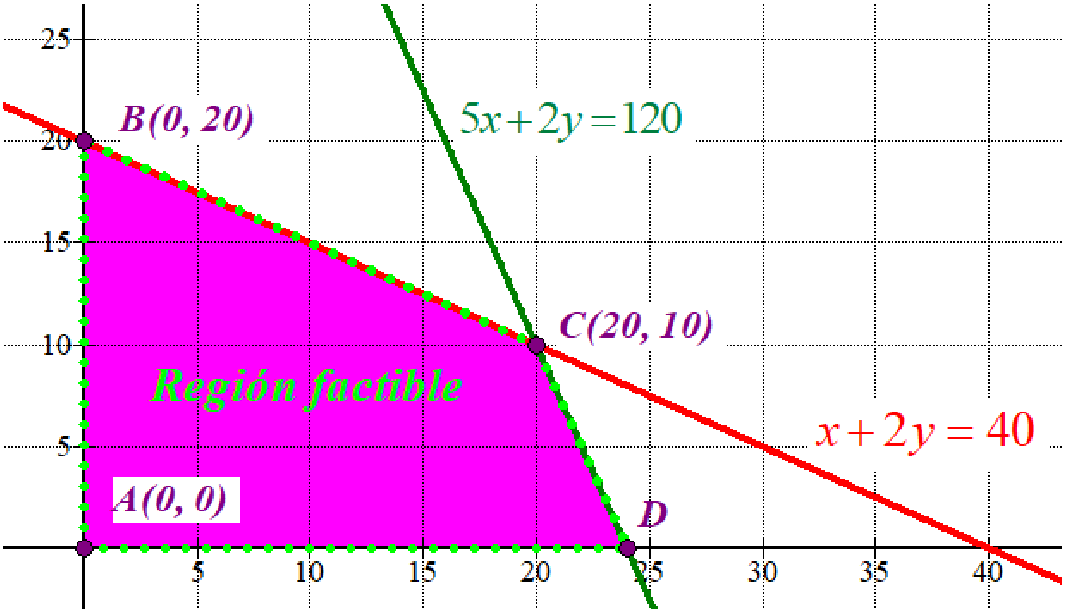


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y \leq 40 \\ 5x+2y \leq 120 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y verde.

Comprobamos que el punto P(10, 10) cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+20 \leq 40 \\ 50+20 \leq 120 \\ 10 \geq 0;\ 10 \geq 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice D resolviendo el sistema correspondiente:

$$D \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y=120 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 5x+0=120 \Rightarrow x=\frac{120}{5}=24 \Rightarrow D(24,0)$$

Valoramos la función objetivo $f(x,y)=x+y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo en la región factible.

A(0, 0) → $f(0,0)=0$

B(0, 20) → $f(0,20)=20$

C(20,10) → $f(20,10)=30$ ¡Máximo!

D(24,0) → $f(24,0)=24$

El número máximo de cestas que se pueden hacer ajustándose a las restricciones pedidas son 30 y se consiguen con 20 del tipo A y 10 del tipo B.

b) Si añadimos la condición de que se hagan la misma cantidad de los dos tipos de cesta las nuevas restricciones serán:

	Nº de jamones	Nº de botellas de cava	Nº de barras de turrón
Nº de cestas tipo A (x)	**x**	**x**	**5x**
Nº de cestas tipo B (x)	**2x**	**3x**	**2x**
TOTALES	**3x**	**4x**	**7x**

Queremos maximizar el número de cestas (función objetivo) → $f(x)=2x$

Las restricciones son:
"*disposen de 40 pernils, 120 barres de torró i moltes ampolles de cava, i que, per tant, de cava segur que no en faltarà*" → $3x \leq 40;\ 7x \leq 120$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0$
Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x \leq 40 \\ 7x \leq 120 \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \leq \frac{40}{3} \simeq 13.33 \\ x \leq \frac{120}{7} \simeq 17.14 \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$$

La solución es un número entero positivo menor que 13.33, la solución es *x = 13*.

Con la nueva restricción se deben hacer 13 cestas de cada tipo para hacer el máximo número posible ajustándose a las limitaciones indicadas en el problema.

4. Un grupo de biólogos está estudiando un cultivo de bacterias. La población de estas bacterias (en centenares) viene dada por la función $P(t)=a+\frac{12t}{t^2+b}$, donde *a* y *b* son constantes positivas reales y *t* ≥ 0 es el tiempo transcurrido en minutos. Se sabe que en el instante inicial del estudio la población de bacterias era de 6 centenares y que el valor máximo de población se ha alcanzado al cabo de 2 minutos de haber iniciado el estudio.

a) Encuentre los valores de las constantes *a* y *b*. [1,25 puntos]

b) Calcule la población máxima de bacterias y estudie su comportamiento a largo plazo, es decir, hacia qué valor se estabiliza el número de bacterias. [1,25 puntos]

a) Se sabe que P(0) = 6.

$$\left.\begin{array}{l} P(t)=a+\frac{12t}{t^2+b} \\ P(0)=6 \end{array}\right\} \Rightarrow 6=a+\frac{0}{0^2+b} \Rightarrow \{b\neq 0\} \Rightarrow \boxed{a=6}$$

El valor máximo de *P(t)* está en *t = 2*, lo que implica que la derivada se anula en dicho valor.

$$P(t)=6+\frac{12t}{t^2+b} \Rightarrow P'(t)=\frac{12(t^2+b)-2t\cdot 12t}{(t^2+b)^2}=\frac{12t^2+12b-24t^2}{(t^2+b)^2}=\frac{12b-12t^2}{(t^2+b)^2}$$

$$P'(2)=0 \Rightarrow \frac{12b-12\cdot 2^2}{(t^2+b)^2}=0 \Rightarrow 12b-48=0 \Rightarrow b-4=0 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

Comprobamos que para *b = 4* la función tiene un máximo en *t = 2*, es decir, la derivada es positiva en [0, 2) y negativa a partir de 2.

En [0, 2) valoramos la derivada en *t = 1* → $P'(1)=\frac{48-12\cdot 1^2}{(1^2+4)^2}=\frac{36}{25}>0$.

Es creciente en $[0,2)$

A partir de *t = 2* tomamos *t = 3* → $P'(3)=\frac{48-12\cdot 3^2}{(3^2+4)^2}=\frac{-60}{169}<0$.

Es decreciente a partir de 2.

Los valores buscados son *a = 6* y *b = 4.*

b) La función es $P(t)=6+\frac{12t}{t^2+4}$. Y su máximo relativo se produce en *t = 2.*

La población máxima es P(2).

$$P(2)=6+\frac{24}{2^2+4}=9$$

La población máxima es de 900 bacterias.
Calculamos el límite cuando t → +∞.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t)=\lim_{t\to+\infty} 6+\frac{12t}{t^2+4}=\lim_{t\to+\infty} 6+\frac{\frac{12t}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2}+\frac{4}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty} 6+\frac{\frac{12}{t}}{1+\frac{4}{t^2}}=6+\frac{0}{1+0}=6$$

La población de bacterias se estabiliza a largo plazo en 600 bacterias.

5. Considere las matrices $P=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ a & 2 & 3\end{pmatrix}$ *i* $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, donde *a e*s un parámetro real.

a) Encuentre para qué valores de a es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P\cdot A$. [1,5 puntos]

b) Si a = 2, encuentra la matriz ***X*** que satisface la ecuación matricial $P\cdot A+X=I$, donde ***I*** denota la matriz identidad de orden 2. [1 punto]

a) Obtenemos la expresión de $P\cdot A$.

$$P\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ a & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2+1\\ -a+3 & -2a+2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -a+3 & -2a-1\end{pmatrix}$$

Para que sea invertible su determinante debe ser no nulo.

$$|P\cdot A|=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -a+3 & -2a-1\end{vmatrix}=2a+1+3a-9=5a-8$$

$$|P\cdot A|=0\Rightarrow 5a-8=0\Rightarrow 5a=8\Rightarrow \boxed{a=\frac{8}{5}}$$

Para que la matriz $P\cdot A$ sea invertible el valor de a debe ser distinto de $\frac{8}{5}$.

b) Si a = 2 la matriz $P\cdot A$ queda $P\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2+3 & -4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$.

Despejamos X en la ecuación matricial y obtenemos su expresión.

$$P\cdot A+X=I\Rightarrow X=I-P\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 6\end{pmatrix}}$$

6. En los modelos matemáticos que se utilizan para describir la evolución de una enfermedad, se denomina R_0 al número medio de nuevas infecciones que cada persona infectada provoca en la población. Cuando este número es inferior a 1, cada individuo infectado transmite la enfermedad, de media, a menos de una persona y la enfermedad tiende a desaparecer. En cambio, si R_0 es mayor que 1, la enfermedad se extiende y se produce una epidemia.

Cuando se descubre una vacuna efectiva contra la enfermedad, se puede controlar la epidemia vacunando solo a una proporción *p* de la población. Es lo que se conoce como inmunidad de grupo. Efectivamente, una vez vacunada una proporción $p \in (0, 1)$ de la población, la nueva R_0, que se denomina efectiva y se denota con R_e, es el producto de la R_0 original por la proporción de individuos que no están vacunados, $1 - p$. Y se consigue controlar la epidemia si la R_e es inferior a 1.

a) En el caso del sarampión, se estima que $R_0 = 15$. Si se analiza una población con un porcentaje de individuos vacunados del 95 %, según el modelo descrito, ¿hay riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión en esta población? [0,75 puntos]

b) En el caso concreto de la denominada gripe española del 1918, se estima que $R_0 = 4$. Calcule qué porcentaje de población se tendría que haber vacunado, como mínimo, para parar la epidemia de esta enfermedad. [0,75 puntos]

c) Exprese, en general, el umbral de población mínima que debe vacunarse en función del valor R_0 de una enfermedad. Realice un esbozo de esta función para los valores de R_0 entre 1 y 20. [1 punto]

a) Sabemos que $R_e = R_0 \cdot (1-0.95) = 15 \cdot 0.05 = 0.75$.
Como este valor es inferior a 1, según el modelo, no hay riesgo de una epidemia de sarampión.

b) En el caso de la gripe española $R_e = R_0 \cdot (1-p) = 4 \cdot (1-p)$.
Imponemos que $4 \cdot (1-p) < 1 \Rightarrow 4 - 4p < 1 \Rightarrow -4p < -3 \Rightarrow 3 < 4p \Rightarrow p > \frac{3}{4} = 0.75$.
Habría que vacunar a más de un 75% de la población para detener la epidemia.

c) El umbral de vacunación viene dado por $R_0 \cdot (1-p) < 1$.
Despejamos p y obtenemos que $R_0 \cdot (1-p) < 1 \Rightarrow 1 - p < \frac{1}{R_0} \Rightarrow 1 - \frac{1}{R_0} < p$.
Por tanto, la función que nos determina el umbral del mínimo de vacunación necesaria, en función de R_0 es $p(R_0) = 1 - \frac{1}{R_0}$.
Para hacer un esbozo de la función entre 1 y 20 obtenemos el valor de la función en los dos extremos: $p(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0$ y $p(20) = 1 - \frac{1}{20} = 0.95$.

La función siempre es creciente pues $p'(R_0)=\dfrac{1}{(R_0)^2}>0$. Por lo tanto, no tiene extremos relativos. La gráfica de la función es: