Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. El valor de un producto electrónico, en función del número de meses que hace que está a la venta, t, viene dado por la función $f(t) = -(t+25)(t-75)$.

a) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(t)$. ¿En qué momento el producto alcanzará el valor máximo? ¿Cuál es ese valor máximo? [1,25 puntos]

b) Se sabe que el producto dejará de comercializarse cuando llegue a un valor de 475 €. ¿En qué momento dejará de comercializarse? [1,25 puntos]

2. Una caja contiene 40 monedas, que son de 50 céntimos, de 1 € y de 2 €. Se sabe que el número de monedas de 50 céntimos que hay es el doble que el de monedas de 2 €.

a) ¿Puede saberse el número de monedas que hay de cada tipo? En caso afirmativo, calcúlelo. En caso negativo, dé la solución en función de un parámetro. [1,25 puntos]

b) Averigüe si puede calcularse el valor total, en euros, de las monedas de la caja. En caso afirmativo, calcúlelo. [1,25 puntos]

3. Calcule la matriz X que verifica $A \cdot X \cdot B = C$, sabiendo que

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$ [2,5 puntos]

4. Un hotel admite reservas para las 420 habitaciones dobles de que dispone y ofrece dos tarifas diferentes: la tarifa estándar (sin gastos de cancelación) es de 120 € por noche, y la tarifa reducida (que no admite cancelaciones) es de 90 € por noche. Les interesa tener reservado al menos un 20 % del total de habitaciones con la tarifa reducida y quieren que el número de habitaciones reservadas con la tarifa estándar sea igual o superior que el doble del número de habitaciones reservadas con la tarifa reducida.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) Determine cuántas habitaciones deben tener reservadas con cada tarifa para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio máximo? [1,25 puntos]

5. Una fábrica de vehículos produce coches de un modelo llamado *Paradís* y los vende a 58.000 €. Se sabe que los costes mensuales de producción vienen dados por la función $C(x)=\frac{1}{2}x^2-64x+4.704$ (en miles de euros), donde x denota el número de coches que se fabrican mensualmente.

***a*)** Suponiendo que se venden todos los coches que se fabrican, verifique que la función de beneficios es $B(x)=-\frac{1}{2}x^2+122x-4.704$ (en miles de euros). [0,75 puntos]

***b*)** Determine el número de coches que hay que fabricar mensualmente para no tener pérdidas. ¿Para qué número de unidades producidas se obtiene el beneficio máximo y cuál es ese beneficio máximo? [1 punto]

***c*)** Se quiere aumentar el precio de venta por unidad, de forma que el beneficio máximo se obtenga con 130 unidades (la función que da el coste mensual en miles de euros no varía). ¿Cuál tiene que ser el nuevo precio de venta del coche? [0,75 puntos]

6. Considere la función $f(x)=e^{3x}$.

***a*)** Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa $x = 0$. [1,25 puntos]

***b*)** Obtenga la ecuación de esta recta tangente. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. El valor de un producto electrónico, en función del número de meses que hace que está a la venta, *t*, viene dado por la función $f(t) = -(t+25)(t-75)$.

a) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f* (*t*). ¿En qué momento el producto alcanzará el valor máximo? ¿Cuál es ese valor máximo? [1,25 puntos]

b) Se sabe que el producto dejará de comercializarse cuando llegue a un valor de 475 €. ¿En qué momento dejará de comercializarse? [1,25 puntos]

a) Utilizamos la derivada para estudiar el comportamiento de la función.

$$f(t) = -(t+25)(t-75) = -(t^2 - 75t + 25t - 1875) = -t^2 + 50t + 1875 \Rightarrow f'(t) = -2t + 50$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -2t + 50 = 0 \Rightarrow 2t = 50 \Rightarrow \boxed{t = 25}$$

En *t* = *25* existe un punto crítico de la función. Sustituimos este valor en la derivada segunda para ver si es máximo o mínimo.

$$f''(t) = -2 \Rightarrow f''(25) = -2 < 0$$

La función presenta un máximo en *t* = *25*. Como $f(25) = -(25+25)(25-75) = 2500$, tenemos que el valor del producto electrónico alcanza un valor máximo de 2500 € al cabo de 25 meses a la venta.

b) Averiguamos cuando se alcanza el valor de 475 €.

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = -t^2 + 50t + 1875 \\ f(t) = 475 \end{array}\right\} \Rightarrow -t^2 + 50t + 1875 = 475 \Rightarrow -t^2 + 50t + 1400 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4(-1)(1400)}}{-2} = \frac{-50 \pm 90}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-50-90}{-2} = \boxed{70 = t} \\ \dfrac{-50+90}{-2} = -20 < 0 \text{ ¡No válido!} \end{cases}$$

Como la función tiene un máximo en *t* = *25*, a partir de este valor es decreciente. En *t* = *70* se alcanza el valor de 475 € y por ello podemos afirmar que a partir de los 70 meses el producto tendrá un precio inferior a 475 €. Dejará de comercializarse a partir de los 70 meses.

2. Una caja contiene 40 monedas, que son de 50 céntimos, de 1 € y de 2 €. Se sabe que el número de monedas de 50 céntimos que hay es el doble que el de monedas de 2 €.
a) ¿Puede saberse el número de monedas que hay de cada tipo? En caso afirmativo, calcúlelo. En caso negativo, dé la solución en función de un parámetro. [1,25 puntos]
b) Averigüe si puede calcularse el valor total, en euros, de las monedas de la caja. En caso afirmativo, calcúlelo. [1,25 puntos]

a) Llamamos x, y, z al número de monedas de 50 céntimos, de 1 € y de 2 €.

"*Una caja contiene 40 monedas, que son de 50 céntimos, de 1 € y de 2 €*" → $x+y+z=40$
"*Se sabe que el número de monedas de 50 céntimos que hay es el doble que el de monedas de 2 €*" → $x=2z$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=40 \\ x=2z \end{array}\right\} \Rightarrow 2z+y+z=40 \Rightarrow y=40-3z \Rightarrow \text{Solución:}\begin{cases} x=2z \\ y=40-3z \\ z=z \end{cases}$$

No existe una solución única pues nos falta información para obtener una tercera ecuación. El problema tiene muchas soluciones, una por cada valor que le demos a la incógnita "z".

La solución es $\begin{cases} x=2\lambda \\ y=40-3\lambda;\ \ \lambda=0,1,2,3,4,.... \\ z=\lambda \end{cases}$

b) El valor total de las monedas de la caja es:

$$\left.\begin{array}{l} V(x,y,z)=0.5x+y+2z \\ \begin{cases} x=2\lambda \\ y=40-3\lambda;\ \ \lambda=0,1,2,3,4,.... \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow V(\lambda)=0.5\cdot 2\lambda+40-3\lambda+2\lambda=40\text{ €}$$

El valor de la caja es de 40 € y no depende del número de monedas que hay de cada tipo.

3. Calcule la matriz X que verifica $A\cdot X\cdot B=C$, sabiendo que

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$ [2,5 puntos]

$$A\cdot X\cdot B=C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a & b+c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 2a-3b \\ a-b-c & 2a-3b-3c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ 2a-3b=-2 \\ a-b-c=-3 \\ 2a-3b-3c=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1+b \\ 2a-3b=-2 \\ a-b-c=-3 \\ 2a-3b-3c=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-1+b)-3b=-2 \\ -1+b-b-c=-3 \\ 2(-1+b)-3b-3c=-8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2+2b-3b=-2 \\ -1-c=-3 \\ -2+2b-3b-3c=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b=0 \to \boxed{b=0} \\ \boxed{2=c} \\ -b-3c=-6 \to -0-3\cdot 2=-6 \text{ ¡Se cumple!} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

La matriz que se busca es $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Un hotel admite reservas para las 420 habitaciones dobles de que dispone y ofrece dos tarifas diferentes: la tarifa estándar (sin gastos de cancelación) es de 120 € por noche, y la tarifa reducida (que no admite cancelaciones) es de 90 € por noche. Les interesa tener reservado al menos un 20 % del total de habitaciones con la tarifa reducida y quieren que el número de habitaciones reservadas con la tarifa estándar sea igual o superior que el doble del número de habitaciones reservadas con la tarifa reducida.
a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
b) Determine cuántas habitaciones deben tener reservadas con cada tarifa para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio máximo? [1,25 puntos]

a) Llamamos "x" al número de reservas de tarifa estándar e "y" al número de reservas de tarifa reducida.

Queremos maximizar los ingresos (función objetivo) → $f(x,y)=120x+90y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones.

"Un hotel admite reservas para las 420 habitaciones dobles de que dispone" → $x+y\leq 420$

"Les interesa tener reservado al menos un 20 % del total de habitaciones con la tarifa reducida" → $y\geq 0.20\cdot 420$ → $y\geq 84$

"Quieren que el número de habitaciones reservadas con la tarifa estándar sea igual o superior que el doble del número de habitaciones reservadas con la tarifa reducida" → $x\geq 2y$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 420 \\ y\geq 84 \\ x\geq 2y \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y\leq 420-x \\ y\geq 84 \\ y\leq \dfrac{x}{2} \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

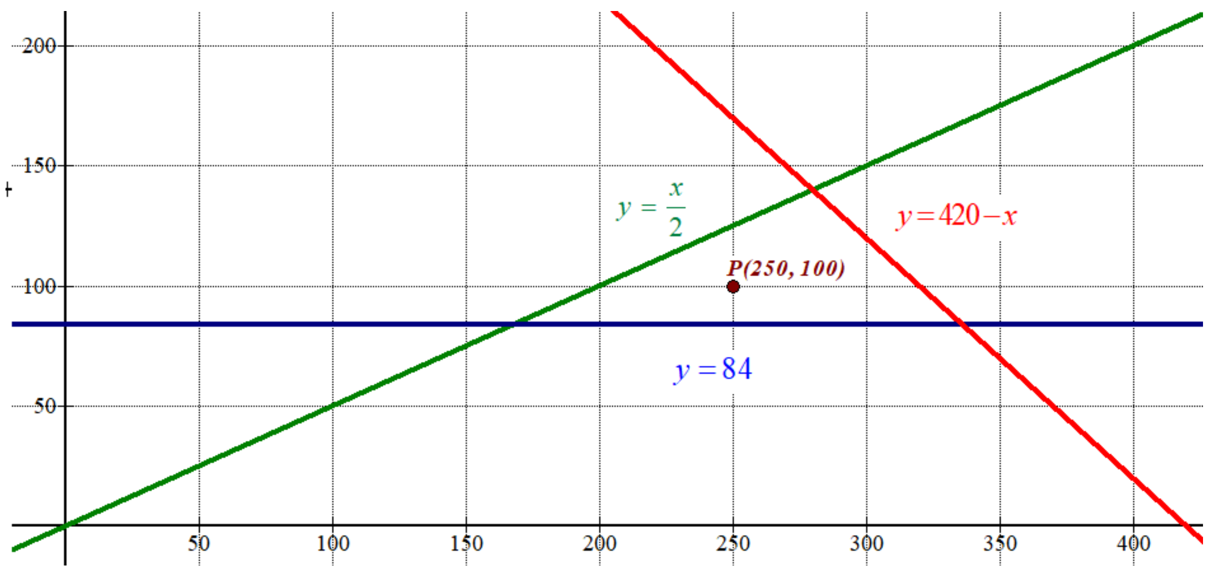
Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas asociadas.

x	$y=420-x$
0	420
280	140

x	$y=\dfrac{x}{2}$
0	0
280	140

$y=84$ Recta horizontal

$x\geq 0;\ y\geq 0$ Primer Cuadrante

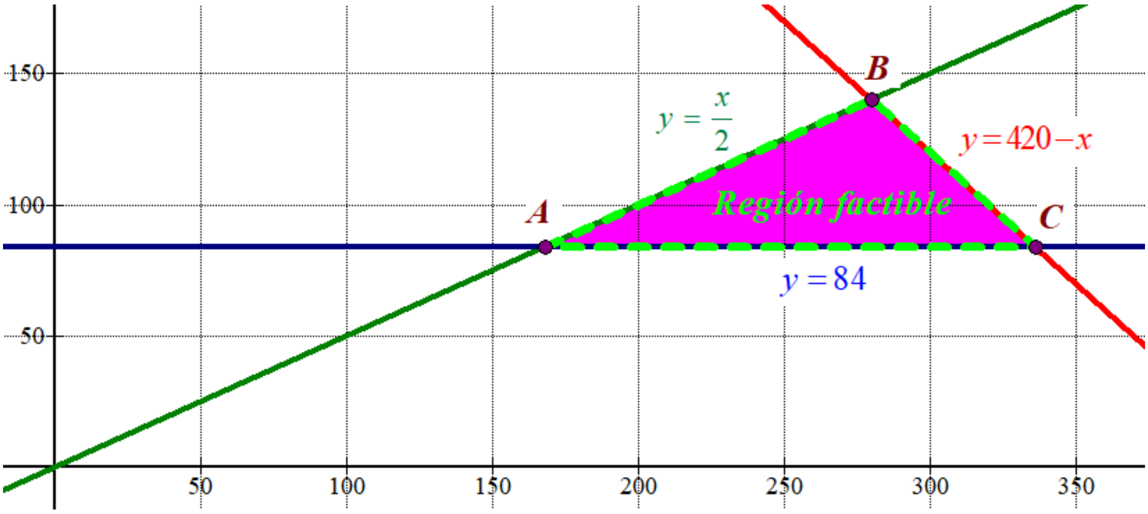


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} y \le 420-x \\ y \ge 84 \\ y \le \dfrac{x}{2} \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y verde y por encima de la recta horizontal azul.

Comprobamos que el punto P(250, 100) cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 100 \le 420-250 \\ 100 \ge 84 \\ 100 \le \dfrac{250}{2} \\ 250 \ge 0;\ 100 \ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas de los vértices resolviendo los sistemas correspondientes:

$$A \to \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x}{2} \\ y = 84 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = 84 \Rightarrow x = 168 \Rightarrow \boxed{A(168,84)}$$

$$B \to \left.\begin{array}{l} y = 420-x \\ y = \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = 420-x \Rightarrow x = 840-2x \Rightarrow 3x = 840 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{840}{3} = 280 \Rightarrow y = \frac{280}{2} = 140 \Rightarrow \boxed{B(280,140)}$$

$$C \to \left.\begin{array}{l} y = 420-x \\ y = 84 \end{array}\right\} \Rightarrow 84 = 420-x \Rightarrow x = 420-84 = 336 \Rightarrow \boxed{C(336,84)}$$

b) Valoramos la función objetivo $f(x,y) = 120x + 90y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo en la región factible.

A(168, 84) → $f\left(168,84\right)=27720\,€$

B(280, 140) → $f\left(280,140\right)=46200\,€$

C(336, 84) → $f\left(336,84\right)=47880\,€$ ¡Máximo!

Para obtener unos ingresos máximos debemos reservar 336 habitaciones en tarifa estándar y 140 en tarifa reducida. Conseguimos unos beneficios máximos de 47880 €.

5. Una fábrica de vehículos produce coches de un modelo llamado *Paradís* y los vende a 58.000 €. Se sabe que los costes mensuales de producción vienen dados por la función $C(x)=\frac{1}{2}x^2-64x+4.704$ (en miles de euros), donde x denota el número de coches que se fabrican mensualmente.

a) Suponiendo que se venden todos los coches que se fabrican, verifique que la función de beneficios es $B(x)=-\frac{1}{2}x^2+122x-4.704$ (en miles de euros). [0,75 puntos]

b) Determine el número de coches que hay que fabricar mensualmente para no tener pérdidas. ¿Para qué número de unidades producidas se obtiene el beneficio máximo y cuál es ese beneficio máximo? [1 punto]

c) Se quiere aumentar el precio de venta por unidad, de forma que el beneficio máximo se obtenga con 130 unidades (la función que da el coste mensual en miles de euros no varía). ¿Cuál tiene que ser el nuevo precio de venta del coche? [0,75 puntos]

a) Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y los costes. Como se venden x coches a 58000 euros cada uno los ingresos son $I(x) = 58x$ expresados en miles de euros.

$$B(x)=I(x)-C(x)=58x-\left(\frac{1}{2}x^2-64x+4704\right)=58x-\frac{1}{2}x^2+64x-4704$$

$$\boxed{B(x)=-\frac{1}{2}x^2+122x-4704}$$

b) Buscamos cuando el beneficio es 0.

$$\left.\begin{array}{r} B(x)=-\frac{1}{2}x^2+122x-4704 \\ B(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{1}{2}x^2+122x-4704=0\Rightarrow x^2-244x+9408=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{244\pm\sqrt{(-244)^2-4(9408)}}{2}=\frac{244\pm148}{2}=\begin{cases}\frac{244-148}{2}=48\\ \frac{244+148}{2}=192\end{cases}$$

Los beneficios son nulos cuando se fabrican y venden 48 o 192 coches.
En el intervalo (48, 192) tomamos $x = 100$ y comprobamos si los beneficios son positivos.

$$B(100)=-\frac{1}{2}100^2+12200-4.704=2496>0\,.$$

Los beneficios son positivos en el intervalo (48, 192).
Se deben fabricar entre 48 y 192 coches para tener beneficios.

Buscamos el máximo de la función beneficios usando la derivada.

$$B'(x)=-\frac{1}{2}2x+122=-x+122$$

$$B'(x)=0\Rightarrow -x+122=0\Rightarrow \boxed{x=122}$$

En $x = 122$ hay un punto crítico. Sustituimos en la derivada segunda.

$$B'(x) = -x + 122 \Rightarrow B''(x) = -1 \Rightarrow B''(122) = -1 < 0$$

La función tiene un máximo en *x = 122.*
Esto significa que los beneficios son máximos con la producción de 122 coches.
Como $B(122) = -\frac{1}{2}(122)^2 + 122 \cdot 122 - 4704 = 2738$ los beneficios máximos son de 2738000 €.

c) Llamamos *p* al nuevo precio del coche, por lo que los ingresos serían de *I(x) = p · x*, expresados en miles de euros.

La función beneficios es ahora $B(x) = px - \frac{1}{2}x^2 + 64x - 4704 = -\frac{1}{2}x^2 + (64 + p)x - 4704$.

Derivamos esta nueva función y sabemos que debe anularse en *x = 130*, por tener un máximo en *x = 130.*

$$\left.\begin{array}{r} B'(x) = -\frac{1}{2}2x + (64 + p) = -x + 64 + p \\ B'(130) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -130 + 64 + p = 0 \Rightarrow \boxed{p = 66}$$

El nuevo precio debe ser de 66000 € por coche.

6. Considere la función $f(x) = e^{3x}$.

a) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa x = 0. [1,25 puntos]

b) Obtenga la ecuación de esta recta tangente. [1,25 puntos]

a) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa x = 0 es el valor de la derivada de la función en $x = 0$.

$$f(x) = e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x} \Rightarrow \boxed{f'(0) = 3e^{3\cdot 0} = 3}$$

La pendiente pedida vale 3.

b) La recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa x = 0 tiene ecuación:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Hallamos *f(0)* y *f ´(0)* y obtenemos la expresión de la recta tangente.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = e^{3\cdot 0} = e^0 = 1 \\ f'(0) = 3e^{3\cdot 0} = 3e^0 = 3 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = 3x \Rightarrow \boxed{y = 3x + 1}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 3x + 1$.