Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2021-2022

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregiría el que ocupe el sexto lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz X que cumpla la ecuación matricial $AX-B^t=C+3X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B.

Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz A siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A. **(1 punto)**

b) Calcular la inversa de A para $x = 0$. **(1 punto)**

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x-2y+4z=3 \\ x+y-z=-2 \\ 2x-3y+2z=-1 \end{cases}$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

En una pastelería se elaboran pasteles de tipo A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4,5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5,5 euros. Sabiendo que solo dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El consumo eléctrico de una tienda $C(t)$ (en kilovatios) durante las 8 horas que permanece abierta depende del tiempo t (en horas) desde que abrió según la función:

$$C(t)=10+6Bt+6At^2+t^3 \qquad 1\le t\le 8$$

Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que su consumo máximo se alcanza a las 6 horas y asciende a 10 kilovatios.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

La cantidad de pescado capturado en cierto lago en pequeñas embarcaciones, *P(x)* (en kg) es una función de la longitud de la embarcación, x, que oscila entre 1 y 12 metros. La función que relaciona ambas magnitudes es la siguiente:

$$P(x)=3x^3-45x^2+144x+230 \quad 1\le x\le 12$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la cantidad de pescado capturado en función de la longitud de la embarcación utilizada. **(1,5 puntos)**

b) Representar gráficamente la función *P(x)*. **(0,5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x)=4-x^2$ y el eje OX entre $x=1$ y $x=3$. **(1 punto)**

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: **(1 punto)**

$$g(x)=\frac{3x^2+2}{4-x^2}$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Un club de fútbol tiene 200 abonados de gran antigüedad, 500 abonados con varios años de antigüedad y 300 nuevos abonados. Se pregunta a los abonados si están de acuerdo con una subida de los precios de los abonos a cambio de que el club ofrezca servicios adicionales. Se muestran favorables a la subida 80 abonados de gran antigüedad, 280 con varios años de antigüedad y 120 nuevos abonados. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un abonado sea nuevo y favorable a la subida. **(1 punto)**

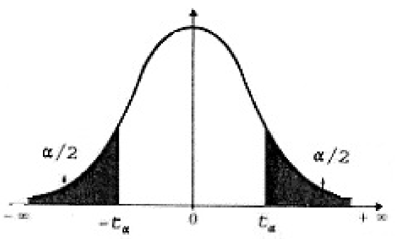
b) Calcular la probabilidad de que un abonado, que se sabe que es favorable a la subida, tenga una gran antigüedad en el club. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)

La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío se ajusta a distribución normal con desviación típica 1 tonelada. Con objeto de estimar la producción media de la zona, se registran los datos de 36 parcelas que arrojan una producción media de 8.7 toneladas. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para la producción media de tomates de las parcelas de la zona. Razonar la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de hogares españoles con conexión de fibra óptica. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor P = 0.5. Se pide determinar el número mínimo de hogares que hay que visitar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 99% y cuya longitud sea inferior a 0.14. Razonar la respuesta.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz X que cumpla la ecuación matricial $AX-B^t=C+3X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B.
Justificar la respuesta.

Despejamos en la ecuación la matriz X.

$$AX-B^t=C+3X \Rightarrow AX-3X=B^t+C \Rightarrow (A-3I)X=B^t+C \Rightarrow X=(A-3I)^{-1}(B^t+C)$$

Comprobamos si la matriz $A-3I$ es invertible.

$$A-3I=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A-3I|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

Es invertible, calculamos su inversa

$$(A-3I)^{-1}=\frac{Adj\left((A-3I)^T\right)}{|A-3I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Usamos este resultado para terminar de resolver la ecuación matricial

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^t+C=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X=(A-3I)^{-1}(B^t+C) \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-2 & 1-2 & 4-3 \\ -6+6 & -2+6 & -8+9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)
Sea A la matriz A siguiente:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & x & -1\\ x & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:
a) Determinar para qué valores de *x* existe la inversa de A. **(1 punto)**
b) Calcular la inversa de *A* para *x = 0*. **(1 punto)**

a) La matriz inversa existe si el determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & x & -1\\ x & -2 & 1\end{vmatrix}=x-x+2-x^2+1-2=-x^2+1$$

$$|A|=0\Rightarrow -x^2+1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

La matriz inversa de *A* existe para cualquier valor de *x* distinto de 1 y de –1.

b) Según lo visto en el apartado a) para *x = 0* la matriz inversa existe.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=-0^2+1=1$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}{1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)
Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x-2y+4z=3 \\ x+y-z=-2 \\ 2x-3y+2z=-1 \end{cases}$$

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x-2y+4z=3 \\ x+y-z=-2 \\ 2x-3y+2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ Ecuación\,2^a \leftrightarrow Ecuación\,1^a \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=-2 \\ 3x-2y+4z=3 \\ 2x-3y+2z=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{Ecuación\,2^a - 3 \cdot Ecuación\,1^a} \\ 3x & -2y & +4z & =3 \\ -3x & -3y & +3z & =6 \\ \hline & -5y & +7z & =9 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{Ecuación\,3^a - 2 \cdot Ecuación\,1^a} \\ 2x & -3y & +2z & =-1 \\ -2x & -2y & +2z & =4 \\ \hline & -5y & +4z & =3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=-2 \\ -5y+7z=9 \\ -5y+4z=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{Ecuación\,3^a - Ecuación\,2^a} \\ -5y & +4z & = 3 \\ 5y & -7z & = -9 \\ \hline & -3z & = -6 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=-2 \\ -5y+7z=9 \\ -3z=-6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z=-2 \\ -5y+7z=9 \\ \boxed{z=2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2=-2 \\ -5y+14=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -5y=-5 \rightarrow \boxed{y=1} \end{cases} \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

La solución del sistema planteado es *x* = *–1*, *y* = *1*, *z* = *2*.

PROBLEMA 4 (2 puntos)
En una pastelería se elaboran pasteles de tipo A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4,5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5,5 euros. Sabiendo que solo dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos.

Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = número de pasteles de tipo A, y = número de pasteles de tipo B.

Realizamos una tabla para organizar todos los datos proporcionados.

	Gramos de azúcar	Gramos de levadura	Beneficio
Pasteles tipo A (x)	6x	3x	4.5x
Pasteles tipo B (y)	4y	4y	5.5y
TOTAL	$6x+4y$	$3x+4y$	$4.5x+5.5y$

Se desea maximizar los beneficios que vienen expresados por la función:

$$B(x,y)=4.5x+5.5y$$

Las restricciones son:

"Dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura" →
$6x+4y\le 240;\ 3x+4y\le 180$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\quad y\ge 0$

Reunimos todas estas inecuaciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r}6x+4y\le 240\\ 3x+4y\le 180\\ x\ge 0;\quad y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+2y\le 120\\ 3x+4y\le 180\\ x\ge 0;\quad y\ge 0\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+2y=120$

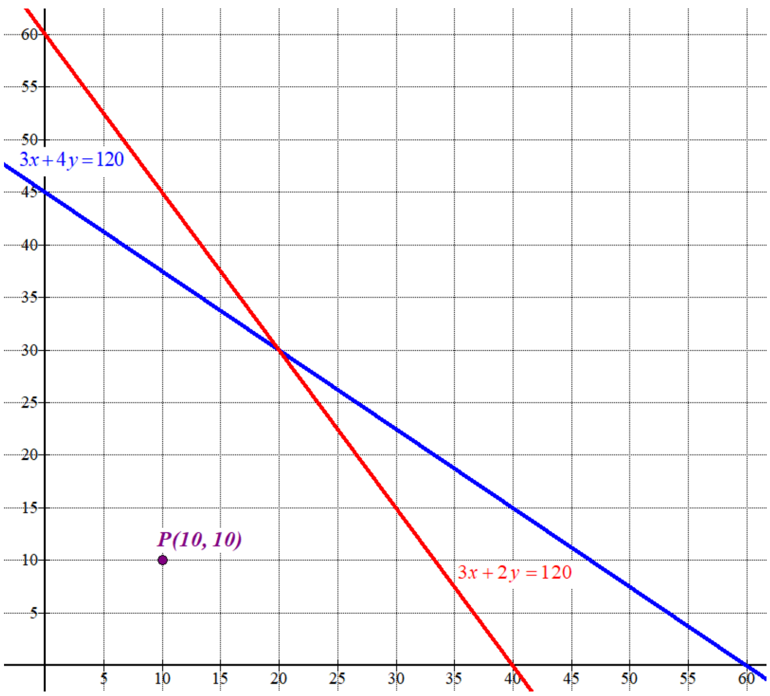
x	$y=\dfrac{120-3x}{2}$
0	60
40	0

$3x+4y=180$

x	$y=\dfrac{180-3x}{4}$
0	45
60	0

$x\ge 0;\quad y\ge 0$

Primer cuadrante

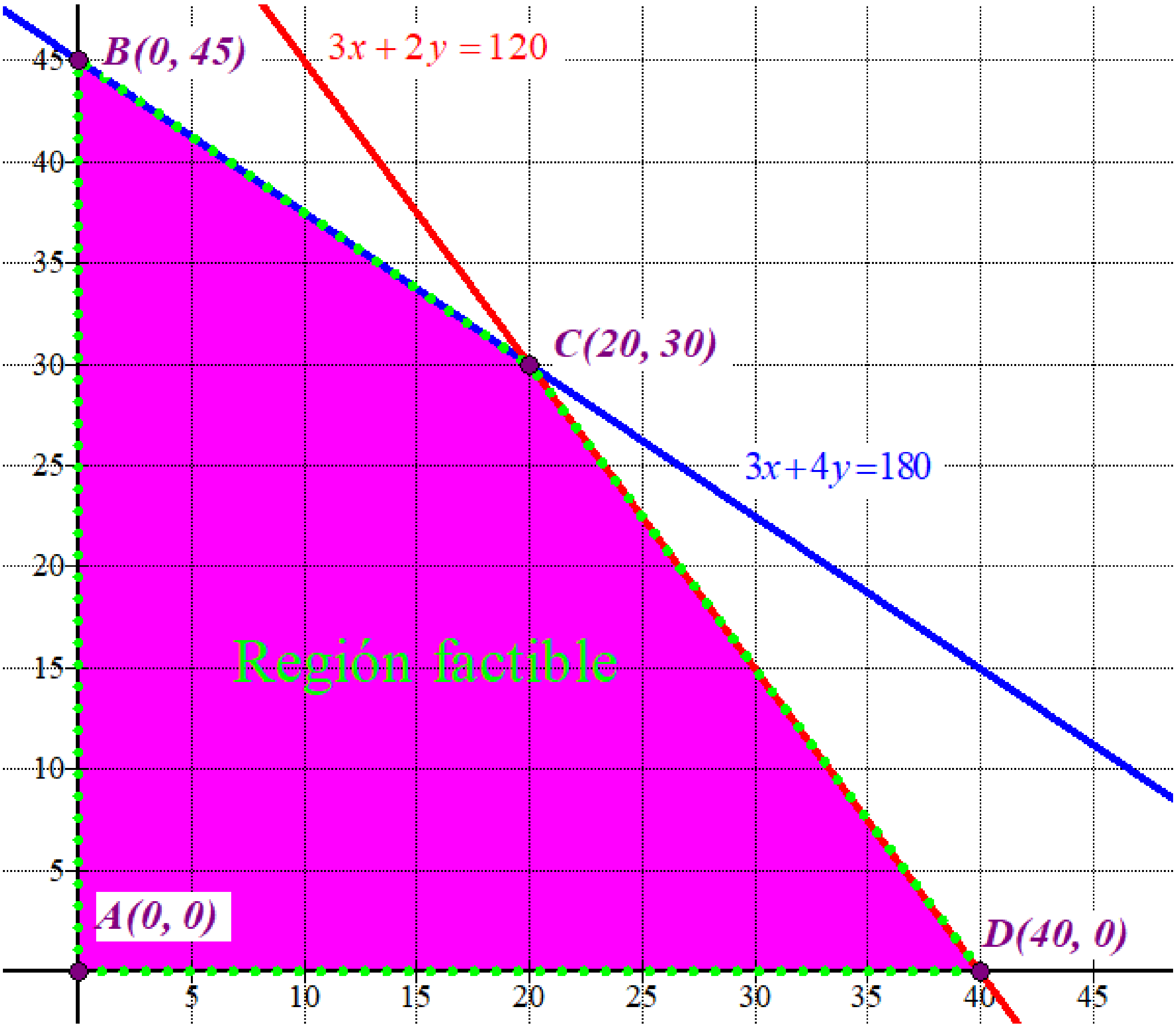


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+2y\leq 120 \\ 3x+4y\leq 180 \\ x\geq 0; \quad y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30+20\leq 120 \\ 30+40\leq 180 \\ 10\geq 0; \quad 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡}\textit{Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del punto C resolviendo el sistema planteado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y=120 \\ 3x+4y=180 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y=120 \\ -3x-4y=-180 \end{array}\right\}$$

$$-2y=-60 \Rightarrow \boxed{y=30} \Rightarrow 3x+60=120 \Rightarrow 3x=60 \Rightarrow \boxed{x=20} \Rightarrow \boxed{C(20,30)}$$

El valor máximo de la función Beneficios $B(x,y)=4.5x+5.5y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 45) → $B(0,45)=0+5.5\cdot 45=247.5$

C(20, 30) → $B(20,30)=4.5\cdot 20+5.5\cdot 30=255$ ¡Máximo!

D(40, 0) → $B(40,0)=4.5\cdot 40+0=180$

El valor máximo es 255 y se obtiene en el vértice C(20, 30).

El beneficio máximo se obtiene vendiendo 20 pasteles del tipo A y 30 del tipo B. Siendo 255 € los beneficios máximos que se obtienen con esta venta.

PROBLEMA 5 (2 puntos)
El consumo eléctrico de una tienda *C(t)* (en kilovatios) durante las 8 horas que permanece abierta depende del tiempo t (en horas) desde que abrió según la función:

$$C(t) = 10 + 6Bt + 6At^2 + t^3 \qquad 1 \le t \le 8$$

Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que su consumo máximo se alcanza a las 6 horas y asciende a 10 kilovatios.

Si el consumo máximo es en $t = 6$ debe de anularse la derivada en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l} C'(t) = 6B + 12At + 3t^2 \\ C'(6) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 6B + 12A \cdot 6 + 3 \cdot 6^2 \Rightarrow 0 = 6B + 72A + 108 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = B + 12A + 18}$$

Además debe cumplirse que C(6) = 10.

$$\left.\begin{array}{l} C(t) = 10 + 6Bt + 6At^2 + t^3 \\ C(6) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 = 10 + 6B \cdot 6 + 6A \cdot 6^2 + 6^3 \Rightarrow 0 = 36B + 216A + 216 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = B + 6A + 6}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 0 = B + 12A + 18 \\ 0 = B + 6A + 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = B + 12A + 18 \\ -6A - 6 = B \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = -6A - 6 + 12A + 18 \Rightarrow 6A + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6A = -12 \Rightarrow \boxed{A = -2} \Rightarrow \boxed{B = 12 - 6 = 6}$$

Los valores buscados son $A = -2$ y $B = 6$.

Comprobamos que para los valores obtenidos la función tiene un máximo en $t = 6$, es decir, la segunda derivada es negativa.

$$C(t) = 10 + 36t - 12t^2 + t^3 \Rightarrow C'(t) = 36 - 24t + 3t^2 \Rightarrow C''(t) = -24 + 6t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C''(6) = -24 + 6 \cdot 6 = 36 - 24 = 12 > 0 \Rightarrow \text{¡¡¡En } t = 6 \text{ hay un mínimo!!!}$$

PROBLEMA 6 (2 puntos)

La cantidad de pescado capturado en cierto lago en pequeñas embarcaciones, *P(x)* (en kg) es una función de la longitud de la embarcación, x, que oscila entre 1 y 12 metros. La función que relaciona ambas magnitudes es la siguiente:

$$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230 \quad 1 \leq x \leq 12$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la cantidad de pescado capturado en función de la longitud de la embarcación utilizada. **(1,5 puntos)**

b) Representar gráficamente la función *P(x)*. **(0,5 puntos)**

a) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230 \Rightarrow P'(x) = 9x^2 - 90x + 144$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 90x + 144 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(16)}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10+6}{2} = 8 \in [1,12] \\ \frac{10-6}{2} = 2 \in [1,12] \end{cases}$$

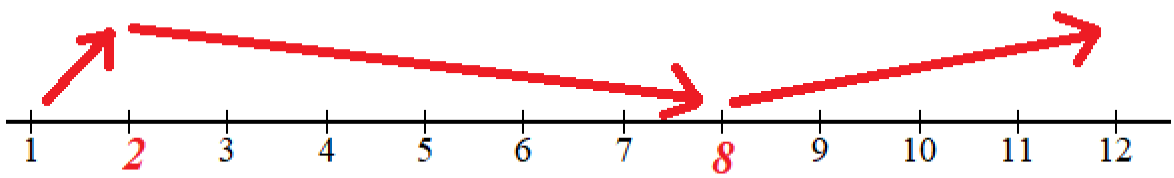
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores en el intervalo $[1,12]$.

En el intervalo $(1,2)$ tomamos *x = 1.5* y la derivada vale $P'(1.5) = 9 \cdot 1.5^2 - 90 \cdot 1.5 + 144 = 29.25 > 0$. La función crece en $(1,2)$.

En el intervalo $(2,8)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $P'(3) = 9 \cdot 3^2 - 90 \cdot 3 + 144 = -45 < 0$. La función decrece en $(2,8)$.

En el intervalo $(8,12)$ tomamos *x = 10* y la derivada vale $P'(10) = 900 - 900 + 144 = 144 > 0$. La función crece en $(8,12)$.

La función sigue el esquema siguiente:

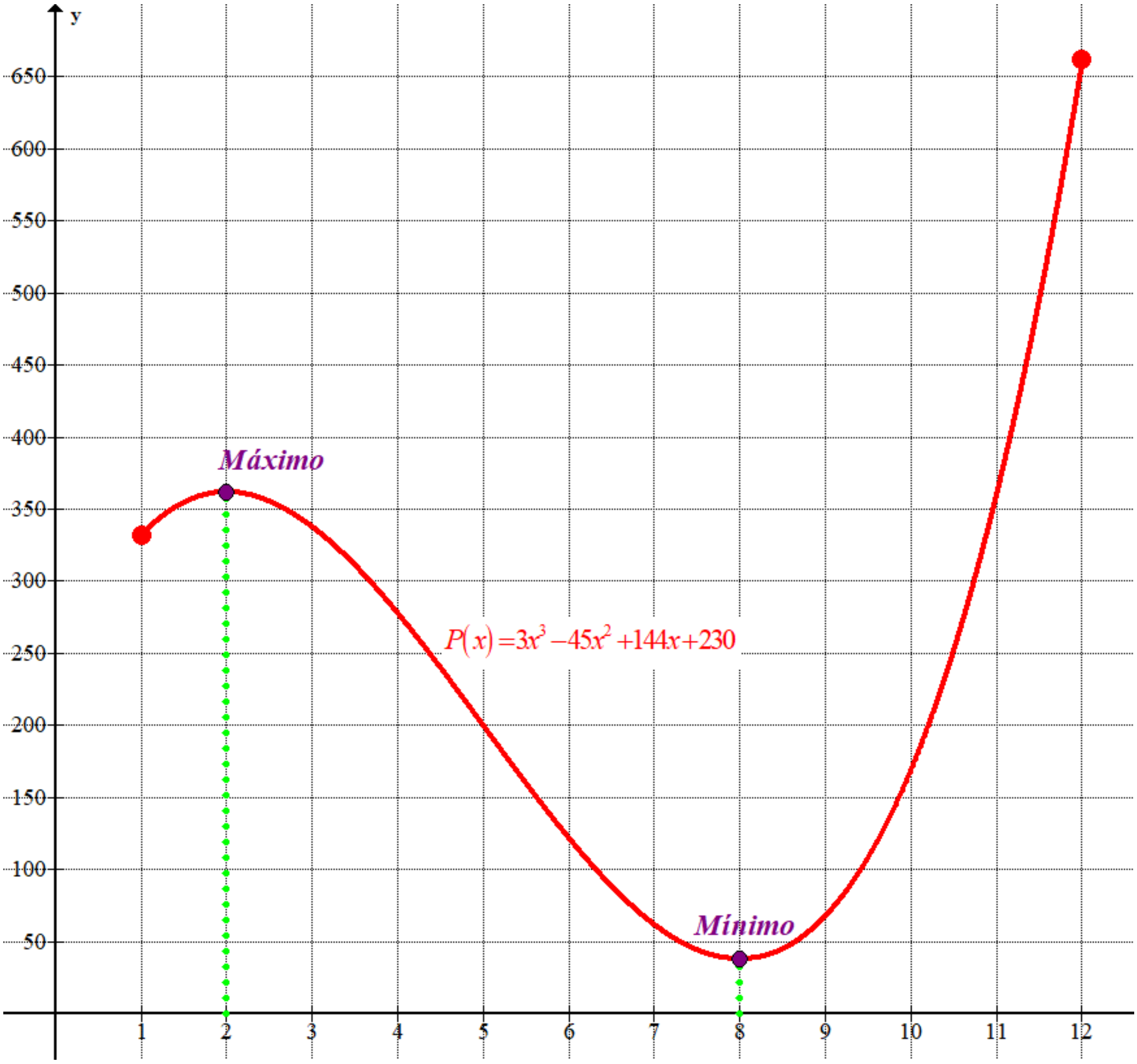


La función crece en $(1,2) \cup (8,12)$ y decrece en $(2,8)$.

El número de capturas crece entre 1 y 2 metros, asi como entre 8 y 12 metros. Decrece entre 2 y 8 metros.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la función.

x	$P(x)=3x^3-45x^2+144x+230$
1	332
2	362
4	278
8	38
12	662



PROBLEMA 7 (2 puntos)

a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x)=4-x^2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$. **(1 punto)**

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: **(1 punto)**

$$g(x)=\frac{3x^2+2}{4-x^2}$$

a) Averiguamos si la gráfica de la función corta el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=4-x^2 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

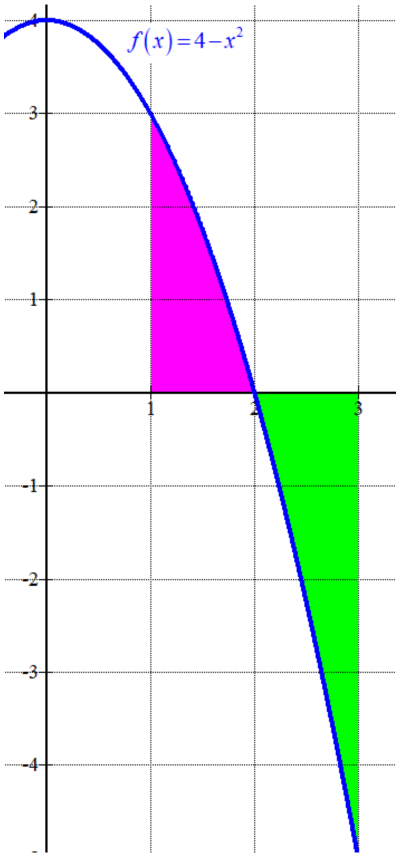
Como $x = 2$ está comprendido entre 1 y 3 el área se calcula con la suma del valor absoluto de la integral definida de la función entre 1 y 2 y el valor absoluto de la integral definida de la función entre 2 y 3.

$$Área=\left|\int_1^2 4-x^2dx\right|+\left|\int_2^3 4-x^2dx\right|=\left|\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2\right|+\left|\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_2^3\right|=$$

$$=\left|\left[8-\frac{2^3}{3}\right]-\left[4-\frac{1^3}{3}\right]\right|+\left|\left[12-\frac{3^3}{3}\right]-\left[8-\frac{2^3}{3}\right]\right|=$$

$$=\left|8-\frac{8}{3}-4+\frac{1}{3}\right|+\left|12-9-8+\frac{8}{3}\right|=\left|4-\frac{7}{3}\right|+\left|-5+\frac{8}{3}\right|=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=\boxed{4u^2}$$

No pide dibujar la región, pero lo hacemos para comprobar la bondad de la solución.



b) El dominio de la función $g(x)=\frac{3x^2+2}{4-x^2}$ son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$g(x)=\frac{3x^2+2}{4-x^2} \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-2,+2\}$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=-2$?

$\lim_{x\to -2} g(x)=\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+2}{4-x^2}=\frac{12+2}{0}=\infty$. $x=-2$ es asíntota vertical.

¿ $x=2$?

$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2}{4-x^2}=\frac{12+2}{0}=\infty$. $x=2$ es asíntota vertical.

Las asíntotas verticales son $x=-2$ y $x=2$.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{3+0}{0-1}=-3$$

La asíntota horizontal es $y=-3$

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No existe pues existe asíntota horizontal.

La función tiene dos asíntotas verticales: $x=-2$, $x=2$ y una asíntota horizontal $y=-3$.

PROBLEMA 8 (2 puntos)
Un club de fútbol tiene 200 abonados de gran antigüedad, 500 abonados con varios años de antigüedad y 300 nuevos abonados. Se pregunta a los abonados si están de acuerdo con una subida de los precios de los abonos a cambio de que el club ofrezca servicios adicionales. Se muestran favorables a la subida 80 abonados de gran antigüedad, 280 con varios años de antigüedad y 120 nuevos abonados. Se pide, razonando la respuesta:
a) Calcular la probabilidad de que un abonado sea nuevo y favorable a la subida. **(1 punto)**
b) Calcular la probabilidad de que un abonado, que se sabe que es favorable a la subida, tenga una gran antigüedad en el club. **(1 punto)**

Realizamos una tabla de contingencia para organizar la información proporcionada.

	Favorables a la subida	Contrarios a la subida	
Abonados de gran antigüedad	**80**		**200**
Abonados con varios años de antigüedad	**280**		**500**
Nuevos abonados	**120**		**300**

Completamos la tabla.

	Favorables a la subida	Contrarios a la subida	
Abonados de gran antigüedad	**80**	**120**	**200**
Abonados con varios años de antigüedad	**280**	**220**	**500**
Nuevos abonados	**120**	**180**	**300**
	480	**520**	**1000**

Llamamos G = "Ser abonado de gran antigüedad", V = "Ser abonado con varios años de antigüedad", N = "Ser nuevo abonado", F = "Ser favorable a la subida".

a) Aplicamos la regla de Laplace. De los 1000 abonados solo 120 son nuevos abonados favorables a la subida.

$$P(N \cap F) = \frac{120}{1000} = \boxed{0.12}$$

b) Hay 480 abonados favorables a la subida y de estos hay 80 que son abonados de gran antigüedad. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(G / F) = \frac{80}{480} = \boxed{\frac{1}{6} \simeq 0.167}$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)
La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío se ajusta a distribución normal con desviación típica 1 tonelada. Con objeto de estimar la producción media de la zona, se registran los datos de 36 parcelas que arrojan una producción media de 8.7 toneladas. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para la producción media de tomates de las parcelas de la zona. Razonar la respuesta.

Sea X = La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío (en toneladas).

X = N(μ, 1)

El tamaño de la muestra es n = 36 y la media de la muestra es $\bar{x} = 8.7$ toneladas.

Buscamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90%.
Un nivel de confianza del 90% significa que 1 – ∝ = 0.90 → ∝ = 0.10

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	[illegible]	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 1.645**

Calculamos el error del intervalo de confianza.

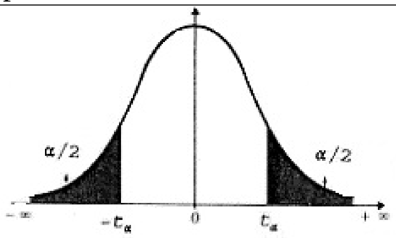
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{1}{\sqrt{36}} \simeq 0.2742$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(8.7 - 0.2742,\ 8.7 + 0.2742\right) = \left(8.4258,\ 8.9742\right).$$

Con un nivel de confianza del 90 % la producción media de tomates está entre 8425.8 kilos y 8974.2 kilos.

PROBLEMA 10 (2 puntos)
Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de hogares españoles con conexión de fibra óptica. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor P = 0.5. Se pide determinar el número mínimo de hogares que hay que visitar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 99% y cuya longitud sea inferior a 0.14. Razonar la respuesta.



El nivel de confianza del 99% significa que $1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01$

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	[illegible]	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 2.576**

Como piden que la longitud del intervalo de confianza sea inferior a 0.14 y el error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza tenemos que el error debe ser inferior a 0.07.

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{P \cdot Q}{n}} \Rightarrow 0.07 = 2.576 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.07}{2.576} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.07}{2.576}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow \boxed{n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.07}{2.576}\right)^2} = 338.56}$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y mayor que el obtenido tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 339 hogares españoles.