

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A. 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores de los parámetros reales a , b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.
b) Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

A. 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- a) Obtenga los coeficientes reales a , b y c , de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.

- b) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, calcule la integral $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$

A. 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}$$

- a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

A. 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

- a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.
b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

A. 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas.

- a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ .
b) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, \bar{X} , esté entre 28 y 30 kilómetros.

B. 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

B. 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + z &= 2a - 1 \\ 2x + y + az &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \end{cases}$$

- Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
- Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

B. 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - \frac{1}{9} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x+1}{x^2-9} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Determine el dominio de $f(x)$ y calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.
- Para $a = 0$ determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

B. 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(C) = 0'4$, $P(D) = 0'6$ y $P(C \cup D) = 0'8$. Calcule:

- $P(C|D)$.
- $P(\overline{C \cap D}|C)$.

B. 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

- Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95%.
- Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.