Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2021-2022

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

upna

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Calcule $A\cdot B^t$ y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa. (3 puntos)

ii) Determine las matrices X e Y que verifican el sistema: $\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X-2Y=B \end{cases}$. (7 puntos)

EJERCICIO 2:

Un joven estudiante ganó 20000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20% y no más del 50% del premio. Un asesor le aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7%, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4%. El estudiante decide invertir no más de 8000 euros en la cartera C1 y al menos 3000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2500 euros en la cartera C1. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$.

i) Estudie la continuidad de *f(x)*, clasificando los puntos de discontinuidad. (3 puntos)
ii) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$. (4 puntos)
iii) Calcule $\int f(x)\,dx$. (3 puntos)

EJERCICIO 4:

Sea la función $f(x)=x\cdot(x-3)^2$.

i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 puto)
ii) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 putos)
iii) Dibuje el recinto limitado por la función *f(x)* y el eje OX. (2 puntos)
iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

EJERCICIO 5:

Una empresa vende tres productos (A, B y C) que distribuye a sus clientes a través de dos empresas de transporte (*Trans* y *Logis*). El año pasado, la empresa realizó 1500 ventas y encargó a *Trans* el 60% del reparto y a *Logis* el 40%. El 20% de los productos distribuidos por *Trans* fueron tipo A, el 50% fueron tipo B y el 30% tipo C. Para la empresa *Logis*, estos porcentajes fueron 40%, 35% y 25%, respectivamente.

i) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Calcule la probabilidad de que sea un producto tipo B y distribuido por *Trans*. (3 puntos)

ii) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Sabiendo que es un producto tipo C, calcule la probabilidad de que fuera distribuido por *Logis*. (4 puntos)

iii) Se seleccionan al azar (sin reemplazamiento) dos ventas realizadas el año pasado. Calcule la probabilidad de que las dos ventas fueran distribuidas por *Trans*. (3 puntos)

EJERCICIO 6:

El consumo energético mensual (en kWh) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400. Se elige una muestra de 64 hogares, obteniéndose una suma total del consumo de 17280 kWh.

i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el consumo energético medio en hogares. (5 puntos)

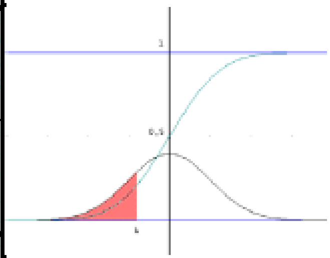
ii) Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo se reduzca a la mitad. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



SOLUCIONES

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Calcule $A\cdot B^t$ y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa. (3 puntos)

ii) Determine las matrices X e Y que verifican el sistema: $\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X-2Y=B \end{cases}$. (7 puntos)

i)

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-1 & -4-4 \\ -9+1-5 & 6+4-1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\cdot B^t=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -13 & 9 \end{pmatrix}}$$

Para comprobar que tiene inversa vemos si su determinante es no nulo.

$$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -13 & 9 \end{vmatrix}=45-104=-59\neq 0$$

Como el determinante es no nulo la matriz $A\cdot B^t$ tiene inversa.

ii) Obtenemos la expresión de las matrices X e Y solución del sistema.

$$\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X-2Y=B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \times 3 \rightarrow \\ \times(-2) \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 6X-9Y=3A \\ -6X+4Y=-2B \end{cases} \Rightarrow$$

$$-5Y=3A-2B \Rightarrow \boxed{Y=\frac{1}{5}(-3A+2B)}$$

$$\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X-2Y=B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \times 2 \rightarrow \\ \times(-3) \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 4X-6Y=2A \\ -9X+6Y=-3B \end{cases} \Rightarrow$$

$$-5X=2A-3B \Rightarrow \boxed{X=\frac{1}{5}(-2A+3B)}$$

Sustituimos los valores de A y B.

$$Y=\frac{1}{5}(-3A+2B)=\frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix}-6 & 3 & 0\\ 9 & -3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 2 & 10\\ -4 & 8 & 2\end{pmatrix}\right]$$

$$\boxed{Y=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 5 & 10\\ 5 & 5 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}}$$

$$X=\frac{1}{5}(-2A+3B)=\frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 6 & -2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 3 & 15\\ -6 & 12 & 3\end{pmatrix}\right]$$

$$\boxed{X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 5 & 15\\ 0 & 10 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2:
Un joven estudiante ganó 20000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20% y no más del 50% del premio. Un asesor le aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7%, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4%. El estudiante decide invertir no más de 8000 euros en la cartera C1 y al menos 3000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?
i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2500 euros en la cartera C1. (2 puntos)

i) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = “inversión en cartera C1”. y = “inversión en cartera C2”.

Se desea maximizar la rentabilidad. La función objetivo sería:

“*La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7%, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4%*” → $f(x,y)=0.07x+0.04y$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

“*Un joven estudiante ganó 20000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20% y no más del 50% del premio*” → $0.20\cdot 20000 \le x+y \le 0.50\cdot 20000$

“*El estudiante decide invertir no más de 8000 euros en la cartera C1 y al menos 3000 euros en la cartera C2*” → $x \le 8000; \quad y \ge 3000$

“E*l asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1*” → $y \ge x$

Además, la inversión son valores positivos → $x \ge 0; \quad y \ge 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0.20\cdot 20000 \le x+y \le 0.50\cdot 20000 \\ x \le 8000; \quad y \ge 3000 \\ y \ge x \\ x \ge 0; \quad y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4000 \le x+y \le 10000 \\ x \le 8000; \quad y \ge 3000 \\ y \ge x \\ x \ge 0; \quad y \ge 0 \end{array}\right\}$$

ii) Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$x+y=4000$

x	$y=4000-x$
0	4000
3000	1000
4000	0

$x+y=10000$

x	$y=10000-x$
0	10000
7000	3000
10000	0

$x=8000$

$x=8000$	y
8000	0
8000	3000

$y=3000$

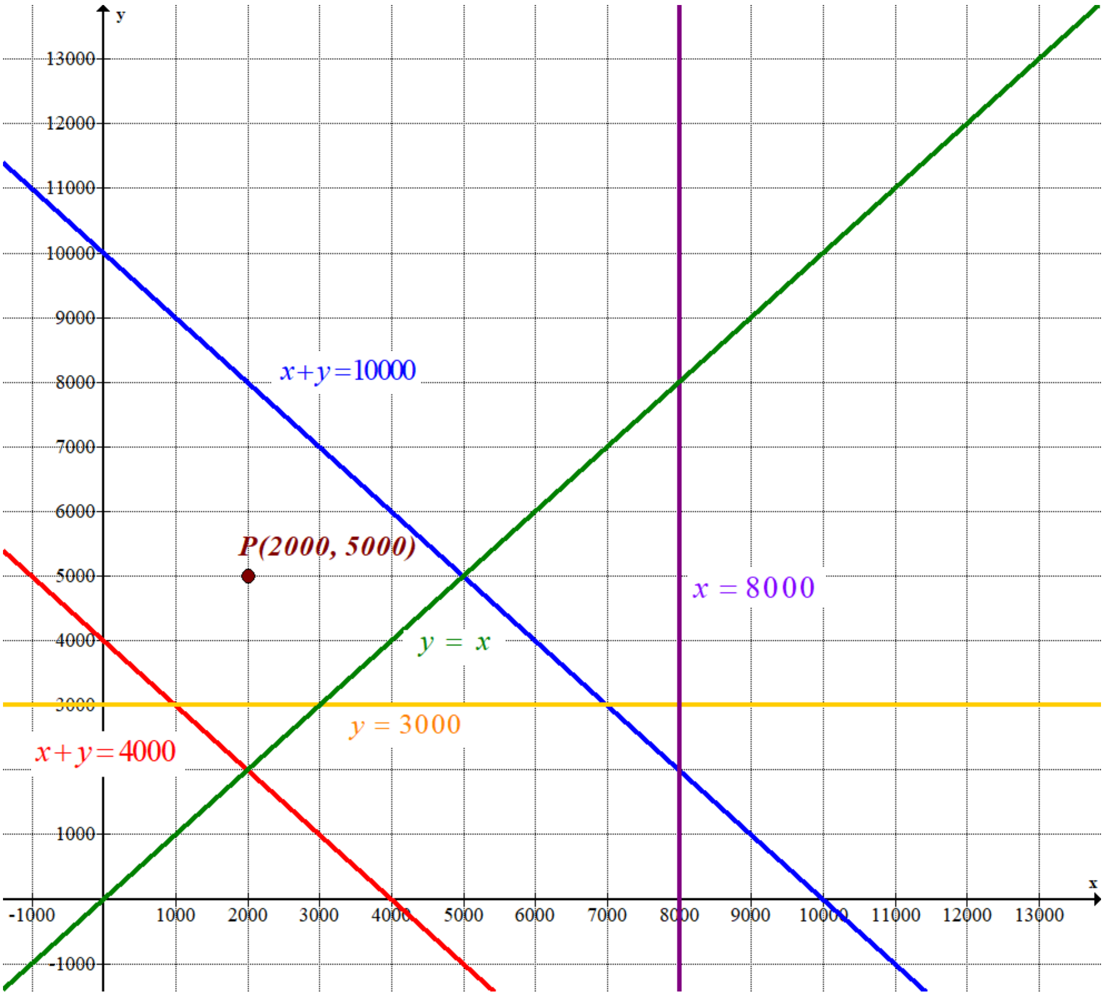
x	$y=3000$
0	3000
8000	3000

$y=x$

x	$y=x$
0	0
5000	5000

$x\geq 0;\quad y\geq 0$

Primer cuadrante

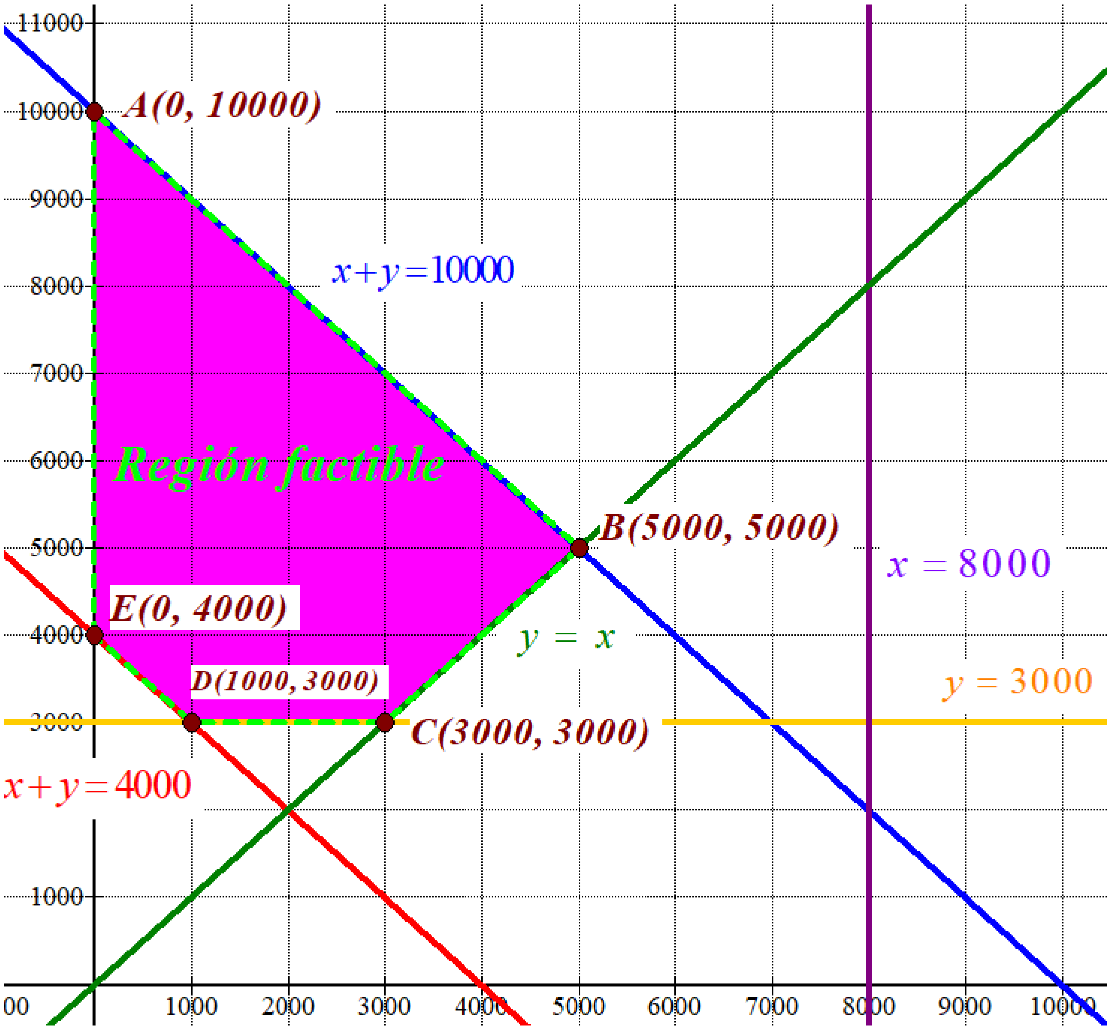


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 4000\leq x+y \\ x+y\leq 10000 \\ x\leq 8000;\quad y\geq 3000 \\ y\geq x \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada en el primer cuadrante por debajo de la recta azul y por encima de las rectas roja, verde y naranja. La recta vertical no es frontera de la región factible.

Comprobamos que el punto P(2000, 5000) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4000 \leq 2000+5000 \\ 2000+5000 \leq 10000 \\ 2000 \leq 8000; \quad 5000 \geq 3000 \\ 5000 \geq 2000 \\ 2000 \geq 0; \quad 5000 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo de productividad.

A(0,10000) → $f(0,10000)=0+0.04\cdot 10000=400$

B(5000, 5000) → $f(5000,5000)=0.07\cdot 5000+0.04\cdot 5000=350+200=550$ ¡Máximo!

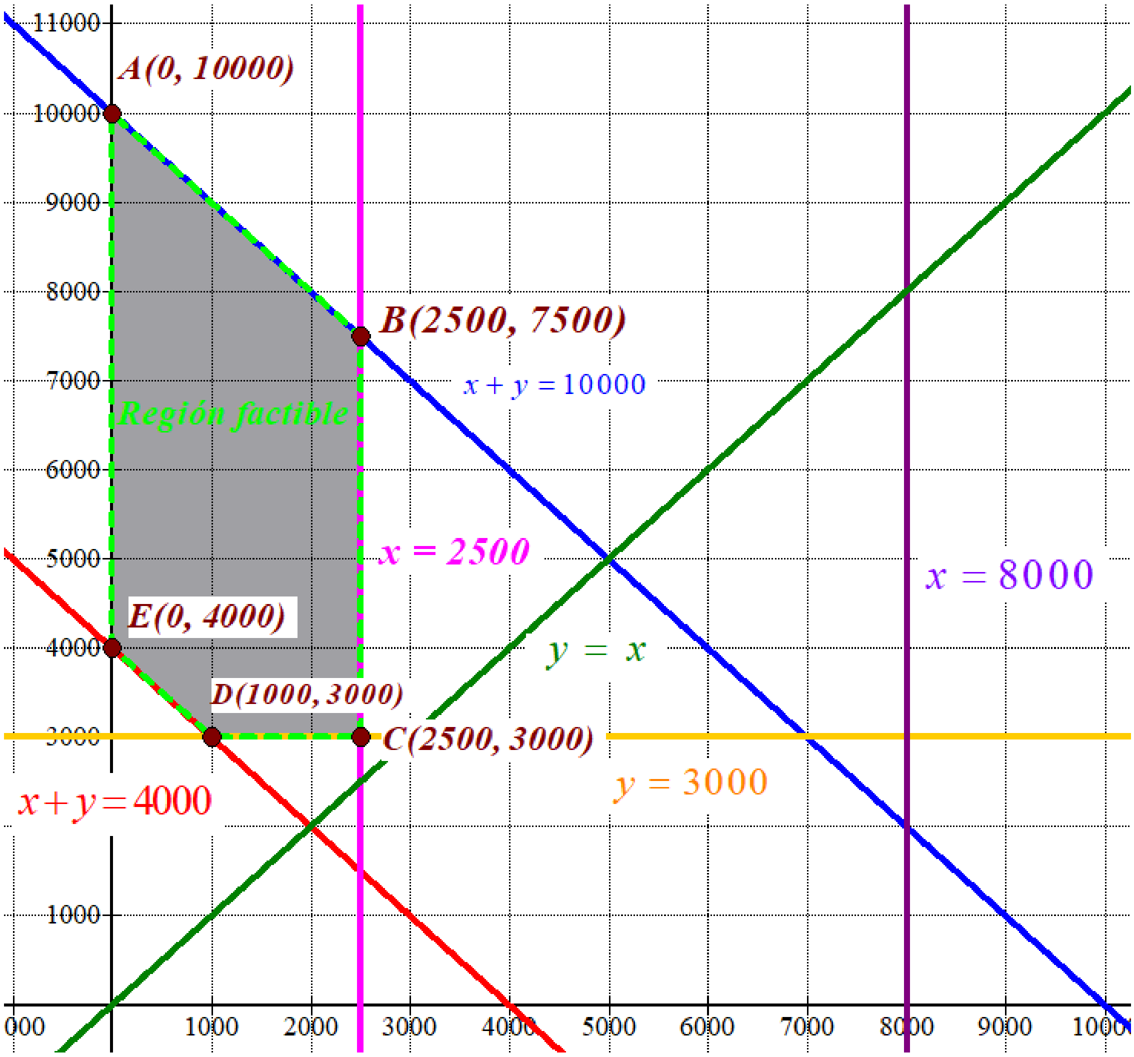
C(3000, 3000) → $f(3000,3000)=0.07\cdot 3000+0.04\cdot 3000=210+120=330$

D(1000, 3000) → $f(1000,3000)=0.07\cdot 1000+0.04\cdot 3000=70+120=190$

E(0, 4000) → $f(0,4000)=0+0.04\cdot 4000=160$

La máxima rentabilidad es de 550 € y se obtiene en el punto B(5000, 5000).
Con 5000 euros invertidos en la cartera C1 y otros 5000 euros en la cartera C2 se obtiene la máxima rentabilidad de 550 €.

iii) Si se añade la restricción "*no invertir más de 2500 € en la cartera C1*" → $x \leq 2500$
La nueva región factible sería:



Si valoramos la función en los nuevos vértices tenemos que:

A(0,10000) → $f(0,10000) = 0 + 0.04 \cdot 10000 = 400$
B(2500, 7500) → $f(2500,7500) = 0.07 \cdot 2500 + 0.04 \cdot 7500 = 175 + 300 = 475$ ¡Máximo!
C(2500, 3000) → $f(2500,3000) = 0.07 \cdot 2500 + 0.04 \cdot 3000 = 175 + 120 = 295$
D(1000, 3000) → $f(1000,3000) = 0.07 \cdot 1000 + 0.04 \cdot 3000 = 70 + 120 = 190$
E(0, 4000) → $f(0,4000) = 0 + 0.04 \cdot 4000 = 160$

Con la nueva situación la solución que maximiza la rentabilidad sigue estando a la derecha de la región factible y evidentemente en el vértice con las coordenadas de mayor valor, el B(2500, 7500), siendo este nuevo beneficio de 475 €. Menor que el anterior pues he limitado la inversión en la cartera C1.

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$.

i) Estudie la continuidad de *f(x)*, clasificando los puntos de discontinuidad. (3 puntos)

ii) Calcule la ecuación de la recta tangente en *x = 1*. (4 puntos)

iii) Calcule $\int f(x)\,dx$. (3 puntos)

i) La función es continua salvo en los valores que anulan el denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \Rightarrow Dominio\ f(x)=\mathbb{R}-\{-2,+2\}$$

En *x = –2* la discontinuidad es inevitable de salto infinito.

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x}{x^2-4}=\frac{-2}{0}=\infty$$

En *x = 2* la discontinuidad es inevitable de salto infinito.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2}{0}=\infty$$

ii) La ecuación de la recta tangente en *x = 1* es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-4)-2x\cdot x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{1}{1^2-4}=\dfrac{-1}{3} \\ f'(1)=\dfrac{-1^2-4}{(1^2-4)^2}=\dfrac{-5}{9} \\ y-f(1)=f'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{9}(x-1) \Rightarrow y+\frac{1}{3}=-\frac{5x}{9}+\frac{5}{9} \Rightarrow 9y+3=-5x+5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{9y+5x-2=0}$$

iii)

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{x}{x^2-4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-4}dx=\boxed{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|+K}$$

EJERCICIO 4:

Sea la función $f(x)=x\cdot(x-3)^2$.

i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
ii) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)
iii) Dibuje el recinto limitado por la función *f(x)* y el eje OX. (2 puntos)
iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

i) $x=0 \Rightarrow f(0)=0\cdot(0-3)^2=0 \Rightarrow (0,0)$

$$y=0 \Rightarrow x\cdot(x-3)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow (0,0) \text{ Punto de corte con los ejes OX y OY} \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow (3,0) \text{ Punto de corte con el eje OX} \end{cases}$$

ii) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=x\cdot(x-3)^2=x\left(x^2-6x+9\right)=x^3-6x^2+9x \Rightarrow f'(x)=3x^2-12x+9$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x+9=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} \frac{4+2}{2}=\boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=x} \end{cases}$$

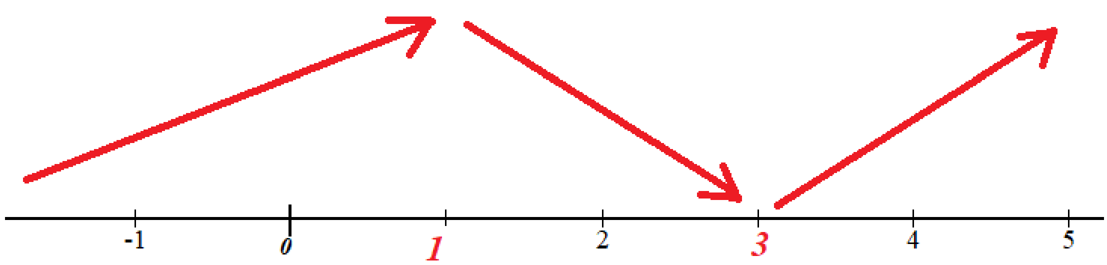
La función presenta dos puntos críticos. Comprobamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=3\cdot 0^2-12\cdot 0+9=9>0$. La función crece en $(-\infty,1)$.

En el intervalo $(1,3)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+9=-3<0$. La función decrece en $(1,3)$.

En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos *x = 4* y la derivada vale $f'(4)=3\cdot 4^2-12\cdot 4+9=9>0$. La función crece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



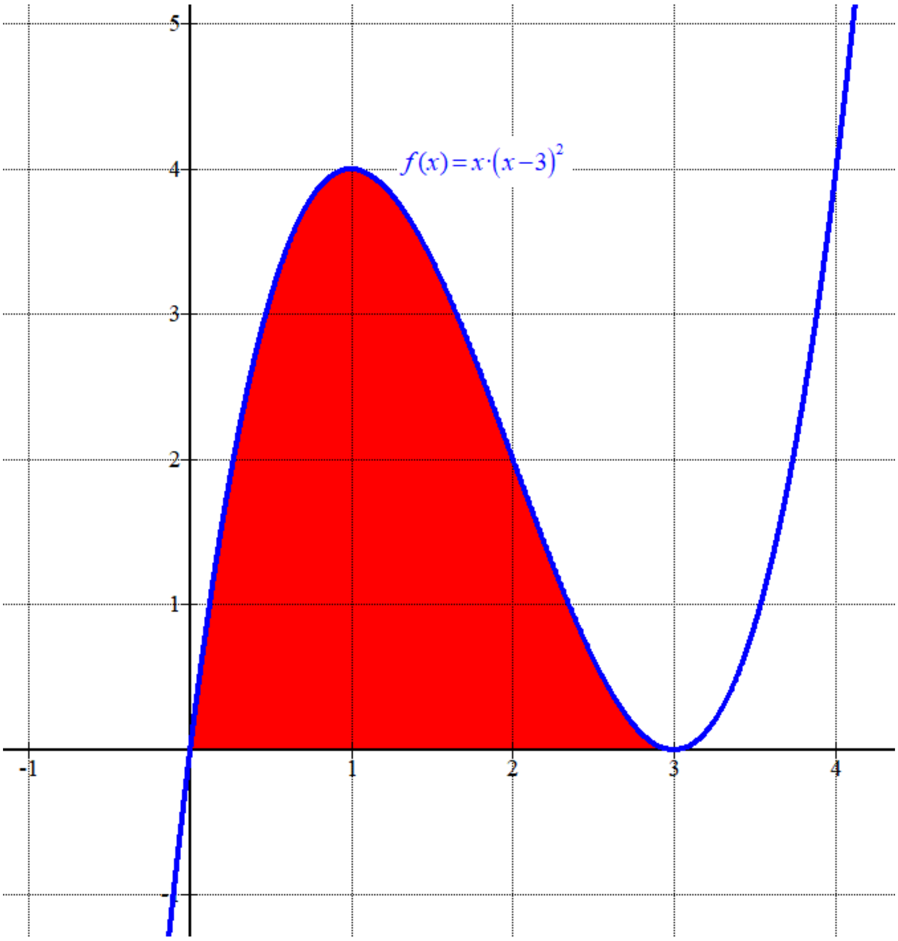
$f(1)=1\cdot(1-3)^2=4$. La función tiene un máximo relativo en el punto (1, 4).

$f(3)=3\cdot(3-3)^2=0$. La función tiene un mínimo relativo en el punto (3, 0).

La función crece en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ y decrece en $(1,3)$.

iii) La función corta el eje OX en $x = 0$ y en $x = 3$.
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la región del plano limitada por la gráfica y el eje OX.

x	$y=x\cdot(x-3)^2$
-1	-16
0	0
1	4
2	2
3	0
4	4



iv)

$$\acute{A}rea=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 x^3-6x^2+9x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_0^3=$$

$$=\left[\frac{3^4}{4}-2\cdot 3^3+\frac{9}{2}\cdot 3^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^3+\frac{9}{2}0^2\right]=\frac{81}{4}-54+\frac{81}{2}=\frac{27}{4}=\boxed{6.75\ u^2}$$

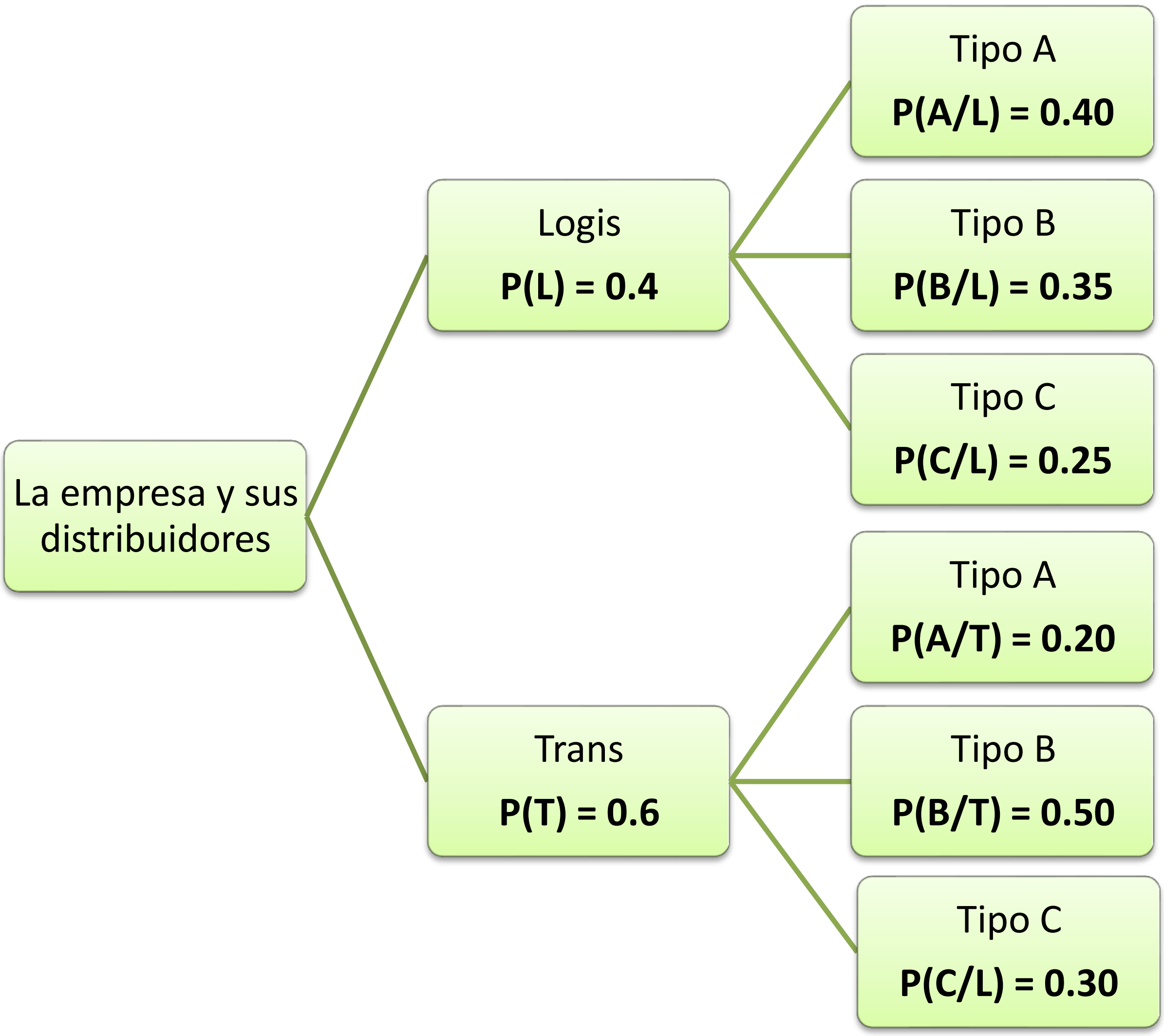
EJERCICIO 5:
Una empresa vende tres productos (A, B y C) que distribuye a sus clientes a través de dos empresas de transporte (*Trans* y *Logis*). El año pasado, la empresa realizó 1500 ventas y encargó a *Trans* el 60% del reparto y a *Logis* el 40%. El 20% de los productos distribuidos por *Trans* fueron tipo A, el 50% fueron tipo B y el 30% tipo C. Para la empresa *Logis*, estos porcentajes fueron 40%, 35% y 25%, respectivamente.

i) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Calcule la probabilidad de que sea un producto tipo B y distribuido por *Trans*. (3 puntos)

ii) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Sabiendo que es un producto tipo C, calcule la probabilidad de que fuera distribuido por *Logis*. (4 puntos)

iii) Se seleccionan al azar (sin reemplazamiento) dos ventas realizadas el año pasado. Calcule la probabilidad de que las dos ventas fueran distribuidas por *Trans*. (3 puntos)

Llamamos L = "Ser distribuido por Trans", L = "Ser distribuido por Logis", A = "Ser un producto tipo A", B = "Ser un producto tipo B", C = "Ser un producto tipo C"
Realizamos un diagrama de árbol.



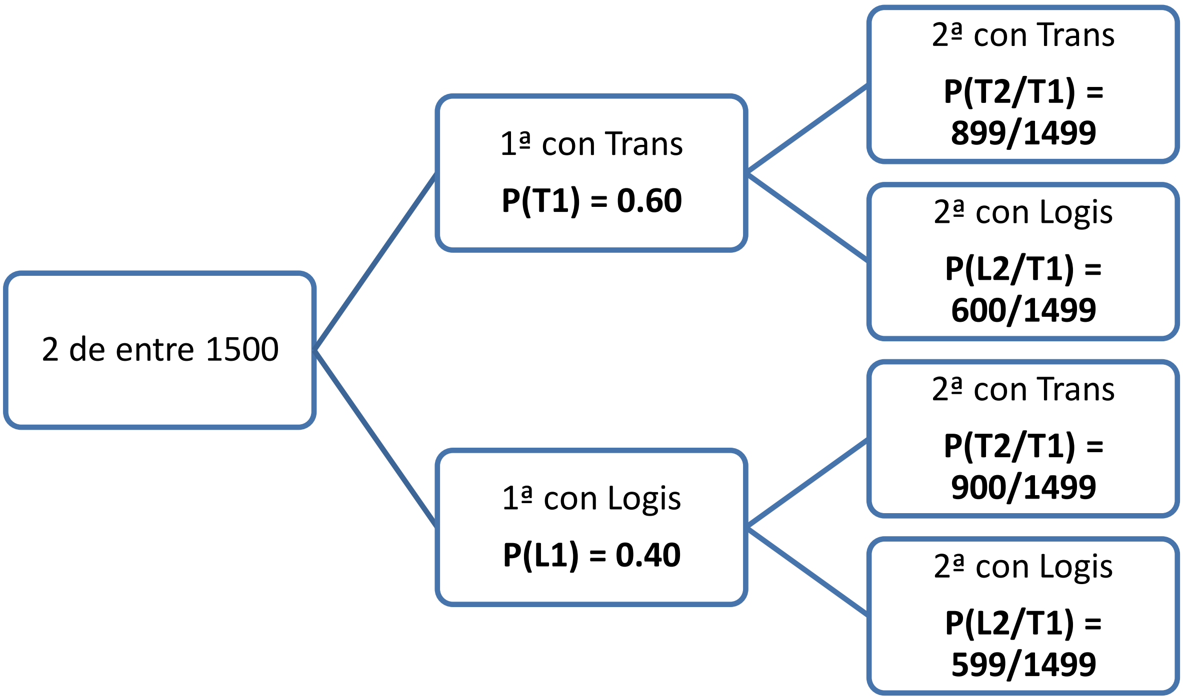
i) $P(T \cap B) = P(T)P(B/T) = 0.6 \cdot 0.5 = \boxed{0.3}$

ii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(L/C)=\frac{P(L\cap C)}{P(C)}=\frac{P(L)P(C/L)}{P(L)P(C/L)+P(T)P(C/T)}=\frac{0.4\cdot 0.25}{0.4\cdot 0.25+0.6\cdot 0.3}=\boxed{\frac{5}{14}\simeq 0.357}$$

iii) De las 1500 ventas Trans distribuyó el 60 %, es decir, $1500 \cdot 0.6 = 900$ ventas y Logis distribuyó las 600 restantes.

Realizamos un diagrama de árbol de esa elección de dos ventas de entre las 1500.



La probabilidad pedida es la de la rama superior.

$$P(T1\cap T2)=P(T1)P(T2/T1)=0.6\cdot\frac{899}{1499}=\boxed{\frac{2697}{7495}\simeq 0.36}$$

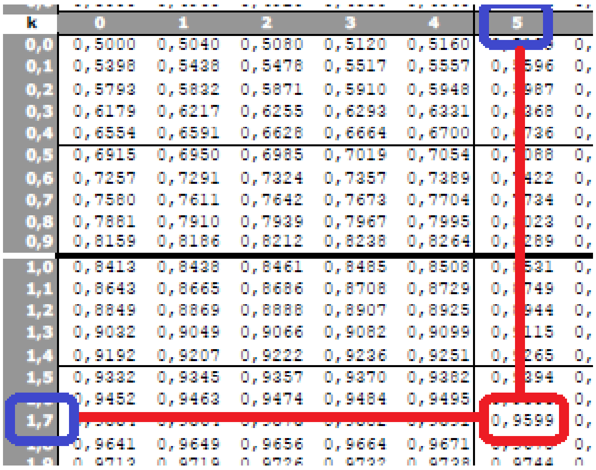
EJERCICIO 6:
El consumo energético mensual (en kWh) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400. Se elige una muestra de 64 hogares, obteniéndose una suma total del consumo de 17280 kWh.
i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el consumo energético medio en hogares. (5 puntos)
ii) Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo se reduzca a la mitad. (5 puntos)
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = Consumo energético mensual (en kWh).
Como la varianza es 400 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{400} = 20$ kWh.
X = N(μ, 20)

i) El tamaño de la muestra es $n = 64$ y la media muestral es $\bar{x} = \frac{17280}{64} = 270\, kWh$

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 92 %

$$1-\alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,04 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,96 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.96 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,75$$



k	0	1	2	3	4	5	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	[illegible]	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,[illegible]596	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,[illegible]987	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,[illegible]368	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,[illegible]736	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,[illegible]088	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,[illegible]422	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,[illegible]734	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,[illegible]023	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,[illegible]289	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,[illegible]531	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,[illegible]749	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,[illegible]944	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,[illegible]115	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,[illegible]265	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,[illegible]394	0,
[illegible]	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	[illegible]	0,
1,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9599	0,
[illegible]	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	[illegible]	0,
[illegible]	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,75 \cdot \frac{20}{\sqrt{64}} = 4.375$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(270 - 4.375, 270 + 4.375\right) = \left(265.625,\ 274.375\right)$$

ii) La mitad del error sería $Error = \frac{4.375}{2} = 2.1875\, kWh$

Aplicamos la fórmula del error y despejamos "*n*":

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.1875 = 1.75 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.1875\sqrt{n} = 1.75 \cdot 20 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.75 \cdot 20}{2.1875} \Rightarrow n = \left(\frac{1.75 \cdot 20}{2.1875} \right)^2 = 256$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 256 hogares. A partir de ese tamaño de muestra el error cometido es menor de 2.1875 kWh.