Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2022ko OHIKOA	ORDINARIA 2022
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]
Una determinada empresa de selección de personal realiza un test de 90 preguntas. Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos.
¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos, y que el número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos?

B.1. [hasta 2.5 puntos]
El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B.
Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros. El coste de construcción de la vivienda de tipo A es 100.000 €, y el de la del tipo B 300.000 €. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000 € y por una del tipo B a 40.000 €.

	Coste de construcción	Beneficio
A	100.000 €	20.000 €
B	300.000 €	40.000 €

a) [2,2 puntos] ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio?
b) [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]
Sea *f(x)* la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & si \quad x<0 \\ x^2-x-a & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) [0,7 puntos] Encuentra el valor del parámetro *a* para que la función *f(x)* sea continua en el punto $x = 0$.
b) [1 punto] En el caso $a=2$, analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, y los máximos y mínimos relativos.
c) [0,8 puntos] En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función.

B.2. [hasta 2,5 puntos]
a) [0,8 puntos] Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=(x^2-1)(3x^3+5x)^3 \qquad g(x)=\frac{\ln(3x)}{e^{2x}}$$

b) [0,6 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la función *h(x)* en el punto de abscisa $x = 1$.

$$h(x)=\frac{3x+6}{2x+1}$$

c) [0,5 puntos] Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función *h(x)*.
d) [0,6 puntos] Calcula:

$$\int\left(e^{3x}-3x^2+\frac{2}{x+2}-\frac{4}{(x+2)^2}\right)dx$$

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]
Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas, y de ellas el 15% tiene errores. El segundo consta de 80 páginas, de las cuales 8 tienen errores; y el tercero, de 50 páginas, sólo hay 40 que no tienen ningún error.
Si abrimos el libro por una página al azar:

a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?
b) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la página elegida tenga errores y sea del tercer capítulo.
c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.
d) [0,5 puntos] Observamos que la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

B.3. [hasta 2,5 puntos]
Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A)=0,4$; $P(B)=0,3$ y $P(A\cup B)=0,5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.
b) [1 punto] Sabemos que $P(C)=0,5$; $P(D)=0,6$ y $P(C\cup D)=0,7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.
c) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A)=0,4$; $P(E)=0,6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]
En el examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7,6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6,8 puntos.

a) [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.
b) [0,75 puntos] Si la desviación típica es 1,5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?
c) [1 punto] Si la desviación típica es 1,5 puntos y el *Aprobado* se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?

B.4. [hasta 2,5 puntos]
Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje de una población que ha sido vacunada frente a una determinada enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1000 personas, y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:

a) [1,25 puntos] Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna.
b) [0.75 puntos] Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.
c) [0,5 puntos] Interpretar los resultados obtenidos.

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]
Una determinada empresa de selección de personal realiza un test de 90 preguntas. Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos.
¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos, y que el número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos?

Llamamos "x" al número de aciertos, "y" al número de fallos y "z" al número de preguntas no contestadas.

"El test tiene 90 preguntas" → $x+y+z=90$

"Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos" → $6x-2.5y-1.5z=210$

"El número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos" → $z+x=2y$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=90 \\ 6x-2.5y-1.5z=210 \\ z+x=2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=90 \\ 12x-5y-3z=420 \\ z=2y-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+2y-x=90 \\ 12x-5y-3(2y-x)=420 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y=90 \\ 12x-5y-6y+3x=420 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{y=\frac{90}{3}=30} \\ 15x-11y=420 \end{array}\right\} \Rightarrow 15x-330=420 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x=750 \Rightarrow \boxed{x=\frac{750}{15}=50} \Rightarrow \boxed{z=60-50=10}$$

Para conseguir los 210 puntos con las condiciones del ejercicio debe tener 50 aciertos, 30 fallos y 10 preguntas no contestadas.

B.1. [hasta 2.5 puntos]
El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B.
Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros. El coste de construcción de la vivienda de tipo A es 100.000 €, y el de la del tipo B 300.000 €. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000 € y por una del tipo B a 40.000 €.

	Coste de construcción	Beneficio
A	100.000 €	20.000 €
B	300.000 €	40.000 €

a) [2,2 puntos] ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio?
b) [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

a) Llamamos "x" al número de viviendas a construir de tipo A e "y" al número de viviendas a construir de tipo B.
Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Coste de construcción	Beneficio
Nº viviendas A (x)	100.000x	20.000x
Nª viviendas B (y)	300.000y	40.000y
TOTAL	$100000x+300000y$	$20000x+40000y$

La función a maximizar es el beneficio $B(x,y)=20000x+40000y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

"*la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B*" → $x+y\le 120$

"*la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros*" → $100000x+300000y\le 15000000$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 120 \\ 100000x+300000y\le 15000000 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\le 120 \\ x+3y\le 150 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$x+y=120$

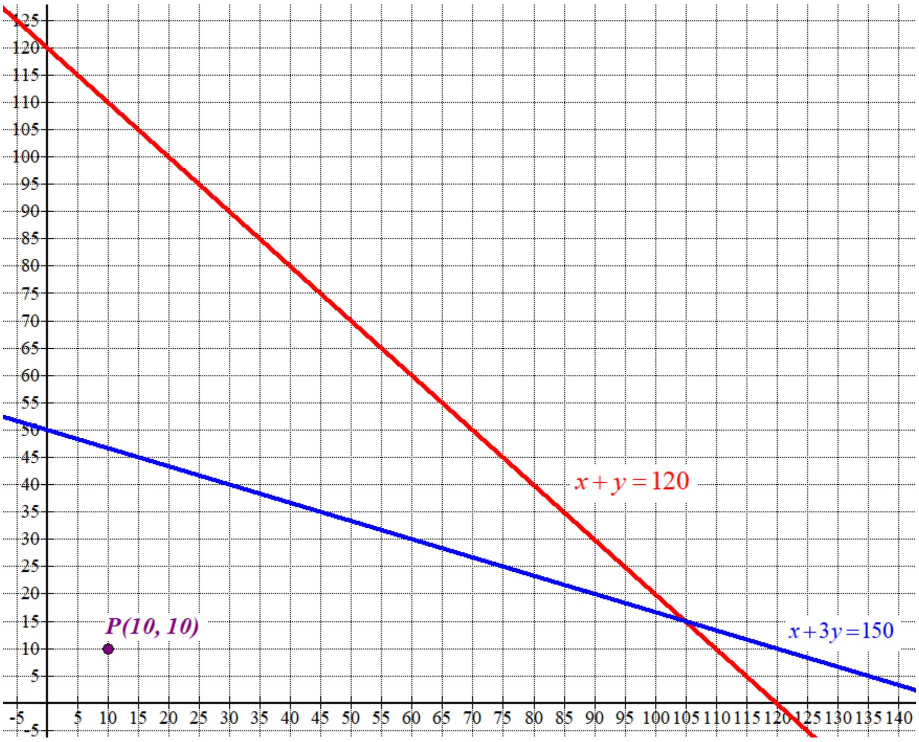
x	$y=120-x$
0	120
105	15
120	0

$x+3y=150$

x	$y=\frac{150-x}{3}$
0	50
105	15
150	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

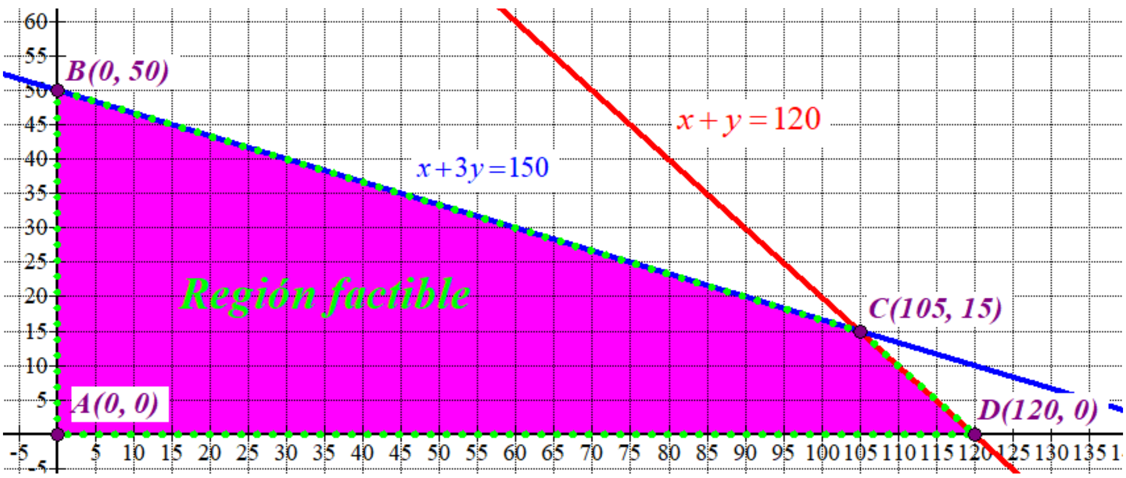


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 120 \\ x+3y\leq 150 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+10\leq 120 \\ 10+30\leq 150 \\ 10\geq 0;\ 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=120 \\ x+3y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \times(-1)\rightarrow -x-\ y=-120 \\ x+3y=150 \end{array}\right\}$$

$$2y=30 \Rightarrow \boxed{y=15} \Rightarrow x+15=120 \Rightarrow \boxed{x=105} \Rightarrow \boxed{C(105,15)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=20000x+40000y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$ €

B(0, 50) → $B(0,50)=0+2\,000\,000=2\,000\,000$

C(105, 15) → $B(105,15)=2100\,000+600\,000=2\,700\,000$ ¡Máximo!

D(120, 0) → $B(120,0)=2\,400\,000+0=2\,400\,000$

El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 2 700 000 € y se obtiene en el punto C(105, 15), es decir, el máximo beneficio se obtiene construyendo 105 casas del tipo A y 15 del tipo B.

b) El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 2 700 000 €

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]
Sea *f(x)* la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & si \quad x<0 \\ x^2-x-a & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) [0,7 puntos] Encuentra el valor del parámetro *a* para que la función *f(x)* sea continua en el punto *x = 0*.
b) [1 punto] En el caso $a=2$, analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, y los máximos y mínimos relativos.
c) [0,8 puntos] En el caso *a = 2*, realiza la representación gráfica de la función.

a) Para que la función sea continua en *x = 0* debe cumplirse $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^2-0-a=-a \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{2x+1}{1-2x}=\dfrac{2\cdot 0+1}{1-2\cdot 0}=1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2-x-a=-a \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow -a=1 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

El valor buscado es *a = –1*.

b) Para $a=2$ la función queda $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & si \quad x<0 \\ x^2-x-2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$.

En *x = 0* la función es discontinua pues *a ≠ –1*.
Calculamos la derivada de la función en sus dos tramos de definición e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2(1-2x)-(-2)(2x+1)}{(1-2x)^2}=\dfrac{2-4x+4x+2}{(1-2x)^2}=\dfrac{4}{(1-2x)^2} & si \quad x<0 \\ 2x-1 \quad si \quad x>0 \end{cases}$$

Si *x < 0* la función derivada es $f'(x)=\dfrac{4}{(1-2x)^2}$ que siempre es positiva y por tanto la función es creciente en el intervalo (–∞, 0).
Se *x > 0* la función derivada es $f'(x)=2x-1$. Vemos cuando se anula.

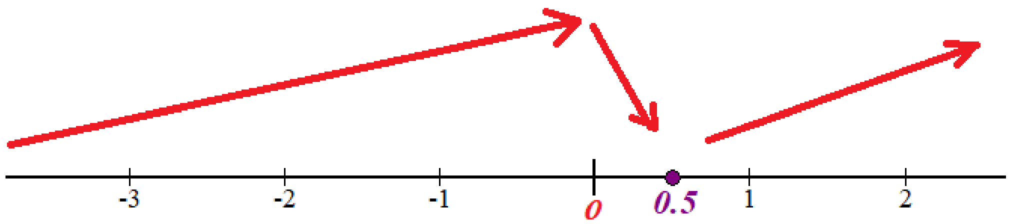
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de *x = 0.5*.

En el intervalo $(0,\ 0.5)$ tomamos *x = 0.25* y la derivada vale $f'(0.25)=0.5-1=-0.5<0$.
La función decrece en $(0,\ 0.5)$.

En el intervalo $(0.5,+\infty)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1)=2-1=1>0$. La función crece en $(0.5,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,0)\cup(0.5,+\infty)$ y decrece en $(0,\ 0.5)$.

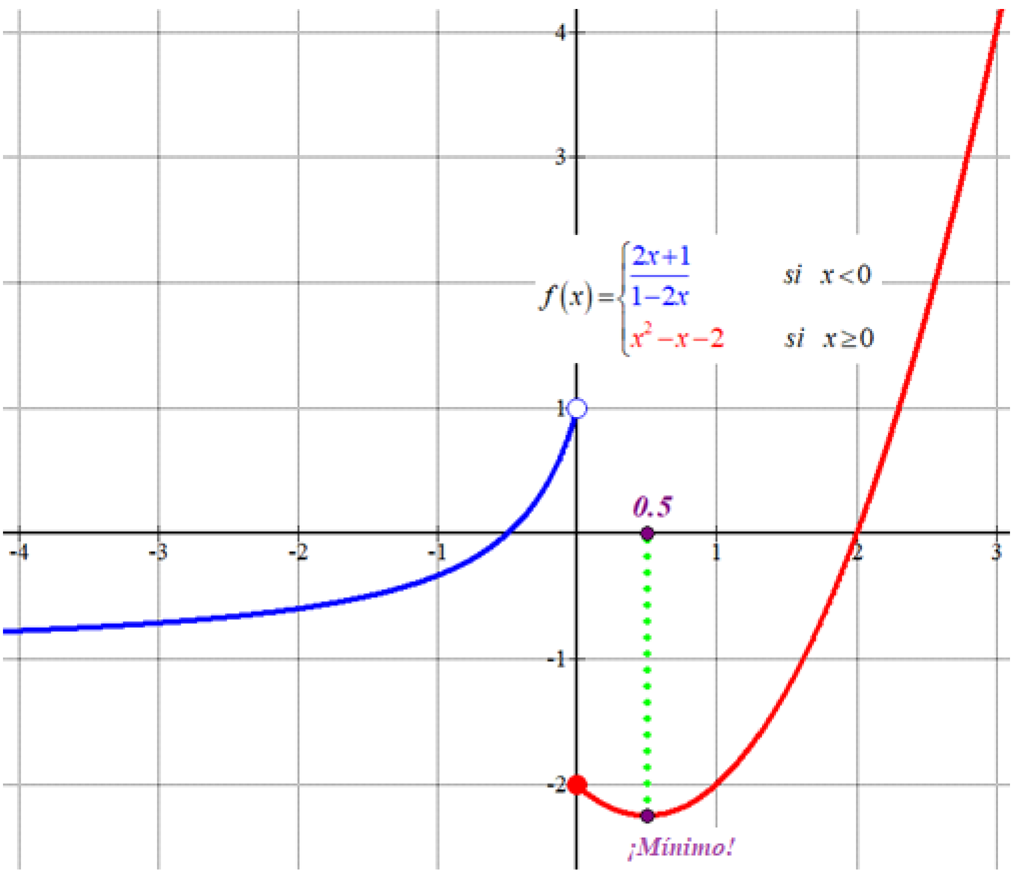
La función no tiene máximo relativo (en *x* = *0* hay discontinuidad), La función tiene un mínimo relativo en *x* = *0.5*. Como $f(0.5)=0.5^2-0.5-2=-2.25$ el mínimo relativo tiene coordenadas (0.5, –2.25).

c) Para $a=2$ la función queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{1-2x} & si \quad x<0 \\ x^2-x-2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

$x<0$	$y=\dfrac{2x+1}{1-2x}$
-4	$-7/9$
-2	$-3/5$
-1	$-1/3$
0	1 No incluido

$x\geq 0$	$y=x^2-x-2$
0	-2
0.5	-2.25
1	-2
2	0



B.2. [hasta 2,5 puntos]

a) [0,8 puntos] Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=(x^2-1)(3x^3+5x)^3 \qquad g(x)=\frac{\ln(3x)}{e^{2x}}$$

b) [0,6 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la función *h(x)* en el punto de abscisa *x = 1*.

$$h(x)=\frac{3x+6}{2x+1}$$

c) [0,5 puntos] Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función *h(x)*.

d) [0,6 puntos] Calcula:

$$\int\left(e^{3x}-3x^2+\frac{2}{x+2}-\frac{4}{(x+2)^2}\right)dx$$

a)

$$f(x)=(x^2-1)(3x^3+5x)^3 \Rightarrow f'(x)=(2x)(3x^3+5x)^3+(x^2-1)3(3x^3+5x)^2(9x^2+5)$$

$$f'(x)=(3x^3+5x)^2\left[2x(3x^3+5x)+(x^2-1)(27x^2+15)\right]$$

$$f'(x)=(3x^3+5x)^2\left[6x^4+10x^2+27x^4+15x^2-27x^2-15\right]$$

$$\boxed{f'(x)=(3x^3+5x)^2(33x^4-2x^2-15)}$$

$$g(x)=\frac{\ln(3x)}{e^{2x}} \Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{3}{3x}e^{2x}-2e^{2x}\ln(3x)}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{e^{2x}\left[\frac{1}{x}-2\ln(3x)\right]}{\left(e^{2x}\right)^2}$$

$$\boxed{g'(x)==\frac{\frac{1}{x}-2\ln(3x)}{e^{2x}}}$$

b) La ecuación de la recta tangente a *h(x)* en *x = 1* es $y-h(1)=h'(1)(x-1)$.

$$h(1)=\frac{3+6}{2+1}=3$$

$$h(x)=\frac{3x+6}{2x+1} \Rightarrow h'(x)=\frac{3(2x+1)-2(3x+6)}{(2x+1)^2} \Rightarrow h'(1)=\frac{3(2+1)-2(3+6)}{(2+1)^2}=-1$$

$$\left.\begin{array}{r} y-h(1)=h'(1)(x-1) \\ h(1)=3 \\ h'(1)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow y-3=(-1)(x-1) \Rightarrow y-3=-x+1 \Rightarrow \boxed{y=-x+4}$$

La ecuación de la recta tangente es $y=-x+4$

c) El dominio de definición de $h(x)=\frac{3x+6}{2x+1}$ son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{-1}{2}}$$

El dominio es $Dom\ h(x)=\mathbb{R}-\left\{\frac{-1}{2}\right\}$.

Asíntota vertical. $x=a$.

¿ $x=-\frac{1}{2}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1/2} h(x)=\lim_{x\to -1/2}\frac{3x+6}{2x+1}=\frac{3\left(\frac{-1}{2}\right)+6}{2\left(\frac{-1}{2}\right)+1}=\frac{4.5}{0}=\infty$$

$x=-\frac{1}{2}$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+6}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}+\frac{6}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{6}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{3+\frac{6}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}}=\frac{3+0}{2+0}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

$y=\frac{3}{2}$ es asíntota horizontal.

d)

$$\int\left(e^{3x}-3x^2+\frac{2}{x+2}-\frac{4}{(x+2)^2}\right)dx=\frac{1}{3}e^{3x}-x^3+2\ln|x+2|-\int\frac{4}{(x+2)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-x^3+2\ln|x+2|-4\int(x+2)^{-2}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x}-x^3+2\ln|x+2|-4\frac{1}{-1}(x+2)^{-1}=$$

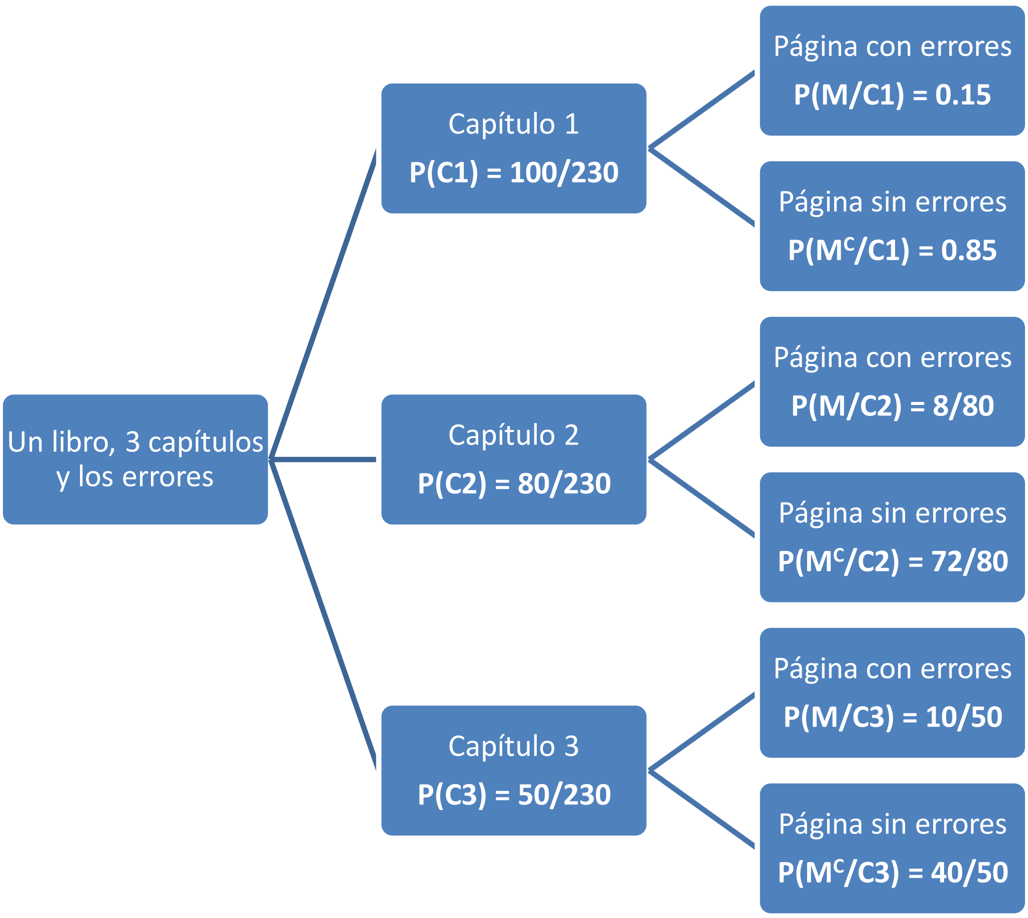
$$=\boxed{\frac{1}{3}e^{3x}-x^3+2\ln|x+2|+\frac{4}{x+2}+K}$$

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]
Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas, y de ellas el 15% tiene errores. El segundo consta de 80 páginas, de las cuales 8 tienen errores; y el tercero, de 50 páginas, sólo hay 40 que no tienen ningún error.
Si abrimos el libro por una página al azar:
a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?
b) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la página elegida tenga errores y sea del tercer capítulo.
c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.
d) [0,5 puntos] Observamos que la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

Llamamos C1 = "Elegir pagina del capitulo 1" e igualmente C2 y C3.
También llamamos M = "Elegir página con errores"

Realizamos un diagrama de árbol.



a) $P(C2) = \frac{80}{230} = \boxed{\frac{8}{23} \simeq 0.348}$

b) $P(M \cap C3) = P(C3)P(M / C3) = \frac{50}{230} \cdot \frac{10}{50} = \boxed{\frac{1}{23} \simeq 0.043}$

c)

$$P\left(M^C\right)=P(C1)P\left(M^C/C1\right)+P(C2)P\left(M^C/C2\right)+P(C3)P\left(M^C/C3\right)=$$

$$=\frac{100}{230}\cdot 0.85+\frac{80}{230}\cdot\frac{72}{80}+\frac{50}{230}\cdot\frac{40}{50}=\boxed{\frac{197}{230}\simeq 0.8565}$$

d) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C3/M)=\frac{P(C3\cap M)}{P(M)}=\frac{P(C3\cap M)}{1-P\left(M^C\right)}=\frac{\frac{10}{230}}{1-\frac{197}{230}}=\frac{\frac{10}{230}}{\frac{33}{230}}=\boxed{\frac{10}{33}\simeq 0.303}$$

B.3. [hasta 2,5 puntos]
Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.
a) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A)=0,4$; $P(B)=0,3$ y $P(A\cup B)=0,5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.
b) [1 punto] Sabemos que $P(C)=0,5$; $P(D)=0,6$ y $P(C\cup D)=0,7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.
c) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A)=0,4$; $P(E)=0,6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

a) Nos piden calcular $P(A\cap B)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0.5=0.4+0.3-P(A\cap B)$$

$$\boxed{P(A\cap B)=0.7-0.5=0.2}$$

b) Hallamos la probabilidad de la intersección.

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)$$
$$0.7=0.5+0.6-P(C\cap D)$$
$$P(C\cap D)=0.5+0.6-0.7=0.4$$

Es una probabilidad condicionada. Utilizamos el teorema de Bayes.

Nos piden calcular $P(C/D)=\dfrac{P(C\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0.4}{0.6}=\boxed{\dfrac{2}{3}\approx 0.667}$

c) Si los sucesos A y E son independientes entonces $P(A\cap E)=P(A)P(E)=0.4\cdot 0.6=0.24$.

Nos piden calcular $P(A\cup E)$.

$$P(A\cup E)=P(A)+P(E)-P(A\cap E)=0.4+0.6-0.24=\boxed{0.76}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]
En el examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7,6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6,8 puntos.

a) [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

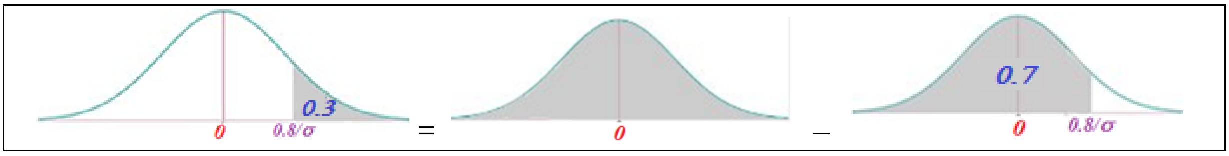
b) [0,75 puntos] Si la desviación típica es 1,5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) [1 punto] Si la desviación típica es 1,5 puntos y el *Aprobado* se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?

X = Puntuación obtenida en el examen de Lengua Inglesa.
X= N(6.8, σ)

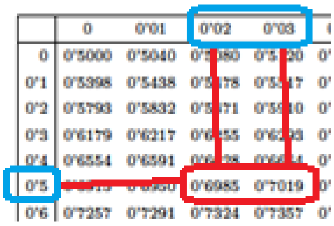
a) Nos dicen que $P(X>7.6)=0.3$

$$P(X>7.6)=0.3 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{7.6-6.8}{\sigma}\right)=0.3 \Rightarrow P\left(Z>\frac{0.8}{\sigma}\right)=0.3 \Rightarrow \ldots$$



$$\ldots \Rightarrow 1-P\left(Z\le\frac{0.8}{\sigma}\right)=0.3 \Rightarrow P\left(Z\le\frac{0.8}{\sigma}\right)=0.7 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla de N(0,1)}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.8}{\sigma}=\frac{0.52+0.53}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma=\frac{0.8}{0.525}=1.5238}$$

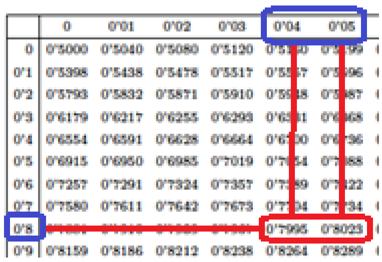


	0	0'01	0'02	0'03
0	0'5000	0'5040	[illegible]	[illegible]
0'1	0'5398	0'5438	[illegible]	[illegible]
0'2	0'5793	0'5832	[illegible]	[illegible]
0'3	0'6179	0'6217	[illegible]	[illegible]
0'4	0'6554	0'6591	[illegible]	[illegible]
0'5	[illegible]	[illegible]	0'6985	0'7019
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357

b) X = N(6.8, 1.5)

$$P(X>a)=0.20 \Rightarrow P(X\le a)=1-0.20=0.8 \Rightarrow P\left(Z\le\frac{a-6.8}{1.5}\right)=0.8 \Rightarrow$$

Buscamos en la tabla de la $\mathrm{N}(0,1) \Rightarrow \frac{a-6.8}{1.5}=\frac{0.84+0.85}{2} \Rightarrow \boxed{a=0.845\cdot 1.5+6.8=8.0675}$



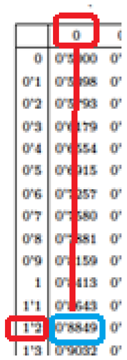
	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	[illegible]	[illegible]
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	[illegible]	[illegible]
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	[illegible]	[illegible]
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	[illegible]	[illegible]
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	[illegible]	[illegible]
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	[illegible]	[illegible]
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	[illegible]	[illegible]
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	[illegible]	[illegible]
0'8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'7995	0'8023
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289

Solo el 20 % de la población consigue una puntuación superior a 8.0675 puntos.

c) X = N(6.8, 1.5)

$$P(X \geq 5) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{5-6.8}{1.5}\right) - P(Z \geq -1.2) = P(Z \leq 1.2) =$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla de la N(0, 1)}\} = \boxed{0.8849}$$



El 88.49 % de la población tiene un "Aprobado".

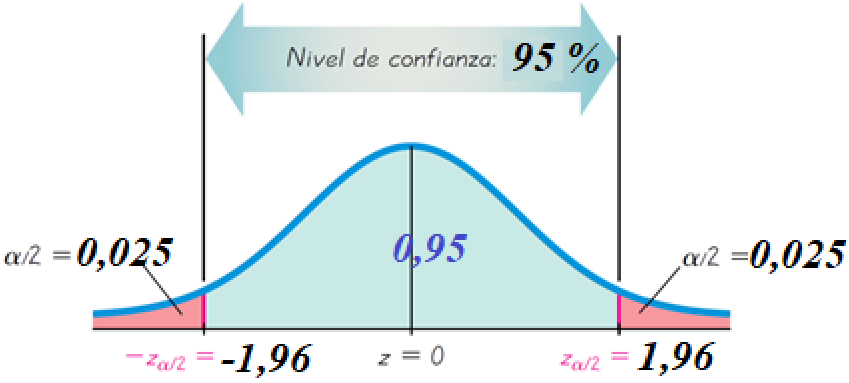
B.4. [hasta 2,5 puntos]
Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje de una población que ha sido vacunada frente a una determinada enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1000 personas, y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:

a) [1,25 puntos] Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna.
b) [0.75 puntos] Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.
c) [0,5 puntos] Interpretar los resultados obtenidos.

a)

Proporción muestral $p = \frac{860}{1000} = 0.86$. Tamaño de la muestra = n = 1000

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.86 \cdot 0.14}{1000}} = 0.0215$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.86 - 0.0215,\ 0.86 + 0.0215\right) = \left(0.8385,\ 0.8815\right)$$

El porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna está entre el 83.85 % y el 88.15 % con un nivel de confianza del 95 %.

b) El error máximo lo hemos calculado en el apartado a) y es Error = 0.0215.
El error máximo es de un 2.15 %.

c) Se puede decir con un nivel de confianza del 95 % que el porcentaje de la población que está vacunada es mayor que el 83.85 % y menor que el 88.15 %, lo que supone un error máximo del 2.15 %.