GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2022	CONVOCATORIA: JULIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & -2\end{pmatrix}$.

a) Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

a.1) $B+2CA$ *(1 punto)*

a.2) $A-(BC)^T$, siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de BC. *(2 puntos)*

a.3) CAB *(2 puntos)*

b) Resuelve la ecuación matricial

$$\frac{1}{5}(B+AX)=C^T$$

Siendo C^T la matriz traspuesta de C. *(5 puntos)*

Problema 2. Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

a) Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo. *(8 puntos)*

b) ¿Cuál es dicho ingreso máximo? *(2 puntos)*

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}$. Se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Problema 4. Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina x meses después de su compra viene dado por la función

$$f(x)=\frac{1}{10}\left(800+15x+6x^2-x^3\right)$$

para cualquier x entre 0 y 12.

a) ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra? *(2 puntos)*

b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo? *(4 puntos)*

c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10%? *(4 puntos)*

Problema 5. Dados dos sucesos A y B, se sabe que $P(B) = 0{,}4$, $P\left(A^C \cap B^C\right)=0{,}2$ y $P\left(A\cap B\right)=0{,}3$, siendo A^C y B^C los sucesos complementarios de A y B, respectivamente. Se pide:

a) Calcular la probabilidad del suceso $A \cup B$. *(2,5 puntos)*

b) Calcular la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos. *(2,5 puntos)*

c) Calcular la probabilidad de B condicionado a A. *(2,5 puntos)*

d) ¿Son independientes los sucesos A y B? *(2,5 puntos)*

Problema 6. El director de una entidad que audita la contabilidad de empresas sabe, por experiencias pasadas, que cuando se hace una auditoría el 30% de las empresas merece una calificación de «Excelente», el 50% de las empresas merece la calificación de «Aceptable» y el 20% restante merece una calificación de «Deficiente». El director también sabe que entre los auditores de su entidad hay un 90% de auditores que siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10% de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de «Aceptable».

a) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»? *(3 puntos)*

b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece? *(3 puntos)*

c) Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no, el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la calificación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de «Aceptable», ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente? *(4 puntos)*

Soluciones

Problema 1. Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}-2 & -2\end{pmatrix}$.

a) Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

a.1) $B+2CA$ *(1 punto)*

a.2) $A-(BC)^T$, siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de *BC*. *(2 puntos)*

a.3) *CAB* *(2 puntos)*

b) Resuelve la ecuación matricial

$$\frac{1}{5}(B+AX)=C^T$$

Siendo C^T la matriz traspuesta de *C*. *(5 puntos)*

a)

a.1) No se puede calcular.

$$B+2CA=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-12-4 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-32 & -16\end{pmatrix}$$

Se puede realizar el producto 2CA pero la suma no es posible pues no se pueden sumar matrices de dimensiones diferentes.

a.2) Si se puede calcular.

$$BC=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8\\ -12 & -12\end{pmatrix}\Rightarrow(BC)^T=\begin{pmatrix}8 & -12\\ 8 & -12\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{1\quad\cdot\quad 1}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

$$A-(BC)^T=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & -12\\ 8 & -12\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-2 & 12\\ -6 & 16\end{pmatrix}}$$

a.3) Si se puede calcular.

$$CAB=\begin{pmatrix}-2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64-48\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}16\end{pmatrix}}$$

$$1\times\boxed{2\quad\cdot\quad 2}\times\boxed{2\quad\cdot\quad 2}\times 1\longrightarrow 1\times 1$$

b) Despejo la matriz X en la ecuación.

$$\frac{1}{5}(B+AX)=C^T\Rightarrow B+AX=5C^T\Rightarrow AX=5C^T-B\Rightarrow\boxed{X=A^{-1}\left(5C^T-B\right)}$$

Comprobamos que existe la inversa de A, la calculamos y terminamos de resolver la ecuación.

$$A=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=24\neq 0.\text{Existe la inversa de A.}$$

$$\text{A}^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}6 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}}{24}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 6\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}-2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow C^T=\begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix}\Rightarrow 5C^T-B=5\begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ -16\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\left(5C^T-B\right)=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\ -16\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-24\\ -84\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1\\ -7/2\end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow{2\times\boxed{2\quad\cdot\quad 2}\times 1} 2\times 1$$

Problema 2. Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.
a) Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo. *(8 puntos)*
b) ¿Cuál es dicho ingreso máximo? *(2 puntos)*

a) Llamamos "x" al número de kilos de mezcla a partes iguales e "y" a los kilos de mezcla 1 a 3. Hacemos una tabla para ordenar toda la información del ejercicio.

	Kilos café colombiano	Kilos café brasileño	Ingresos
Nº kilos a iguales (x)	x/2	x/2	15x
Nº kilos 1 a 3 (y)	y/4	3y/4	10y
TOTALES	$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}$	$\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}$	$15x+10y$

La función objetivo que deseamos maximizar es: $I(x,y)=15x+10y$.

Las restricciones del problema son:

"El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño" → $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\le 100;\ \frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\le 210$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\le 100\\ \frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\le 210\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}2x+y\le 400\\ 2x+3y\le 840\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Para representar la región factible empezamos dibujando las rectas que la delimitan:

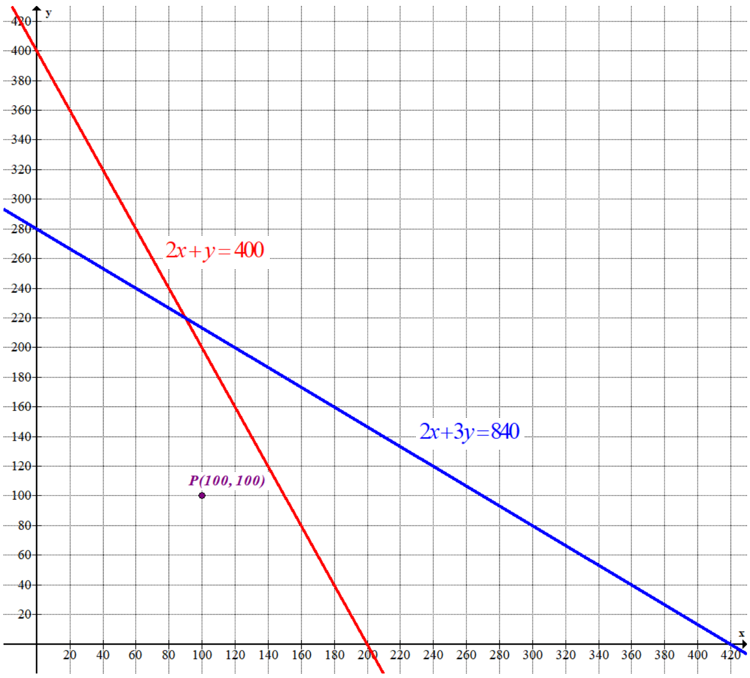
$2x+y=400$

x	$y=400-2x$
0	400
90	220
200	0

$2x+3y=840$

x	$y=\frac{840-2x}{3}$
0	280
90	220
420	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$
Primer cuadrante

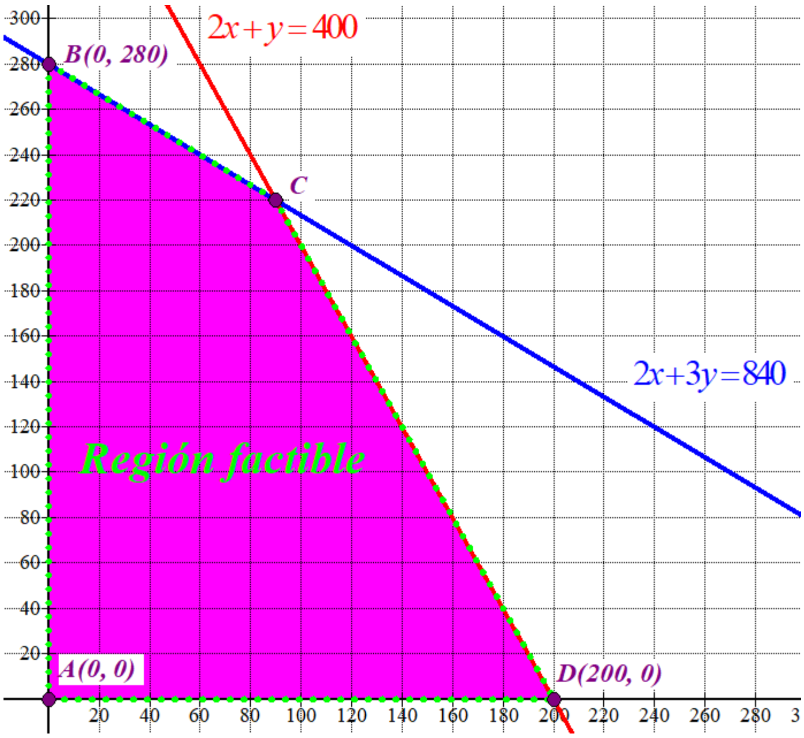


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\leq 400 \\ 2x+3y\leq 840 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(100, 100) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 200+100\leq 400 \\ 200+300\leq 840 \\ 100\geq 0; 100\geq 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$C\rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=840 \\ 2x+y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=840 \\ y=400-2x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+3(400-2x)=840 \Rightarrow 2x+1200-6x=840 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x=-360 \Rightarrow x=\frac{360}{4}=90 \Rightarrow y=400-180=220 \Rightarrow \boxed{C(90,220)}$$

Valoramos la función $I(x,y)=15x+10y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 280) → $I(0,280)=0+2800=2800$

C(90, 220) → $I(90,220)=1350+2200=3550$ ¡Máximo!

D(200, 0) → $I(200,0)=3000+0=3000$

Los ingresos máximos son de 3550 y se producen en el vértice C(90, 220).
Con 90 kilos de café mezclado a partes iguales y 220 kilos del café mezclado 1 a 3 se satisfacen las restricciones con unos ingresos máximos de 3550 €.

b) El ingreso máximo es de 3550 €.

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}$. Se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

a) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} =\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}=x} \\ =\boxed{\frac{1-\sqrt{5}}{2}=x} \end{cases}$$

Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Puntos de corte con el eje OY:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{3\cdot 0^2-0-4}{0^2-0-1}=4 \Rightarrow \boxed{A(0,4)}$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=0 \Rightarrow 3x^2-4x-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{6}=\frac{4\pm 8}{6}=\begin{cases} \frac{4-8}{6}=\frac{-2}{3}=x \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{-2}{3},0\right)} \\ \frac{4+8}{6}=2=x \Rightarrow \boxed{C(2,0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son: A(0, 4), $B\left(\frac{-2}{3},0\right)$ y C(2, 0).

b) Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=\frac{3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2-4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-4}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1}=\frac{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}{0}=\infty$$

$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ es asíntota vertical.

¿ $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=\frac{3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-4}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1}=\frac{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}{0}=\infty$$

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{3-\frac{4}{\infty}-\frac{4}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{3-0-0}{1-0-0}=3$$

$y=3$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(6x-4)(x^2-x-1)-(3x^2-4x-4)(2x-1)}{(x^2-x-1)^2}=$$

$$=\frac{6x^3-6x^2-6x-4x^2+4x+4-(6x^3-3x^2-8x^2+4x-8x+4)}{(x^2-x-1)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{6x^3}-6x^2-6x-4x^2+\cancel{4x}+4-\cancel{6x^3}+3x^2+8x^2-\cancel{4x}+8x-4}{(x^2-x-1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x^2-x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2+2x}{(x^2-x-1)^2}=0\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow x(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ \boxed{x=-2}\end{cases}$$

Averiguamos el signo de la derivada antes, entre y después de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1.62$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\simeq -0.62$ (excluidos del dominio) y 0, –2 (puntos críticos).

En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos *x* = *–3* y la derivada vale $f'(-3)=\frac{(-3)^2+2(-3)}{((-3)^2-(-3)-1)^2}=\frac{3}{121}>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $\left(-2,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f'(-1)=\frac{(-1)^2+2(-1)}{((-1)^2-(-1)-1)^2}=-1<0$. La función decrece en $\left(-2,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$ tomamos *x* = *–0.5* y la derivada vale $f'(-0.5)=\frac{(-0.5)^2+2(-0.5)}{\left((-0.5)^2-(-0.5)-1\right)^2}=-12<0$. La función decrece en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$.

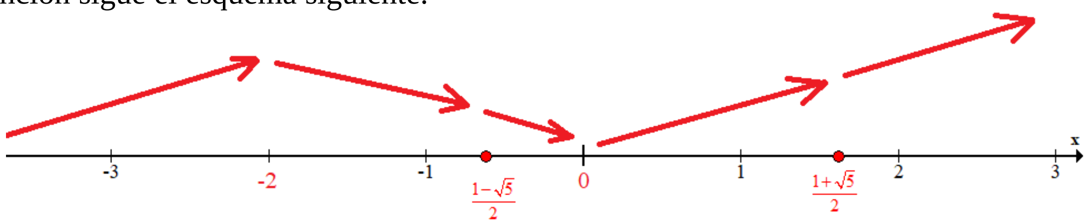
En el intervalo $\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1)=\frac{1^2+2}{(1^2-1-1)^2}=3>0$.

La función crece en $\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ tomamos *x* = *2* y la derivada vale $f'(2)=\frac{2^2+4}{(2^2-2-1)^2}8>0$.

La función crece en $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.



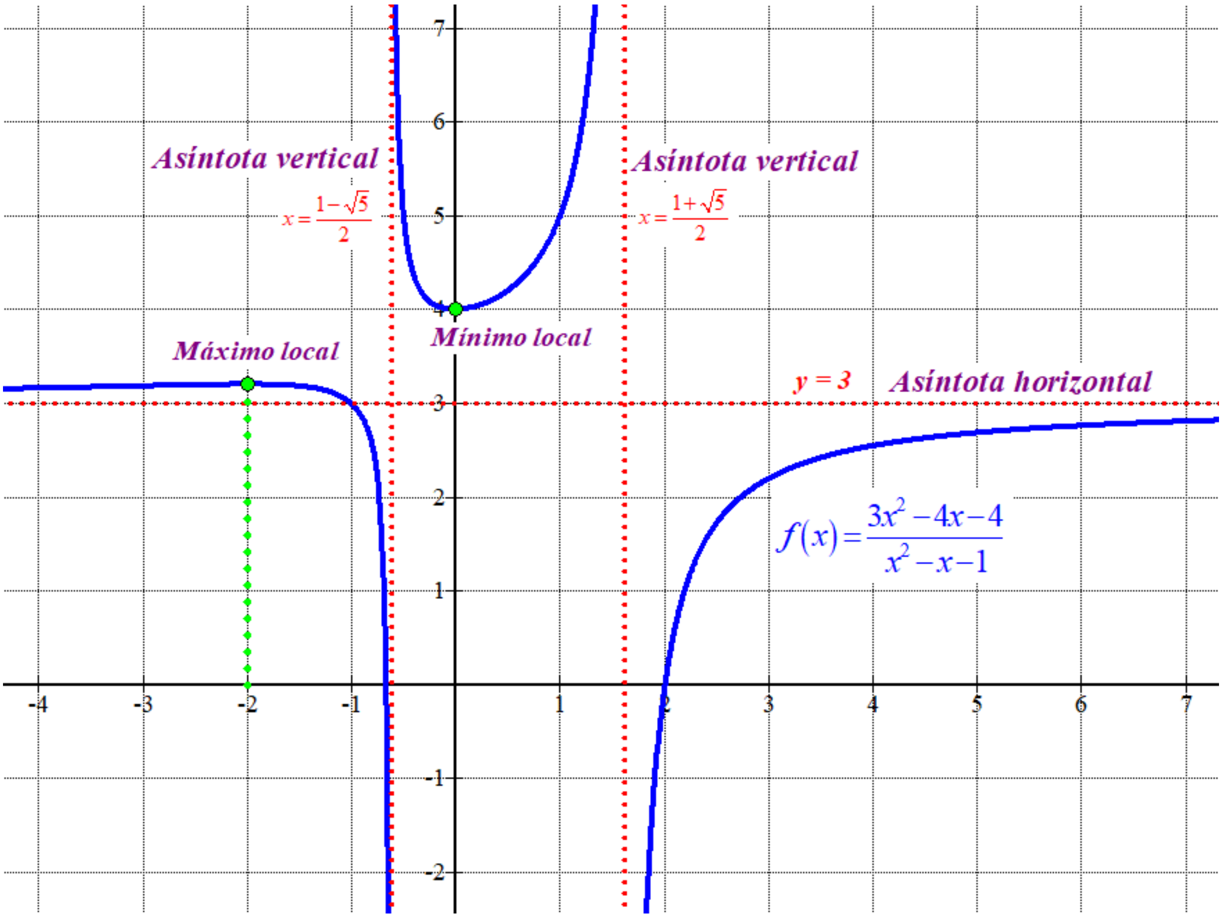
La función crece en $(-\infty,-2)\cup\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-2,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$.

d) Observando el esquema de evolución de la función presenta un máximo en *x* = *–2*.

$f(-2)=\frac{3(-2)^2-4(-2)-4}{(-2)^2-(-2)-1}=\frac{16}{5}=3.2$, las coordenadas del máximo relativo son $(-2,3.2)$.

La función tiene un mínimo relativo en *x* = *0*. Como $f(0)=\frac{0-0-4}{0^2-0-1}=4$ el mínimo relativo tiene coordenadas (0, 4).

e) Para realizar la representación gráfica usamos toda la información obtenida sobre la función.



Asíntota vertical
$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Asíntota vertical
$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Máximo local
Mínimo local
$y=3$
Asíntota horizontal
$f(x)=\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}$

Problema 4. Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina x meses después de su compra viene dado por la función

$$f(x)=\frac{1}{10}\left(800+15x+6x^2-x^3\right)$$

para cualquier x entre 0 y 12.

a) ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra? *(2 puntos)*

b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo? *(4 puntos)*

c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10%? *(4 puntos)*

a) Comparamos *f(1)* y *f(2)*.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\frac{1}{10}\left(800+15+6-1^3\right)=82 \\ f(2)=\frac{1}{10}\left(800+30+24-2^3\right)=84.6 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=82<84.6=f(2)$$

Es falso. El rendimiento es mayor tras 2 meses.

b) Derivamos la función y buscamos cuando se anula la derivada.

$$f'(x)=\frac{1}{10}\left(15+12x-3x^2\right)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{10}\left(15+12x-3x^2\right)=0 \Rightarrow 15+12x-3x^2=0 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2+20}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases} \frac{4+6}{2}=\boxed{5=x} \\ \frac{4-6}{2}=-1\notin[0,12] \end{cases}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{1}{10}(12-6x) \Rightarrow f''(5)=\frac{1}{10}(12-30)=-1.8<0 \rightarrow x=5\ \textit{Máximo local}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo [0, 12] y en el máximo relativo.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\frac{1}{10}(800)=80 \\ f(5)=\frac{1}{10}\left(800+15\cdot 5+6\cdot 5^2-5^3\right)=90 \\ f(12)=\frac{1}{10}\left(800+15\cdot 12+6\cdot 12^2-12^3\right)=11.6 \end{array}\right\} \Rightarrow x=5 \text{ es máximo absoluto en } [0,12]$$

El máximo rendimiento (90 %) se alcanza cinco meses después de su compra.

c) El valor mínimo absoluto de la función se produce en el quinto mes y es del 11.6 %. Esto significa que la función se mantiene por encima de este valor en todo el año.
No se alcanza en ningún momento un rendimiento inferior al 10%.

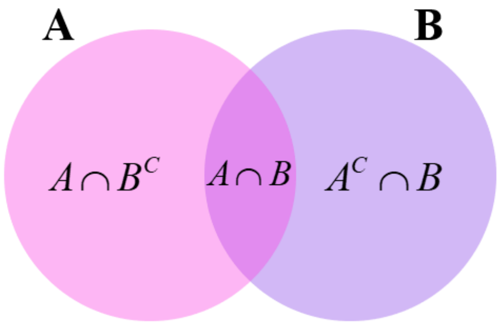
Problema 5. Dados dos sucesos A y B, se sabe que $P(B) = 0{,}4$, $P\left(A^C \cap B^C\right) = 0{,}2$ y $P\left(A \cap B\right) = 0{,}3$, siendo A^C y B^C los sucesos complementarios de A y B, respectivamente. Se pide:

a) Calcular la probabilidad del suceso $A \cup B$. *(2,5 puntos)*
b) Calcular la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos. *(2,5 puntos)*
c) Calcular la probabilidad de B condicionado a A. *(2,5 puntos)*
d) ¿Son independientes los sucesos A y B? *(2,5 puntos)*

a) Aplicamos la ley de Morgan $P\left(A^C \cap B^C\right) = P\left(\left(A \cup B\right)^C\right)$

$$\left.\begin{array}{l} P\left(A^C \cap B^C\right) = 0{,}2 \\ P\left(A^C \cap B^C\right) = P\left(\left(A \cup B\right)^C\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - P\left(A \cup B\right) = 0.2 \Rightarrow \boxed{P\left(A \cup B\right) = 0.8}$$

b) Nos piden calcular $P\left(\left(A \cap B^C\right) \cup \left(A^C \cap B\right)\right) = P\left(A \cup B\right) - P\left(A \cap B\right) = 0.8 - 0.3 = 0.5$



OTRA FORMA DE HACERLO

Nos piden calcular $P\left(\left(A \cap B^C\right) \cup \left(A^C \cap B\right)\right)$

Calculamos primero P(A).

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) \Rightarrow 0.8 = P\left(A\right) + 0.4 - 0.3 \Rightarrow P\left(A\right) = 0.7$$

Calculamos la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos.

$$P\left(\left(A \cap B^C\right) \cup \left(A^C \cap B\right)\right) = P\left(A \cap B^C\right) + P\left(A^C \cap B\right) - P\left(\left(A \cap B^C\right) \cap \left(A^C \cap B\right)\right) =$$
$$= P\left(A \cap B^C\right) + P\left(A^C \cap B\right) - 0 = P\left(A\right) - P\left(A \cap B\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) =$$
$$= 0.7 - 0.3 + 0.4 - 0.3 = \boxed{0.5}$$

c) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B / A\right) = \frac{P\left(B \cap A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7} \simeq 0.4286$$

d) Para que A y B sean independientes debe ocurrir que $P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right)P\left(B\right)$

$$\left.\begin{array}{l} P\left(A \cap B\right) = 0.3 \\ P\left(A\right) = 0.7 \\ P\left(B\right) = 0.4 \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(A \cap B\right) = 0.3 \neq 0.7 \cdot 0.4 = P\left(A\right)P\left(B\right)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

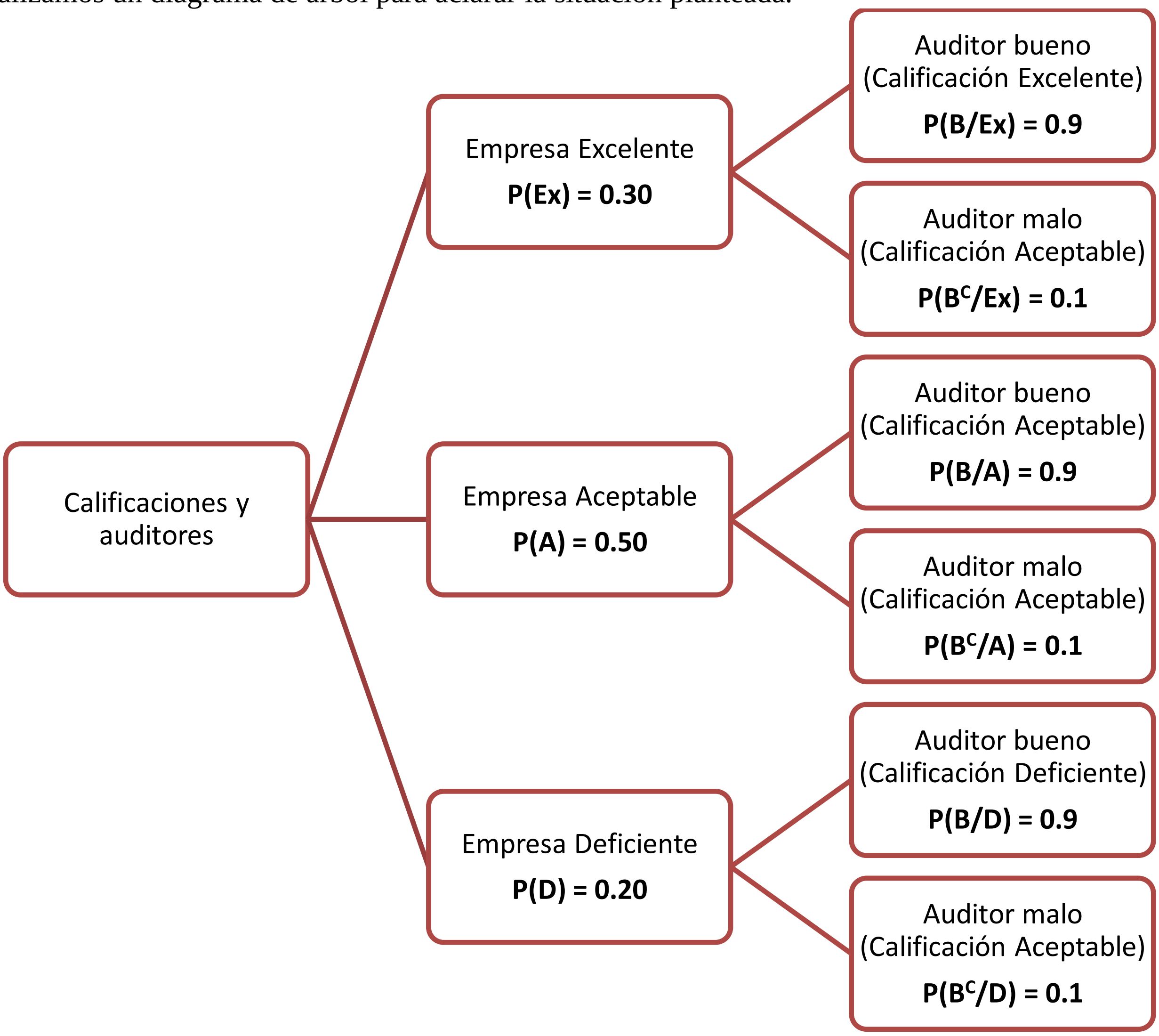
Problema 6. El director de una entidad que audita la contabilidad de empresas sabe, por experiencias pasadas, que cuando se hace una auditoría el 30% de las empresas merece una calificación de «Excelente», el 50% de las empresas merece la calificación de «Aceptable» y el 20% restante merece una calificación de «Deficiente». El director también sabe que entre los auditores de su entidad hay un 90% de auditores que siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10% de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de «Aceptable».

a) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»? *(3 puntos)*

b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece? *(3 puntos)*

c) Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no, el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la calificación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de «Aceptable», ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente? *(4 puntos)*

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar la situación planteada.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Calificación Deficiente}) = P(D)P(B/D) = 0.2 \cdot 0.9 = \boxed{0.18}$$

El 18 % de las empresas auditadas obtiene calificación "Deficiente" b)

$$P(Ex \cap B)+P(A)+P(D \cap B)=P(Ex)P(B/Ex)+P(A)+P(D)P(B/D)=$$

$$=0.3 \cdot 0.9+0.5+0.2 \cdot 0.9=0.27+0.5+0.18=\boxed{0.95}$$

El 95 % de las empresas auditadas obtienen una calificación correcta.

c) Nos piden calcular $P(\text{Auditor bueno} / \text{Calificación Aceptable})$.

$$P(\text{Auditor bueno} / \text{Calificación Aceptable})=\frac{P(\text{Auditor bueno} \cap \text{Calificación Aceptable})}{P(\text{Calificación Aceptable})}=$$

$$=\frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(Ex)P(B^C/Ex)+P(A)+P(D)P(B^C/D)}=\frac{0.5 \cdot 0.9}{0.3 \cdot 0.1+0.5+0.2 \cdot 0.1}=\boxed{\frac{9}{11} \simeq 0.818}$$