PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** <u>En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.</u>

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

<u>EJERCICIO 1</u> (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x-1} & si \;\; x\leq 0\\ \ln(1+x) & si \;\; x>0\end{cases}$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina a y b. **(1.5 puntos)**

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 2$. **(1 punto)**

<u>EJERCICIO 2</u> (2.5 puntos)

Halla *a*, *b* y *c* sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=a+bsen(x)+csen(2x)$ tiene un punto crítico en el punto de abscisa $x = \pi$ y la recta $y=-\frac{1}{2}x+3$ es normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 0$.

<u>EJERCICIO 3</u> (2.5 puntos)

Considera la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, así como sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(1 punto)**

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función *f* y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. **(1.5 puntos)**

<u>EJERCICIO 4</u> (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}\,dx$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=\sqrt{e^x}$)

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)
Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+\ \ y+2z=0 \\ 3x-\ \ y-2z=0 \\ -x+2y+mz=0 \end{cases}$$

a) Calcula m para que el sistema tenga infinitas soluciones y hállalas. **(1.5 puntos)**
b) Para $m = 2$, ¿existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 2.

a) Calcula razonadamente $\left|\frac{1}{3}A^{-1}A^t\right|$. **(0.5 puntos)**

b) Calcula razonadamente los determinantes

$$\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$. **(2 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)
Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-y-z=-4 \end{cases}$$

Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s, calcula su área.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)
Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+m\lambda \end{cases} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x-y+2z=3 \\ x+z=2 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s según los valores de m. **(1.5 puntos)**
b) Para $m = 1$, calcula el coseno del ángulo que forman las rectas r y s. **(1 punto)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x-1} & si\ \ x\le 0\\ \ln(1+x) & si\ \ x>0\end{cases}$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina a y b. **(1.5 puntos)**

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = 2*. **(1 punto)**.

a) Para que sea derivable debe ser continua y por tanto debe ser continua en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax+b}{x-1}=\dfrac{0+b}{0-1}=-b\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x)=\ln 1=0\\ f(0)=-b\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow -b=0\Rightarrow \boxed{b=0}$$

La función queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{x-1} & si\ \ x\le 0\\ \ln(1+x) & si\ \ x>0\end{cases}$

La función debe ser derivable en *x = 0*, por lo que deben coincidir sus derivadas laterales.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{a(x-1)-(ax)}{(x-1)^2} & si\ \ x<0\\ \dfrac{1}{1+x} & si\ \ x>0\end{cases}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\dfrac{a(0-1)-(0)}{(0-1)^2}=-a\\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\dfrac{1}{1+0}=1\\ f'(0^-)=f'(0^+)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a=1\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Los valores buscados son *a = –1* y *b = 0*.

b) La ecuación de la recta tangente en *x = 2* es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

La ecuación de la recta normal en *x = 2* es $y-f(2)=-\dfrac{1}{f'(2)}(x-2)$.

Calculamos el valor de la función y su derivada en *x = 2*.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\ln(1+2)=\ln 3 \\ f'(2)=\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow y-\ln 3=\frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow \boxed{y=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}+\ln 3}$$

La recta tangente es $y=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}+\ln 3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\ln 3 \\ f'(2)=\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow y-\ln 3=-\frac{1}{1/3}(x-2) \Rightarrow y-\ln 3=-3(x-2) \Rightarrow \boxed{y=-3x+6+\ln 3}$$

La recta normal es $y=-3x+6+\ln 3$.

EJERCICIO 2 **(2.5 puntos)**

Halla *a*, *b* y *c* sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=a+bsen(x)+csen(2x)$ tiene un punto crítico en el punto de abscisa *x* = *π* y la recta $y=-\frac{1}{2}x+3$ es normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = 0*.

Como la función tiene un punto crítico en *x* = *π* la derivada debe anularse en dicho valor.

$$f(x)=a+bsen(x)+csen(2x)\Rightarrow f'(x)=b\cos(x)+2c\cdot cos(2x)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=b\cos(x)+2c\cdot cos(2x) \\ f'(\pi)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow b\cos(\pi)+2c\cdot cos(2\pi)=0\Rightarrow \boxed{-b+2c=0}$$

Si la recta $y=-\frac{1}{2}x+3$ es normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = 0* deben cumplirse dos cosas:

Primero: Coinciden función y tangente en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=a+bsen(0)+csen(2\cdot 0)=a \\ y=-\frac{1}{2}0+3=3 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=3}$$

Segundo: La pendiente de la recta normal es la inversa de la derivada cambiada de signo.

$$y=-\frac{1}{2}x+3\rightarrow \text{pendiente}=-\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}=-\frac{1}{f'(0)}\Rightarrow f'(0)=2$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(0)=2 \\ f'(x)=b\cos(x)+2c\cdot cos(2x) \end{array}\right\}\Rightarrow b\cos(0)+2c\cdot cos(2\cdot 0)=2\Rightarrow \boxed{b+2c=2}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} b+2c=2 \\ -b+2c=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=2-2c \\ -b+2c=0 \end{array}\right\}\Rightarrow -2+2c+2c=0\Rightarrow 4c=2\Rightarrow \boxed{c=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=2-2\frac{1}{2}=2-1=1}$$

Los valores buscados son *a* = *3*; *b* = *1* y $c=\frac{1}{2}$.

EJERCICIO 3 **(2.5 puntos)**

Considera la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, así como sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(1 punto)**

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función *f* y las rectas *y = 0, x = 1, x = e.* **(1.5 puntos)**

a) Utilizamos la derivada.

$$f(x)=(\ln(x))^2 \Rightarrow f'(x)=2(\ln(x))\frac{1}{x}=\frac{2\ln(x)}{x}$$

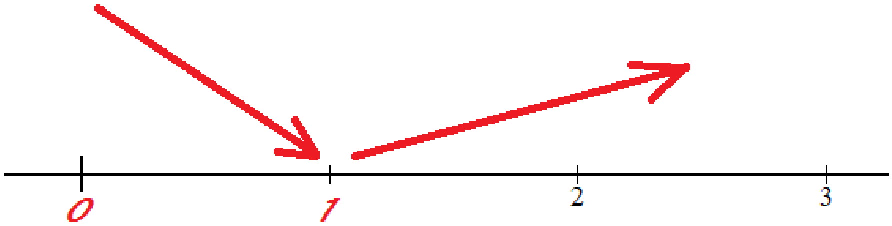
$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2\ln(x)}{x}=0 \Rightarrow 2\ln(x)=0 \Rightarrow \ln(x)=0 \Rightarrow \boxed{x=1}\in(0,+\infty)$$

Vemos que ocurre antes y después de *x = 1*.

En $(0,1)$ tomo *x = 0.5* y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{2\ln(0.5)}{0.5}\simeq -2.77<0$. La función decrece en $(0,1)$

En $(1,+\infty)$ tomo *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=\frac{2\ln(2)}{2}\simeq 0.69>0$. La función crece en $(1,+\infty)$

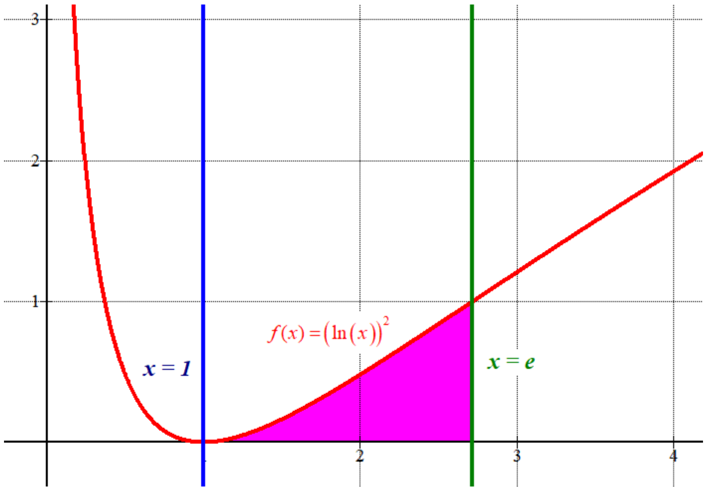
La función sigue el esquema:



La función decrece en $(0,1)$ y crece en $(1,+\infty)$.

Como $f(1)=(\ln(1))^2=0$ la función tiene un mínimo relativo en *x = 1* tomando la función el valor $f(1)=0$.

b) Dibujamos las rectas y la gráfica de la función. Coloreamos de rosa la región del plano de la cual queremos determinar su área.



El área de la región se calcula con la integral definida siguiente:

$$Área = \int_1^e (\ln(x))^2 \, dx$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int (\ln(x))^2 \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = (\ln(x))^2 \Rightarrow du = \dfrac{2\ln(x)}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x(\ln(x))^2 - \int x \frac{2\ln(x)}{x} dx =$$

$$= x(\ln(x))^2 - \int 2\ln(x) dx = x(\ln(x))^2 - 2\int \ln(x) dx = \ldots$$

$$\boxed{\int \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x) \Rightarrow du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x\ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x}$$

$$\ldots = x(\ln(x))^2 - 2(x\ln(x) - x) = \boxed{x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + K}$$

Calculamos el valor del área pedida.

$$Área = \int_1^e (\ln(x))^2 \, dx = \left[x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x \right]_1^e =$$

$$= e(\ln(e))^2 - 2e\ln(e) + 2e - \left[1\cdot(\ln(1))^2 - 2\ln(1) + 2 \right] = e - \cancel{2e} + \cancel{2e} - 2 = \boxed{e - 2 \simeq 0.72 u^2}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}\,dx$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=\sqrt{e^x}$)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=\sqrt{e^x}=e^{x/2}\rightarrow dt=e^{x/2}\cdot\frac{1}{2}dx\rightarrow dx=\frac{2dt}{e^{x/2}}=\frac{2dt}{t}\end{array}\right\} = \int \frac{1}{1+t}\frac{2dt}{t} =$$

$$=2\int \frac{1}{t(1+t)}\,dt = \ldots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{t(1+t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}\Rightarrow \frac{1}{t(1+t)}=\frac{A(1+t)}{t(1+t)}+\frac{Bt}{t(1+t)}=\frac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A(1+t)+Bt\Rightarrow \begin{cases} t=0\rightarrow 1=A\\ t=-1\rightarrow 1=-B\rightarrow B=-1\end{cases}\Rightarrow \boxed{\frac{1}{t(1+t)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}}$$

$$\ldots=2\left[\int\frac{1}{t}dt-\int\frac{1}{1+t}dt\right]=2\left[\ln t-\ln(1+t)\right]=\left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ t=\sqrt{e^x}=e^{x/2}\end{array}\right\}=$$

$$=2\left[\ln\left(e^{x/2}\right)-\ln\left(1+e^{x/2}\right)\right]=2\left[\frac{x}{2}-\ln\left(1+e^{x/2}\right)\right]=x-2\ln\left(1+e^{x/2}\right)+K$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}\,dx=\left[x-2\ln\left(1+e^{x/2}\right)\right]_0^2=$$

$$=\left[2-2\ln\left(1+e^{2/2}\right)\right]-\left[0-2\ln\left(1+e^{0/2}\right)\right]=\boxed{2-2\ln(1+e)+2\ln(2)\simeq 0.76}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+\ \ y+2z=0 \\ 3x-\ \ y-2z=0 \\ -x+2y+mz=0 \end{cases}$$

a) Calcula *m* para que el sistema tenga infinitas soluciones y hállalas. **(1.5 puntos)**

b) Para *m = 2*, ¿existe alguna solución tal que *z = 1*? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & m \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & m & 0 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & m \end{vmatrix}=-m+2+12-2-3m+4=16-4m$$

$$|A|=0\Rightarrow 16-4m=0\Rightarrow 4m=16\Rightarrow \boxed{m=4}$$

Estudiamos por separado 2 casos diferentes.

CASO 1. $m\neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m=4$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 3ª + Fila 1ª} \\ -1 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 6 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3ª} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases}\text{Fila } 2^{a} - 3\cdot\text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & -6 & 0 \\ \hline 0 & -4 & -8 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^{a}\end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases}4\cdot\text{Fila } 3^{a} + 3\cdot\text{Fila } 2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 12 & 24 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

El sistema tiene infinitas soluciones cuando *m* = *4*. Determinamos las soluciones partiendo de la matriz triangular equivalente obtenida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ -4y-8z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ y=-2z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2z+2z=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=0 \\ y=-2t\,,\ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}}$$

Las soluciones son: $x=0;\ \ y=-2t;\ \ z=t;\ \ t\in\mathbb{R}$

b) Para *m* = *2* estamos en el caso 1 y el sistema tiene una única solución. Sustituimos *m* = *2* y *z* = *1* e intentamos resolver.

$$\begin{cases} x+\ \ y+2=0 \\ 3x-\ \ y-2=0 \\ -x+2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2-y \\ 3x-\ \ y-2=0 \\ -x+2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(-2-y)-y-2=0 \\ -(-2-y)+2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6-3y-y-2=0 \\ 2+y+2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y=8 \\ 3y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{8}{-4}=-2 \\ y=\dfrac{-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{¡Imposible! } ¡-2 \neq \frac{-4}{3}!$$

Para *m* = *2* no existe ningna solución tal que *z* = *1*.

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 2.

a) Calcula razonadamente $\left|\frac{1}{3}A^{-1}A^{t}\right|$. **(0.5 puntos)**

b) Calcula razonadamente los determinantes

$$\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}. \text{ **(2 puntos)**}$$

a) Sabemos que $|A|=2$, por lo que $|A^{t}|=|A|=2$ y también $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{2}$

$$\left|\frac{1}{3}A^{-1}A^{t}\right|=\left\{\begin{array}{l}\text{Determinante de un número por una matriz cuadrada de orden 3 =} \\ \text{= (número)}^{3}\cdot\text{ Determinante de matriz}\end{array}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left|A^{-1}A^{t}\right|=\left\{\begin{array}{l}\text{Determinante de un producto de matrices de orden 3 =} \\ \text{= Producto de determinantes}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{27}\left|A^{-1}\right|\cdot\left|A^{t}\right|=\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\boxed{\frac{1}{27}}$$

b) Sabemos que $|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2$.

El primer determinante.

$$\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\left\{\text{Sacamos factor común 2 en 1}^{\text{a}}\text{ fila}\right\}=2\begin{vmatrix} 3c & b & a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\text{Sacamos factor común 3 en 1}^{\text{a}}\text{ columna}\right\}=2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Intercambiamos columna 1}^{\text{a}}\text{ y 3}^{\text{a}} \\ \text{El determinante cambia de signo}\end{array}\right\}=-6\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-6\cdot 2=\boxed{-12}$$

El segundo determinante.

$$\begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambio columna 3ª y 2ª} \\ \text{El determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = -\begin{vmatrix} 2a-2b & b & c \\ 2d-2e & e & f \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2a-2b & b & c \\ 2d-2e & e & f \\ 2-4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Separo el determinante en suma de dos determinantes} \\ \text{separando las sumas de los elementos de la 1ª columna} \end{array} \right\} =$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2b & b & c \\ -2e & e & f \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{El segundo determinante vale cero, pues} \\ \text{la columna 1ª y la 2ª son proporcionales} \end{array} \right\} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \text{Saco factor común 2 en la 1ª columna} \right\} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = \boxed{-4}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s, calcula su área.

Estudiamos la posición relativa de ambas rectas.

Previamente obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} P_r(0,-2,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z + 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases} \Rightarrow 3(y - z + 2) - y - z = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y - 3z + 6 - y - z = -4 \Rightarrow 2y - 4z = -10 \Rightarrow y - 2z = -5 \Rightarrow y = -5 + 2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -5 + 2z - z + 2 = -3 + z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} Q_s(-3,-5,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,2,1) \end{cases}}$$

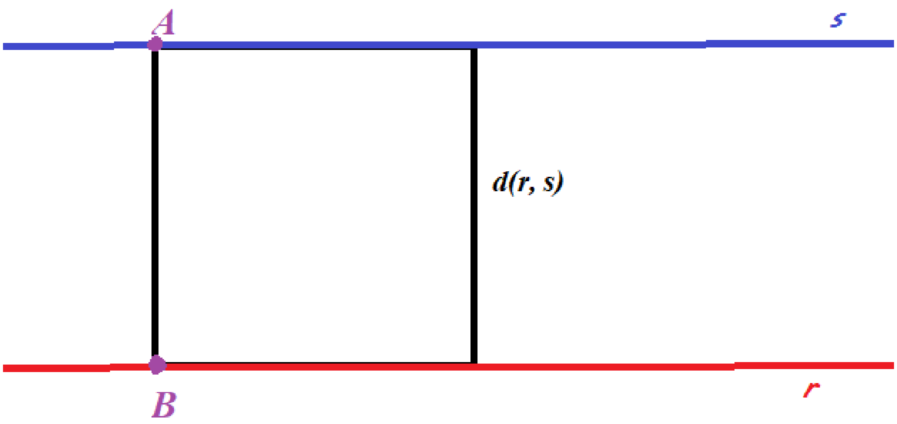
Como tienen el mismo vector director las rectas son paralelas o coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} s \equiv \begin{cases} Q_s(-3,-5,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,2,1) \end{cases} \\ \\ r \equiv \begin{cases} P_r(0,-2,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{v_s} = (1,2,1)$$

Vemos si un punto cualquiera de la recta *s* pertenece a la recta *r*.

$$¿Q_s(-3,-5,0) \in r? \Rightarrow ¿\frac{-3}{1} = \frac{-5+2}{2} = \frac{0-1}{1}? \Rightarrow -3 \neq \frac{-3}{2} \neq -1$$

Las rectas no son coincidentes y son paralelas. Por lo que la situación planteada es:



El área del cuadrado es el cuadrado de su lado que es igual a la distancia entre las rectas *r* y *s*.

Para calcular esta distancia necesitamos encontrar dos puntos, un punto A de la recta *s* y otro B de la recta *r* que estén enfrentados.

Para ello determino el plano π perpendicular a ambas rectas y que pase por el punto $P_r(0,-2,1)$, con lo que ya tenemos que el punto B = $P_r(0,-2,1)$.

Si el plano π es perpendicular a la recta entonces el vector normal del plano es el director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} P_r(0,-2,1) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,2,1) \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{n}=\overrightarrow{u_r}=(1,2,1) \\ P_r(0,-2,1)\in\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \pi \equiv x+2y+z+D=0 \\ P_r(0,-2,1)\in\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0-4+1+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=3 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+2y+z+3=0}$$

Hallamos el punto A de corte del plano π y la recta *s*.

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x+2y+z+3=0 \\ s \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-3+\lambda)+2(-5+2\lambda)+\lambda+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3+\lambda-10+4\lambda+\lambda+3=0 \Rightarrow 6\lambda=10 \Rightarrow \lambda=\frac{10}{6}=\frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-3+\frac{5}{3}=\frac{-4}{3} \\ y=-5+\frac{10}{3}=\frac{-5}{3} \Rightarrow \boxed{A\left(\frac{-4}{3},\frac{-5}{3},\frac{5}{3}\right)} \\ z=\lambda=\frac{5}{3} \end{cases}$$

Lado del cuadrado = $d(r,\ s)=d(A,\ B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\ldots$

$$\overrightarrow{AB}=(0,-2,1)-\left(\frac{-4}{3},\frac{-5}{3},\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{4}{3},\frac{-1}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

$$\ldots=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{-1}{3}\right)^2+\left(\frac{-2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

El área del cuadrado es $\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2=\frac{21}{9}=\boxed{\frac{7}{3}\simeq 2.33u^2}$

EJERCICIO 8 **(2.5 puntos)**

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2+m\lambda \end{cases} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x-y+2z = 3 \\ x+z = 2 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s* según los valores de *m*. **(1.5 puntos)**

b) Para *m = 1*, calcula el coseno del ángulo que forman las rectas *r* y *s*. **(1 punto)**

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2+m\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} P_r(1,1,2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,m) \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y+2z = 3 \\ x+z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z = 3 \\ x = 2-z \end{cases} \Rightarrow 2-z-y+2z = 3 \Rightarrow z-y = 1 \Rightarrow y = -1+z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} Q_s(2,-1,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,1,1) \end{cases}}$$

Si las coordenadas de los vectores directores son proporcionales las rectas podrían ser paralelas o coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,m) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} ¿= \frac{m}{1}?$$

Por lo que las rectas nunca pueden ser ni paralelas ni coincidentes.

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} P_r(1,1,2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,m) \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} Q_s(2,-1,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,1,1) \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (2,-1,0)-(1,1,2) = (1,-2,-2)$$

$$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2+1+2m-m-2+2 = m-1$$

Averiguamos cuando se anula este producto mixto.

$$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = 0 \Rightarrow m-1 = 0 \Rightarrow \boxed{m=1}$$

Tenemos dos situaciones diferentes.

CASO 1. Si $m = 1$ el producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ es nulo y las rectas se cortan.

CASO 2. Si $m \neq 1$ el producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ es no nulo y las rectas se cruzan.

b) Para $m = 1$ las rectas se cortan y forman un ángulo que determinamos usando el producto escalar de sus vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(r,s) = \cos\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left|(1,1,1)(-1,1,1)\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{3}$$

Tenemos que $\cos(r,s) = \frac{1}{3}$.