Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2021–2022

MATERIA: MATEMÁTICAS II	**(1)**
	Convocatoria:

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Resuelve los siguientes apartados:

a) Considera la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 1.75 ptos

Calcular los coeficientes a, b, c, d, sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$

Dar la expresión de la función $f(x)$

b) Resuelve el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ 0.75 ptos

1B. Considera las siguientes funciones: $y=3x-x^2$; $y=x-3$

a) Representa el recinto que encierra las dos funciones anteriores 1.5 ptos

b) Calcula el área del recinto limitado por las funciones anteriores 1 pto

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Resuelve los siguientes apartados:

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, para $k\in\mathbb{R}$ sea C la matriz dada por: 0.75 ptos

$$C=A^t+kB\cdot A$$

Averigua para qué valores de k, la matriz C tiene rango 2

b) Encuentra la matriz X, de dimensión $3x3$, que verifica $M^t\cdot X=I-M$, donde

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$ 1.75 ptos

2B. Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned}2x+6y+kz&=0\\ kx+4y+2z&=2\\ kx+6y+2z&=k-2\end{aligned}\right\}$

a) Discute la resolución del sistema según los valores que puede tomar el parámetro $\boldsymbol{k}$ 1.5 ptos

b) Resuelve el sistema cuando el parámetro k toma el valor $\boldsymbol{k=0}$ 1 pto

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

a) Dadas las rectas $r:\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$, estudia la posición relativa entre r y s 1.5 ptos

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\pi : 2x-y+z-5=0$ 1 pto

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} -3x+2y=5 \\ -4y+3z+7=0 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv 5x-6y+7z+58=0$$

a) Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A, dar la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A 1.5 ptos

b) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π 1 pto

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. El 10% de la población de Canarias tiene alergia a la flor del olivo. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:

a) En una muestra de 100 individuos, ¿qué probabilidad hay de que más de 12 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo? 1 pto

b) Se toma una muestra de 400 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 32 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo? 1 pto

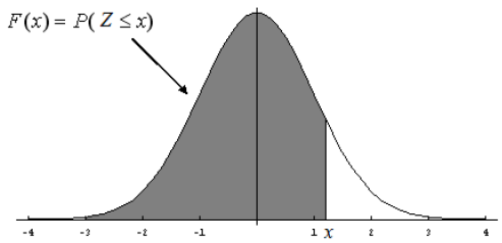
c) En una muestra de 500 individuos, ¿cuál es el número esperado de individuos que no tendrán alergia a la flor del olivo? 0.5 ptos

4B. Una prueba, utilizada para determinar la presencia de plomo en una aleación de acero, es errónea en 8 de cada 100 análisis realizados.

a) Se realizan 10 análisis con esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de estos análisis sean erróneos? 1 pto

b) Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: “En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5% de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos” 1 pto

c) Si se realizan 100 análisis con esta prueba, ¿cuál es el número esperado de análisis correctos? 0.5 ptos



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Resuelve los siguientes apartados:

a) Considera la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 1.75 ptos

Calcular los coeficientes *a, b, c, d*, sabiendo que *f* tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$

Dar la expresión de la función $f(x)$

b) Resuelve el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ 0.75 ptos

a) Si *f* tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ implica que *f(0) = 1* y que *f ´(0) = 0.*

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \\ f(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=d \Rightarrow \boxed{d=1}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

Siendo *c = 0* y *d = 1* la función tiene la expresión $f(x)=ax^3+bx^2+1$

Si la gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$ implica que *f(1) = –1* y que *f ´´(1) = 0.*

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^3+bx^2+1 \\ f(1)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1=a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+1 \Rightarrow \boxed{a+b=-2}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3ax^2+2bx \to f''(x)=6ax+2b \\ f''(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=6a\cdot 1^2+2b \Rightarrow \boxed{6a+2b=0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} a+b=-2 \\ 6a+2b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b=-2-a \\ 3a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a-2-a=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=-2-1=-3}$$

Los valores buscados son *a = 1*; *b = –3*; *c = 0* y *d = 1*.

La función tiene la expresión $f(x)=x^3-3x^2+1$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{e^0+e^{-0}-2}{1-\cos 0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sen x}=\frac{e^0-e^{-0}}{sen 0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{e^0+e^{-0}}{\cos 0}=\boxed{2}$$

1B. Considera las siguientes funciones: $y = 3x - x^2$; $y = x - 3$

a) Represente el recinto que encierra las dos funciones anteriores 1.5 ptos

b) Calcula el área del recinto limitado por las funciones anteriores 1 pto

a) Las gráficas son de una parábola y una recta.

Hallamos el vértice de la parábola.

$$\left.\begin{array}{l} y' = 3 - 2x \\ y' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

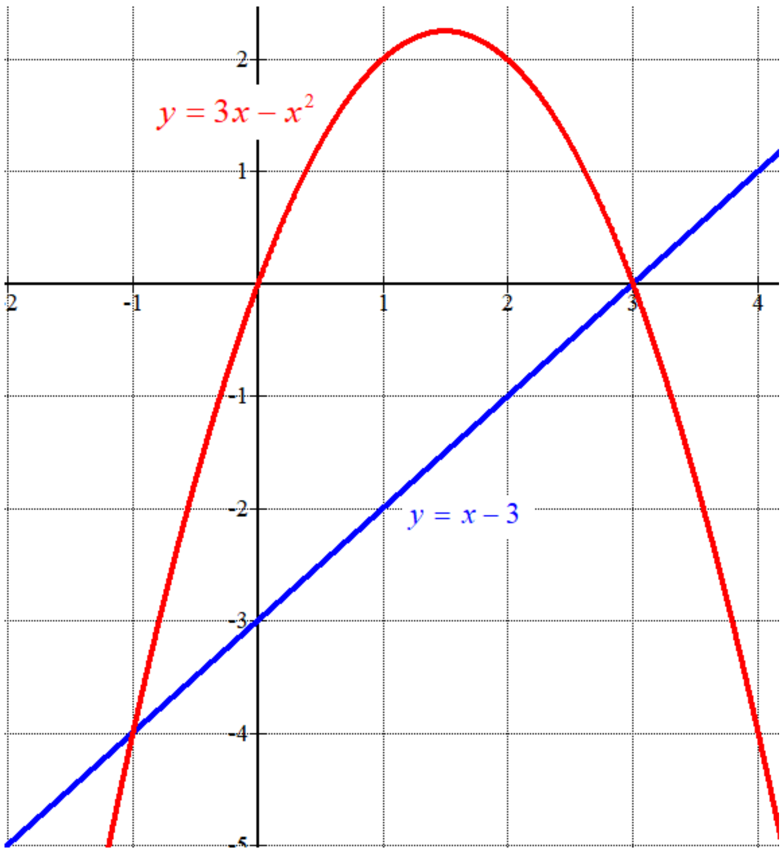
$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y = x - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x - x^2 = x - 3 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 = x \\ \frac{2-4}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos las gráficas.

x	$y = 3x - x^2$
-1	-4
0	0
1.5	2.25
2	2
3	0

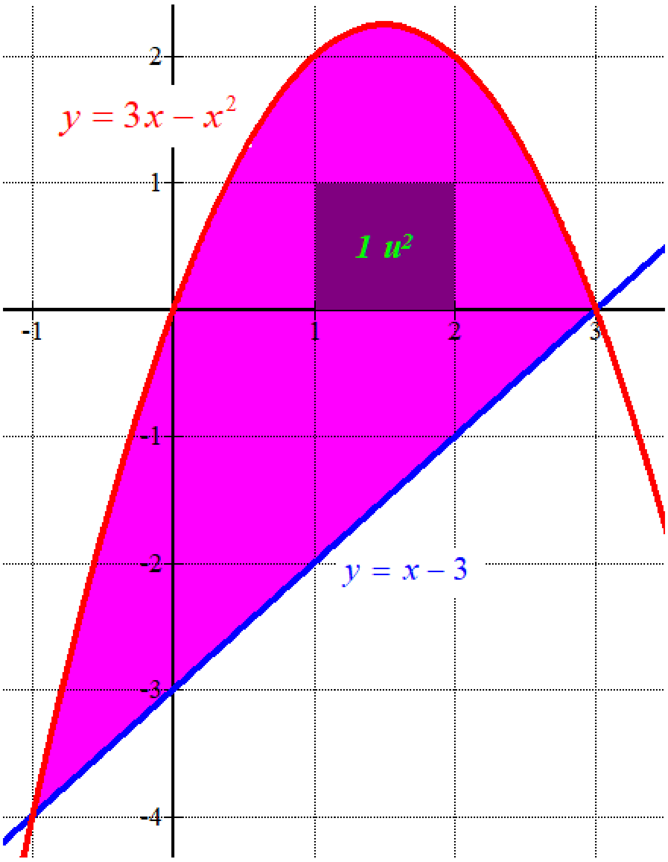
x	$y = x - 3$
-1	-4
0	-3
1.5	-1.5
2	-1
3	0



b) El área del recinto limitado por las dos funciones es el valor de la integral definida entre -1 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$Área = \int_{-1}^{3} 3x - x^2 - (x-3)\,dx = \int_{-1}^{3} 2x - x^2 + 3dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left[3^2 - \frac{3^3}{3} + 3\cdot 3 \right] - \left[(-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} + 3(-1) \right] = 9 - 9 + 9 - 1 - \frac{1}{3} + 3 = \boxed{\frac{32}{3} \simeq 10.67\,u^2}$$



Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Resuelve los siguientes apartados:

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, para $k \in \mathbb{R}$ sea C la matriz dada por: 0.75 ptos

$$C = A^t + kB\cdot A$$

Averigua para qué valores de k, la matriz C tiene rango 2

b) Encuentra la matriz X, de dimensión 3x3, que verifica $M^t \cdot X = I - M$, donde

$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 1.75 ptos

a) Calculamos la expresión de la matriz C.

$$C = A^t + kB\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-1 & -1+1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-k & 0\\ 1 & 1+k\end{pmatrix}$$

Para que la matriz C tenga rango 2 debe tener determinante no nulo.

$$|C| = \begin{vmatrix}1-k & 0\\ 1 & 1+k\end{vmatrix} = (1-k)(1+k)$$

$$|C| = 0 \Rightarrow (1-k)(1+k) = 0 \Rightarrow \begin{cases}1-k=0 \to \boxed{k=1}\\ 1+k=0 \to \boxed{k=-1}\end{cases}$$

La matriz C tiene rango 2 si k es distinto de 1 y de –1.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$M^t \cdot X = I - M \Rightarrow X = \left(M^t\right)^{-1}(I-M)$$

Comprobamos que la matriz M^t tiene inversa y la calculamos.

$$M = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\left|M^t\right| = \begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = 0+0+0-0+1-0 = 1 \neq 0.\ \text{Existe la inversa de } M^t$$

$$\left(M^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(M^t\right)^t\right)}{\left|M^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1&0\\1&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\0&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&0\\-1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\left(M^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y obtenemos X.

$$X=\left(M^t\right)^{-1}(I-M)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1&-1+2-1&2\\1&-1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&0&2\\1&-1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}}$$

2B. Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 2x+6y+kz=0 \\ kx+4y+2z=2 \\ kx+6y+2z=k-2 \end{array}\right\}$

a) Discute la resolución del sistema según los valores que puede tomar el parámetro ***k*** 1.5 ptos
b) Resuelve el sistema cuando el parámetro *k* toma el valor ***k* = 0** 1 pto

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & k \\ k & 4 & 2 \\ k & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & k & 0 \\ k & 4 & 2 & 2 \\ k & 6 & 2 & k-2 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el rango de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 6 & k \\ k & 4 & 2 \\ k & 6 & 2 \end{vmatrix}=16+12k+6k^2-4k^2-12k-24=2k^2-8$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2k^2-8=0 \Rightarrow k^2=4 \Rightarrow \boxed{k=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Distinguimos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. Si $k \neq \pm 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $k=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+6y-2z=0 \\ -2x+4y+2z=2 \\ -2x+6y+2z=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ecuación\,2^a + Ecuación\,1^a \\ \begin{array}{rrrl} -2x & +4y & +2z & =2 \\ 2x & +6y & -2z & =0 \\ \hline & 10y & & =2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Ecuación\,3^a + Ecuación\,1^a \\ \begin{array}{rrrl} -2x & +6y & +2z & =-4 \\ 2x & +6y & -2z & =0 \\ \hline & 12y & & =-4 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+6y-2z=0 \\ 10y \quad =2 \\ 12y \quad =-4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+6y-2z=0 \\ \Rightarrow \quad y=\dfrac{2}{10}=0.2 \\ y=\dfrac{-4}{12}=-0.33 \end{array}\right\} \text{¡Imposible!}$$

El sistema no tiene solución.

CASO 3. Si $k=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+6y+2z=0 \\ 2x+4y+2z=2 \\ 2x+6y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ecuación\, 1^a = Ecuación\, 3^a \\ \text{podemos quitar la ecuación } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+6y+2z=0 \\ 2x+4y+2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{Ecuación\, 2^a - Ecuación\, 1^a} \\ 2x & +4y & +2z & =2 \\ -2x & -6y & -2z & =0 \\ \hline & -2y & & =2 \to \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+6y+2z=0 \\ -2y \quad\quad =2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+6y+2z=0 \\ \boxed{y=\dfrac{2}{-2}=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-6+2z=0 \Rightarrow x-3+z=0 \Rightarrow \boxed{x=3-z}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) siendo las soluciones:

$$x=3-t;\ y=-1;\ z=t \qquad t\in\mathbb{R}$$

b) Si $\boldsymbol{k=0}$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+6y \quad\quad =0 \\ 4y+2z=2 \\ 6y+2z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y \quad\quad =0 \\ 2y+z=1 \\ 3y+z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y \quad =0 \\ z=1-2y \\ 3y+z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y \quad =0 \\ 3y+1-2y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=0 \\ \boxed{y=-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-6=0 \to \boxed{x=6} \\ \boxed{z=1+4=5} \end{array}\right.$$

La solución es $x=6;\ y=-2;\ z=5$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

a) Dadas las rectas $r:\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$, estudia la posición relativa entre r y s 1.5 ptos

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z-5=0$ 1 pto

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r:\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-y-z \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases} \Rightarrow -2-2y-2z-y+3z-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y+z-4=0 \Rightarrow \boxed{z=4+3y} \Rightarrow x=-1-y-(4+3y)=-1-y-4-3y=-5-4y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} x=-5-4\alpha \\ y=\alpha \\ z=4+3\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} P_r(-5,0,4) \\ \overrightarrow{u_r}=(-4,1,3) \end{cases}}$$

$$s:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{s:\begin{cases} Q_s(-1,1,-1) \\ \overrightarrow{v_s}(2,1,-3) \end{cases}}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-4,1,3) \\ \overrightarrow{v_s}(2,1,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{3}{-3}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s}=(-1,1,-1)-(-5,0,4)=(4,1,-5)$$

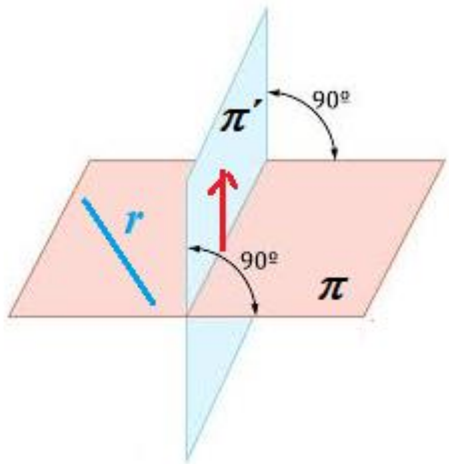
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_rQ_s}=(4,1,-5) \\ \overrightarrow{u_r}=(-4,1,3) \\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 20-12+6-12+10-12=0$$

Como $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]=0$ entonces las rectas r y s se cortan (son coplanarias).

b) Como el plano π´ pedido contiene a la recta r contiene al punto Pr.

Si el plano pedido contiene a la recta r tiene como uno de sus vectores directores el vector director $\overrightarrow{u_r}$ de la recta r.

Si el plano pedido es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano π.



$$\pi : 2x - y + z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2,-1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_r(-5,0,4) \in \pi' \\ \vec{u} = \overrightarrow{u_r} = (-4,1,3) \\ \vec{v} = \vec{n} = (2,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x+5 & y & z-4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+5+6y+4(z-4)-2(z-4)+4y+3(x+5)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+5+6y+4z-16-2z+8+4y+3x+15=0 \Rightarrow 4x+10y+2z+12=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' : 2x+5y+z+6=0}$$

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} -3x+2y=5 \\ -4y+3z+7=0 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv 5x-6y+7z+58=0$$

a) Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A, dar la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A 1.5 ptos

b) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π 1 pto

a) Pasamos las coordenadas de la recta r a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} -3x+2y=5 \\ -4y+3z+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x=5-2y \\ 3z=-7+4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}y \\ z=-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto A intersección de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 5x-6y+7z+58=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 5\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\lambda\right)-6\lambda+7\left(-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}\lambda\right)+58=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{25}{3}+\frac{10}{3}\lambda-6\lambda-\frac{49}{3}+\frac{28}{3}\lambda+58=0 \Rightarrow -25+10\lambda-18\lambda-49+28\lambda+174=0 \Rightarrow$$

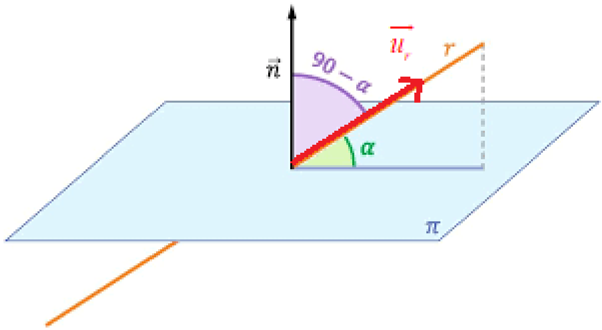
$$\Rightarrow 20\lambda=-100 \Rightarrow \lambda=\frac{-100}{20}=-5 \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}(-5)=-5 \\ y=-5 \\ z=-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}(-5)=-9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-5,-5,-9)}$$

La recta s, perpendicular al plano π tiene como vector director el normal del plano. Además, pasa por dicho punto A.

$$\pi \equiv 5x-6y+7z+58=0 \Rightarrow \vec{n}=(5,-6,7)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(-5,-5,-9) \in s \\ \vec{v}_s=\vec{n}=(5,-6,7) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s: \begin{cases} x=-5+5\alpha \\ y=-5-6\alpha \\ z=-9+7\alpha \end{cases}}$$

b) Hallamos el ángulo que forma el vector normal del plano y el director de la recta $\vec{u}_r$.



$$r \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\dfrac{7}{3} + \dfrac{4}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{w_r} = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_r} = 3\overrightarrow{w_r} = (2,3,4)$$

$$\pi \equiv 5x - 6y + 7z + 58 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (5,-6,7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,4) \\ \vec{n} = (5,-6,7) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{u_r}, \vec{n}\right) = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \vec{n}}{\left|\overrightarrow{u_r}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{(2,3,4)(5,-6,7)}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}\sqrt{5^2+(-6)^2+7^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{u_r}, \vec{n}\right) = \frac{10-18+28}{\sqrt{29}\sqrt{110}} = \frac{20}{\sqrt{3190}} \Rightarrow \left(\overrightarrow{u_r}, \vec{n}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{20}{\sqrt{3190}}\right) \simeq 69^{\circ}$$

El ángulo entre vector director de recta y normal del plano es de 69º por lo que el ángulo entre recta y plano es 90º – 69º = 21º.

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. El 10% de la población de Canarias tiene alergia a la flor del olivo. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:
a) En una muestra de 100 individuos, ¿qué probabilidad hay de que más de 12 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo? 1 pto
b) Se toma una muestra de 400 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 32 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo? 1 pto
c) En una muestra de 500 individuos, ¿cuál es el número esperado de individuos que no tendrán alergia a la flor del olivo? 0.5 ptos

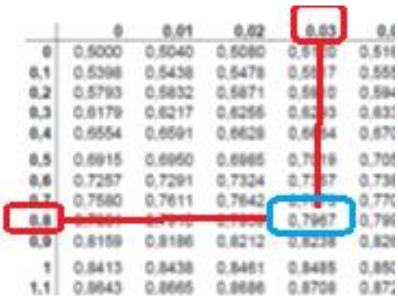
a) La proporción de población de Canarias que tiene alergia a la flor del olivo es p = 0.1
Llamamos X al número de personas de la muestra de 100 individuos que tendrá alergia a la flor del olivo.
Como con cada individuo de la muestra sólo se puede dar que tenga alergia o no y esto se repite con cada uno, siendo sucesos independientes, se puede afirmar que: la variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros: $n = 100$ y $p = 0.10$

$X = B(100, 0.10)$

Como la cantidad de repeticiones es muy alta (100), la distribución binomial se podría aproximar por una distribución normal, si se dan las condiciones:
Como $n \cdot p = 10$ y $n \cdot q = 90 \geq 5$, podemos aproximar esta binomial a una normal de media $\mu = n \cdot p = 10$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 3$
La variable aleatoria X se aproxima con una normal Y = N(10, 3).
Nos piden calcular $P(X > 12)$. Hacemos la corrección de Yates y calculamos esta probabilidad con la normal.

$$P(X > 12) = P(Y \geq 12.5) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{12.5 - 10}{3}\right) = P(Z \geq 0.83) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.83) = 1 - 0.7967 = \boxed{0.2033}$$



	0	0,01	0,02	0,03	[illegible]
0	0,5000	0,5040	0,5080	[illegible]	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	[illegible]	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	[illegible]	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	[illegible]	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0,7580	0,7611	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7967	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	[illegible]	[illegible]
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	[illegible]

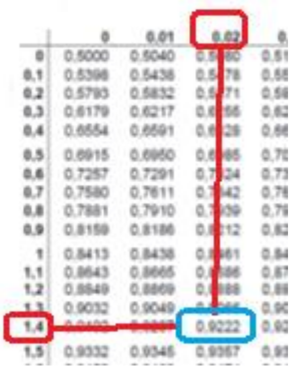
Existe una probabilidad de 0.20 de que en 100 canarios haya más de 12 alérgicos a la flor del olivo.

b) Cambia el tamaño de la muestra y la variable es ahora una binomial de parámetros $n = 400$ y $p = 0.1$.
$X = B(400, 0.1)$

Aproximamos la binomial a una normal de media $\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0.1 = 40$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 6$ → Y = N(40, 6).

$$P\left(X<32\right)=\left\{\text{Corrección de Yates}\right\}=P\left(Y\leq 31.5\right)=\left\{\textit{Tipificamos}\right\}=P\left(Z\leq\frac{31.5-40}{6}\right)=$$

$$=P\left(Z\leq -1.42\right)=P\left(Z\geq 1.42\right)=1-P\left(Z\leq 1.42\right)=1-0.9222=\boxed{0.0773}$$



	0	0,01	0,02
0	0,5000	0,5040	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	[illegible]
1	0,8413	0,8438	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	[illegible]
1,4	[illegible]	[illegible]	0,9222
1,5	0,9332	0,9345	0,9357

Por tanto, hay una probabilidad de 0.08 de que haya menos de 32 personas alérgicas a la flor del olivo.

c) Cambia el tamaño de la muestra y la variable es ahora una binomial de parámetros $n=500$ y $p=0.1$.

$X=B(500,\ 0.1)$

La esperanza o media es n · p = 500 · 0.1 = 50.

Se espera que, en un grupo de 500 canarios, por término medio, haya 50 canarios que tengan alergia a la flor del olivo.

Por tanto, se espera que 500 – 50 = 450 canarios no tengan alergia a la flor del olivo.

4B. Una prueba, utilizada para determinar la presencia de plomo en una aleación de acero, es errónea en 8 de cada 100 análisis realizados.
a) Se realizan 10 análisis con esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de estos análisis sean erróneos? 1 pto
b) Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: "En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5% de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos" 1 pto
c) Si se realizan 100 análisis con esta prueba, ¿cuál es el número esperado de análisis correctos? 0.5 ptos

a) p es la proporción de test que dan resultado erróneo al aplicarlos: $p = 0.08$
Llamamos X al número de test que dan resultado erróneo al aplicarlos.

Como con cada test de la muestra sólo se puede dar que sea correcto o erróneo y esto se repite cada vez que se aplica, siendo sucesos independientes, se puede afirmar que: la variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros: $n = 10$ y $p = 0.08$

$X = B(10, 0.08)$

$$P(X=3)=\binom{10}{3}0.08^3\cdot 0.92^7=0.0342$$

La probabilidad de encontrar exactamente 3 resultados erróneos es 0.034

b) Calculamos P(X > 2).
Para ello utilizamos el suceso contrario pues es más laborioso con el suceso directo (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10).

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{10}{0}0.08^0\cdot 0.92^{10}+\binom{10}{1}0.08^1\cdot 0.92^9+\binom{10}{2}0.08^2\cdot 0.92^8\right]=$$

$$=1-\left[0.4343+0.3777+0.1478\right]=\boxed{0.0474}$$

Como 0.0474 < 0.05 la afirmación es cierta.

c) Si llamamos q a la probabilidad del suceso resultado correcto al aplicar el test, tenemos que $q=0.92$.

Llamamos Y a la variable que contabiliza el número de test de respuesta correcta.

Y = B(100, 0.92)

El número esperado de análisis correctos es $n \cdot q = 100 \cdot 092 = 92.$

Por lo que, cuando se realizan 100 test, se espera encontrar una media de 92 análisis correctos.