Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2021/2022

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+2y+3z=a+1 \\ ax \qquad + \ z=0 \\ x+\ y+2z=1 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para *a* = 1, si es posible.

2. a) **[1,5 puntos]** Encuentra razonadamente el valor de *a*, *b* $\in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x)=\frac{ax+1}{2x+b}$$

tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \to +\infty$.

b) **[1 puntos]** Resuelve la integral:

$$\int x\cdot\cos(2x)\,dx$$

3. a) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x)=\left(2e^{x^2-4}-8x+14\right)/\left(x^2-2x\right).$$

b) **[1 punto]** Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2,$$

donde *x, y, a, b, c* $\in \mathbb{R}$. Calcula razonadamente (e indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

4. Sea el punto A = (1, 0, 1) y el plano $\pi \equiv x+y+z=8$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por *A*. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

b) **[1 punto]** Obtén el punto de la recta anterior distinto de *A* que dista de π igual que *A*, es decir, el punto simétrico de *A* con respecto a π.

5. a) **[1 punto]** Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B..

b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = 3 - x$.

6. a) **[1,5 puntos]** Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

b) **[1 punto]** Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función

$$f(x) = \left(2e^x - 8x - 3\right)/\left(x^2 + 2\right)$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

7. a) **[1,5 puntos]** Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X, A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

8. *a*) En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe?

a.2) **[0,75 puntos]** Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido a clase?

b) Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

SOLUCIONES

1. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+2y+3z=a+1 \\ ax \quad + \ z=0 \\ x+ \ y+2z=1 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para a = 1, si es posible.

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a+1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+3a-0-4a-1=-a+1$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Existen dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x \quad + \ z=0 \\ x+ \ y+2z=1 \end{cases}$. Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x \quad + \ z=0 \\ x+ \ y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,2^a - Ecuación\,1^a \\ \begin{array}{cccc} x & & +z & =0 \\ -x & -2y & -3z & =-2 \\ \hline & -2y & -2z & =-2 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,3^a - Ecuación\,1^a \\ \begin{array}{cccc} x & +y & +2z & =1 \\ -x & -2y & -3z & =-2 \\ \hline & -y & -z & =-1 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=2 \\ -2y-2z=-2 \Rightarrow \left\{ \dfrac{1}{-2} Ecuación\,2^a \right\} \Rightarrow \\ -y-z=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=2 \\ y+z=1 \\ -y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,3^a + Ecuación\,2^a \\ \begin{array}{cccc} -y & -z & = & 1 \\ y & +z & = & -1 \\ \hline & 0 & = & 0 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ y+z=1 \\ 0=0 \end{cases}}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y las soluciones las obtenemos a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ y+z=1 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=2 \\ \boxed{y=1-z} \end{cases} \Rightarrow x+2-2z+3z=2 \Rightarrow \boxed{x=-z}$$

Las soluciones son $x=-t;\ y=1-t;\ z=t;\ t\in\mathbb{R}$

2. a) **[1,5 puntos]** Encuentra razonadamente el valor de a, $b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$$

tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \to +\infty$.

b) **[1 puntos]** Resuelve la integral:

$$\int x \cdot \cos(2x)\, dx$$

a) Para que la función sea discontinua en $x = 1$ debe de anularse el denominador.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{ax+1}{2x+b} \\ \nexists\ f(1) = \dfrac{a+1}{2+b} \end{array}\right\} \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

La función queda $f(x) = \dfrac{ax+1}{2x-2}$.

Calculamos el límite de la función cuando $x \to +\infty$ y lo igualamos a 2.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax+1}{2x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{ax}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a+\frac{1}{x}}{2-\frac{2}{x}} = \dfrac{a+0}{2-0} = \dfrac{a}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

Los valores buscados son $b = -2$ y $a = 4$.

b) Utilizamos el método de integración por partes.

$$\int x \cdot \cos(2x)\, dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = \cos(2x)\,dx \to v = \int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2} sen(2x) \end{array}\right\} =$$

$$= x\frac{1}{2} sen(2x) - \int \frac{1}{2} sen(2x)\,dx = \frac{x}{2} sen(2x) - \frac{1}{2}\int sen(2x)\,dx =$$

$$= \frac{x}{2} sen(2x) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(-\cos(2x)\right) = \boxed{\frac{x}{2} sen(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + K}$$

3. a) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x)=\left(2e^{x^2-4}-8x+14\right)/\left(x^2-2x\right).$$

b) **[1 punto]** Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2,$$

donde *x, y, a, b, c* $\in\mathbb{R}$. Calcula razonadamente (e indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

a) La función es continua en todos los números reales salvo los que anulan el denominador.

$$f(x)=\frac{2e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

La función es continua en $\mathbb{R}-\{0,2\}$

Calculamos el límite de la función cuando x → 0 y cuando x → 2.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}=\frac{2e^{0^2-4}-0+14}{0^2-0}=\frac{2e^{-4}+14}{0}=\infty$$

En *x = 0* hay una discontinuidad de salto infinito.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}=\frac{2e^{2^2-4}-16+14}{2^2-4}=\frac{0}{0}=Indeterminación\,(L\acute{}Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2\cdot 2xe^{x^2-4}-8}{2x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{4xe^{x^2-4}-8}{2x-2}=\frac{8e^{2^2-4}-8}{4-2}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

En *x = 0* hay una discontinuidad evitable.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}-\{0,2\}$. En *x = 0* la discontinuidad es de salto infinito y en *x = 2* la discontinuidad es evitable.

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Separo el determinante en suma de dos determinantes.} \\ \text{Por los términos de la 2ª fila}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{El segundo determinante es nulo pues la 1ª y la 2ª fila} \\ \text{tienen los términos proporcionales}\end{matrix}\right\}=$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \left\{ \text{Saco factor común "2" en la 3ª fila} \right\} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos la fila 1ª y 3ª} \\ \text{El determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = -2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = \boxed{-4}$$

4. Sea el punto A = (1, 0, 1) y el plano $\pi \equiv x+y+z=8$.
a) **[1,5 puntos]** Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?
b) **[1 punto]** Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A, es decir, el punto simétrico de A con respecto a π.

a) La recta r perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x+y+z=8 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

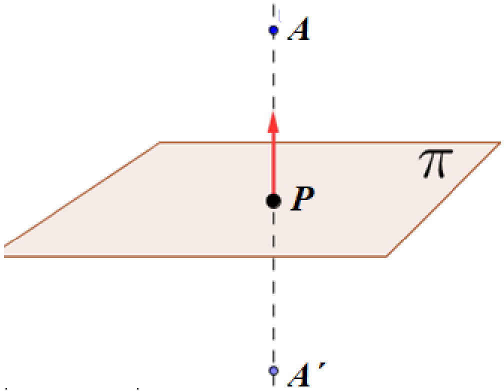
$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,1)\in r \\ \vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}}$$

Averiguamos las coordenadas del punto P de corte de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z=8 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+\lambda+1+\lambda=8 \Rightarrow 3\lambda=6 \Rightarrow \lambda=\frac{6}{3}=2 \Rightarrow \begin{cases} x=1+2=3 \\ y=2 \\ z=1+2=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(3,2,3)}$$

El punto de corte es P(3, 2, 3)

b) Nos piden hallar el punto A´ simétrico de A respecto del plano **π**



Como tenemos las coordenadas del punto P(3, 2, 3) las coordenadas del punto A´ será el resultado de sumar al punto P el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$\left.\begin{array}{l} P(3,2,3) \\ A(1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP}=(3,2,3)-(1,0,1)=(2,2,2)$$

$$A´=P+\overrightarrow{AP}=(3,2,3)+(2,2,2)=(5,4,5)$$

Las coordenadas del punto simétrico de A respecto del plano π son $A´=(5,4,5)$.

5. a) **[1 punto]** Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B.
b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = 3 - x$.

a) El plano π´ que contiene a los puntos A y B tiene como uno de sus vectores directores el vector $\overrightarrow{AB}$.
El plano π´ perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano π.

$$\pi \equiv x - 3y + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -3, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (0,0,-1) = (1,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} A(0,0,-1) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{n} = (1,-3,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6x + y + z + 1 + 3z + 3 - 2y - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -7x - y + 4z + 4 = 0}$$

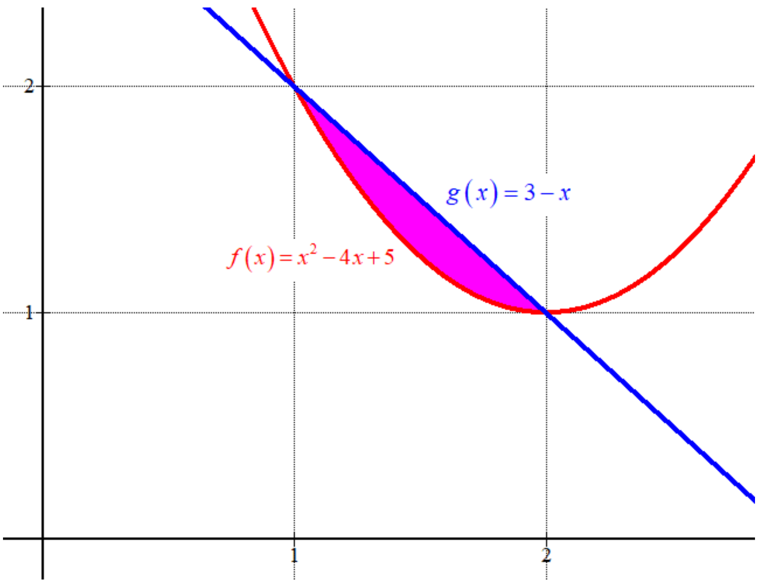
b) Hallamos los posibles puntos de corte de sus gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 3 - x \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1 = x} \\ \frac{3+1}{2} = \boxed{2 = x} \end{cases}$$

El área de la región limitada por las gráficas es el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_1^2 f(x) - g(x)\,dx =$$
$$= \int_1^2 x^2 - 4x + 5 - (3 - x)\,dx =$$
$$= \int_1^2 x^2 - 3x + 2dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 =$$
$$= \left[\frac{2^3}{3} - 3\frac{2^2}{2} + 4\right] - \left[\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} + 2\right] =$$
$$= \frac{8}{3} - 6 + 4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 = \boxed{-\frac{1}{6}}$$
$$\text{Área} = \left|-\frac{1}{6}\right| = \boxed{\frac{1}{6} \simeq 0.167\,u^2}$$



6. a) **[1,5 puntos]** Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.
b) **[1 punto]** Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función

$$f(x) = \left(2e^x - 8x - 3\right) / \left(x^2 + 2\right)$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

a) El volumen del tetraedro es el valor absoluto de la sexta parte del producto mixto $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (0,1,0) - (1,3,0) = (-1,-2,0) \\ \overrightarrow{BD} = (1,1,1) - (1,3,0) = (0,-2,1) \\ \overrightarrow{BA} = (a,0,1) - (1,3,0) = (a-1,-3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right] = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ a-1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2a + 2 - 3 = -2a + 1$$

$$\left.\begin{array}{r} Volumen\ ABCD = \left|\dfrac{\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right]}{6}\right| = \left|\dfrac{-2a+1}{6}\right| \\ Volumen\ ABCD = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{-2a+1}{6}\right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + 1 = 6 \Rightarrow -2a = 5 \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{-5}{2}} \\ -2a + 1 = -6 \Rightarrow -2a = -7 \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{7}{2}} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = \frac{-5}{2}$ y $a = \frac{7}{2}$.

b) El teorema de Bolzano dice lo siguiente:
Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ toman valores de signo contrario, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

La función $f(x) = \dfrac{2e^x - 8x - 3}{x^2 + 2}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser cociente de funciones continuas con un denominador que nunca se anula.
Para poder aplicar el teorema de Bolzano bastaría con encontrar un intervalo cerrado en el que la función tome valores de signo contrario en los extremos del intervalo.
Por ejemplo, podríamos tomar el intervalo $[0, 5]$ (aunque existen otros que nos servirían igualmente) ya que $f(0) = \dfrac{2e^0 - 0 - 3}{0^2 + 2} = \dfrac{-1}{2} < 0$ y $f(5) = \dfrac{2e^5 - 40 - 3}{5^2 + 2} \simeq 9.4 > 0$.
Por tanto, aplicando el teorema del Bolzano podemos afirmar que existe un $c \in [0, 5]$ tal que $f(c) = 0$ y que, por tanto, la función $f(x)$ corta al eje de abscisas al menos una vez.

7. a) **[1,5 puntos]** Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X, A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

a)

$$A \cdot X + B = X \Rightarrow A \cdot X - X = -B \Rightarrow X - AX = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I-A)X = B \Rightarrow \{\text{Si } I-A \text{ es invertible}\} \Rightarrow \boxed{X = (I-A)^{-1}B}$$

Si $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ comprobamos que $I-A$ tiene inversa y la calculamos.

$$I-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$|I-A|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=2\neq 0. \text{ Existe la inversa de } I-A.$$

$$(I-A)=\frac{Adj(I-A)^T}{|I-A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

Determinamos la matriz X.

$$X=(I-A)^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2-1 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-3/2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}}$$

c) Es un experimento donde Ganas o No ganas y las repeticiones se suponen independientes por lo que la variable que cuenta el número de victorias es una binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 0.6$,

X = Número de victorias en 4 carreras. X = B(4, 0.6)

Nos piden calcular $P(X \geq 2)$.

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \{Miramos\, en\, la\, tabla\} =$$

$$= 0.3456 + 0.3456 + 0.1296 = \boxed{0.8208}$$

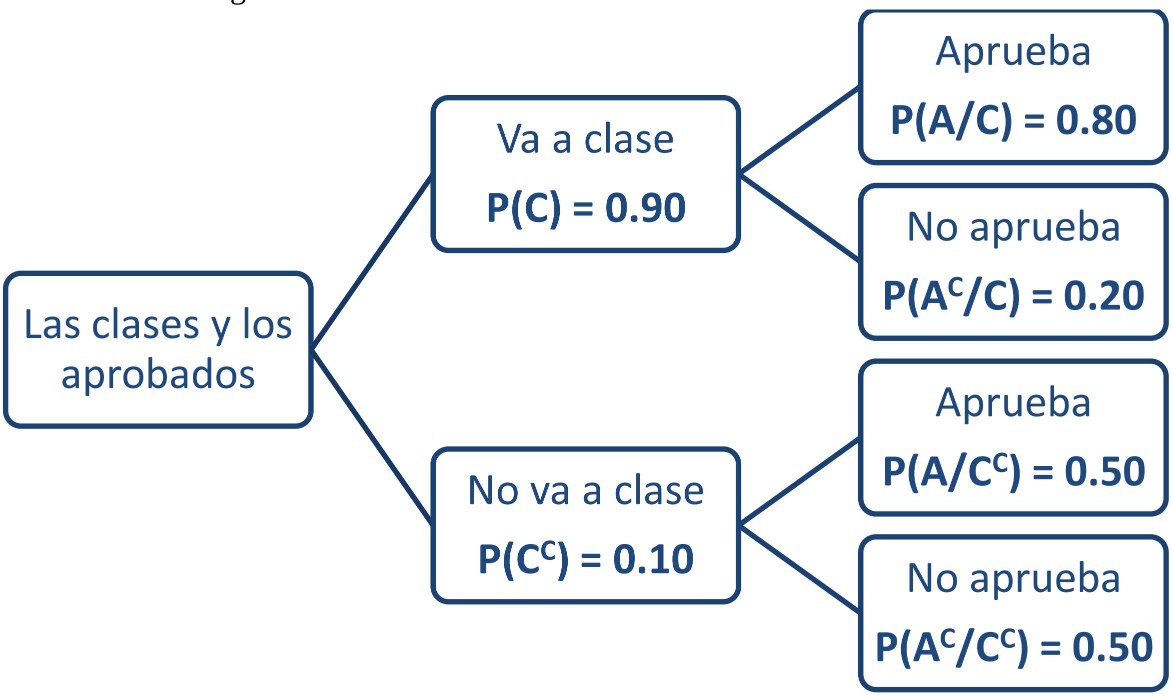
n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.
	2	~~0.0486~~	~~0.1536~~	~~0.2646~~	~~0.3456~~	~~0.3750~~	0.3456	0.
	3	~~0.0036~~	~~0.0256~~	~~0.0756~~	~~0.1536~~	~~0.2500~~	0.3456	0.
	4	~~0.0001~~	~~0.0016~~	~~0.0081~~	~~0.0256~~	~~0.0625~~	0.1296	0.

8. *a*) En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.
a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe?
a.2) **[0,75 puntos]** Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido a clase?

b) Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.
b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?
b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

a) Llamamos C = ”El alumno va a clase”, A = “El alumno aprueba”.
Realizamos un diagrama de árbol.



a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A)=P(C)P(A/C)+P\left(C^C\right)P\left(A/C^C\right)=0.9\cdot 0.8+0.1\cdot 0.5=\boxed{0.77}$$

a.2) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

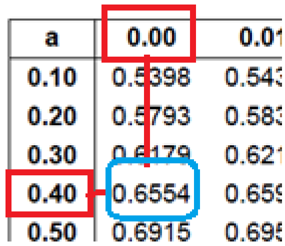
$$P\left(C^C/A^C\right)=\frac{P\left(C^C\cap A^C\right)}{P\left(A^C\right)}=\frac{P\left(C^C\right)P\left(A^C/C^C\right)}{1-P(A)}=\frac{0.1\cdot 0.5}{1-0.77}=\boxed{\frac{5}{23}\simeq 0.2174}$$

b) Sea X = Cantidad de agua en una botella (en ml).
X = N(150, 5)

b.1) Nos piden $P(X>152)$.

$$P(X>152)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-150}{5}>\frac{152-150}{5}\right)=P(Z>0.4)=1-P(Z\leq 0.4)=$$

$$=\{\text{Miramos en la tabla}\}=1-6554=\boxed{0.3446}$$



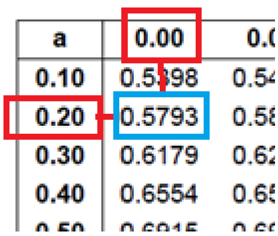
a	0.00	0.01
0.10	0.5398	0.543
0.20	0.5793	0.583
0.30	0.6179	0.621
0.40	0.6554	0.659
0.50	0.6915	0.695

b.2) Nos piden calcular $P(149<X<152)$.

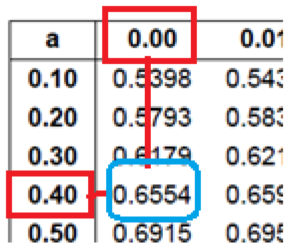
$$P(149<X<152)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{149-150}{5}<\frac{X-150}{5}<\frac{152-150}{5}\right)=$$

$$=P(-0.2<Z<0.4)=P(Z<0.4)-P(Z<-0.2)=P(Z<0.4)-P(Z>0.2)=$$

$$=P(Z<0.4)-[1-P(Z\leq 0.2)]=\{\text{Miramos en la tabla}\}=0.6554-[1-0.5793]=\boxed{0.2347}$$



a	0.00	0.0
0.10	0.5398	0.54
0.20	0.5793	0.58
0.30	0.6179	0.62
0.40	0.6554	0.65



a	0.00	0.01
0.10	0.5398	0.543
0.20	0.5793	0.583
0.30	0.6179	0.621
0.40	0.6554	0.659
0.50	0.6915	0.695