Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real *k*:

$$\begin{cases} x+ky+z=3+k \\ kx+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *k*. [1,25 puntos]
b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $k = 1$, y haga una interpretación geométrica. [1,25 puntos]

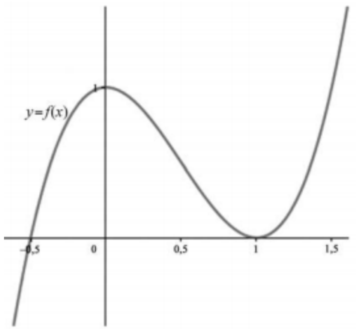
2. a) Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$. Encuentre también la ecuación de la recta normal a $y = f(x)$ en ese mismo punto. [1,25 puntos]
b) Haga un esbozo de las gráficas de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calcule el área delimitada per estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta vertical $x = 3$. [1,25 puntos]

3. En $\mathbb{R}^3$ se dan los puntos A = (3, 1, 1), B = (0, 0, 1), C = (4, 1, 2) y D = (1, 1, t), donde *t* es un valor real.
a) ¿Para qué valor de *t* los cuatro puntos son coplanarios? [1 punto]
b) Encuentre el valor de *t* para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de $5u^3$. [1,5 puntos]
Nota: El volumen de un tetraedro definido por los vectores v_1 , v_2 y v_3 es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores,

$$V=\frac{1}{6}\left|\det\left(v_1,v_2,v_3\right)\right|$$

4. a) En la figura se muestra la gráfica de la función *f(x)*. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de *f(x)*. Explique el razonamiento que ha seguido. [1,25 puntos]

b) Calcule los valores de *a* y *b* para que la función $g\left(x\right)=ax^3+bx^2+1$ tenga un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$. [1,25 puntos]



5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en la que *a* es un parámetro real.

a) Encuentre para que valores de *a* la matriz A es invertible. [1 punto]

b) Compruebe que, para el caso *a = 3*, la matriz A es invertible y resuelva la ecuación matricial $AX=B-3I$, donde B es la matriz $B=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ [1,5 puntos]

6. Considere la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$.

a) Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de tenerlos, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. [1,5 puntos]

***b*)** Compruebe que la ecuación *f(x) = 0* tiene una única solución en el intervalo (–2, 1). [1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real *k*:

$$\begin{cases} x+ky+z=3+k \\ kx+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *k*. [1,25 puntos]
b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso *k = 1*, y haga una interpretación geométrica. [1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 3+k \\ k & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero, para estudiar su rango en función del parámetro *k*.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1+k+3k-1-k^2-3=-k^2+4k-3$$

$$|A|=0\Rightarrow -k^2+4k-3=0\Rightarrow k=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-1)(-3)}}{-2}=\frac{-4\pm 2}{-2}=\begin{cases} \dfrac{-4+2}{-2}=1 \\ \dfrac{-4-2}{-2}=3 \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k\neq 1\ y\ k\neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $k=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.

Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Ecuación } 1^a = \text{Ecuación } 2^a \\ \text{Quito ecuación } 1^a \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4-z \\ x+3y=5-z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4-z-y \\ x+3y=5-z \end{cases} \Rightarrow 4-z-y+3y=5-z \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}} \Rightarrow x=4-z-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-z+\frac{7}{2}}$$

Las soluciones del sistema son $x=-t+\frac{7}{2};\ y=\frac{1}{2};\ z=t,$ siendo $t\in\mathbb{R}$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $k=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.

Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} x+3y+z=6 \\ 3x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo con el método de Gauss.

$$\begin{cases} \boxed{x+3y+z=6} \\ 3x+y+z=4 \quad \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ \boxed{x+3y+z=5} \end{cases}$$

Es imposible resolver el sistema pues tiene dos ecuaciones con el primer miembro igual y el segundo miembro distinto.

El sistema es incompatible (Sin solución)

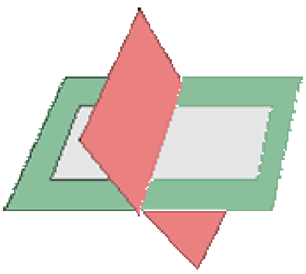
Resumiendo: El sistema es compatible determinado para $k \neq 1$ y $k \neq 3$. Es compatible indeterminado para $k = 1$. Es incompatible para $k = 3$.

b) Las soluciones del sistema para $k = 1$ se han obtenido en el apartado anterior y son $x=-t+\frac{7}{2};\ y=\frac{1}{2};\ z=t,$ siendo $t\in\mathbb{R}$.

El sistema es:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

La solución del sistema son los puntos de una recta que resulta de cortarse los planos de las ecuaciones 1ª y 2ª que son coincidentes con el plano de la ecuación 3ª.



2. a) Dada la función $f(x)=\frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a *y = f(x)* en el punto de abscisa $x=1$. Encuentre también la ecuación de la recta normal a *y = f(x)* en ese mismo punto. [1,25 puntos]
b) Haga un esbozo de las gráficas de la curva *y = f(x)* y de la recta *4x + y = 8*, y calcule el área delimitada per estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta vertical *x = 3*. [1,25 puntos]

a) La ecuación de la recta tangente a *f(x)* en *x = 1* tiene ecuación $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{4}{x}\to f'(x)=-\frac{4}{x^2}\to f'(1)=-\frac{4}{1^2}=-4 \\ f(1)=\frac{4}{1}=4 \\ y-f(1)=f'(1)(x-1) \end{array}\right\}\Rightarrow y-4=-4(x-1)\Rightarrow \boxed{y=-4x+8}$$

La ecuación de la recta normal a *f(x)* en *x = 1* tiene ecuación $y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(1)=-4 \\ f(1)=4 \\ y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1) \end{array}\right\}\Rightarrow y-4=\frac{-1}{-4}(x-1)\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{4}}$$

b) El dominio de la función $f(x)=\frac{4}{x}$ es $\mathbb{R}-\{0\}$. Su derivada es $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$, que es siempre negativa y por tanto la función siempre es decreciente.
Obtenemos los puntos de corte de curva y recta.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{4}{x} \\ 4x+y=8 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{4}{x} \\ y=8-4x \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{4}{x}=8-4x\Rightarrow 4=8x-4x^2\Rightarrow 4x^2-8x+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

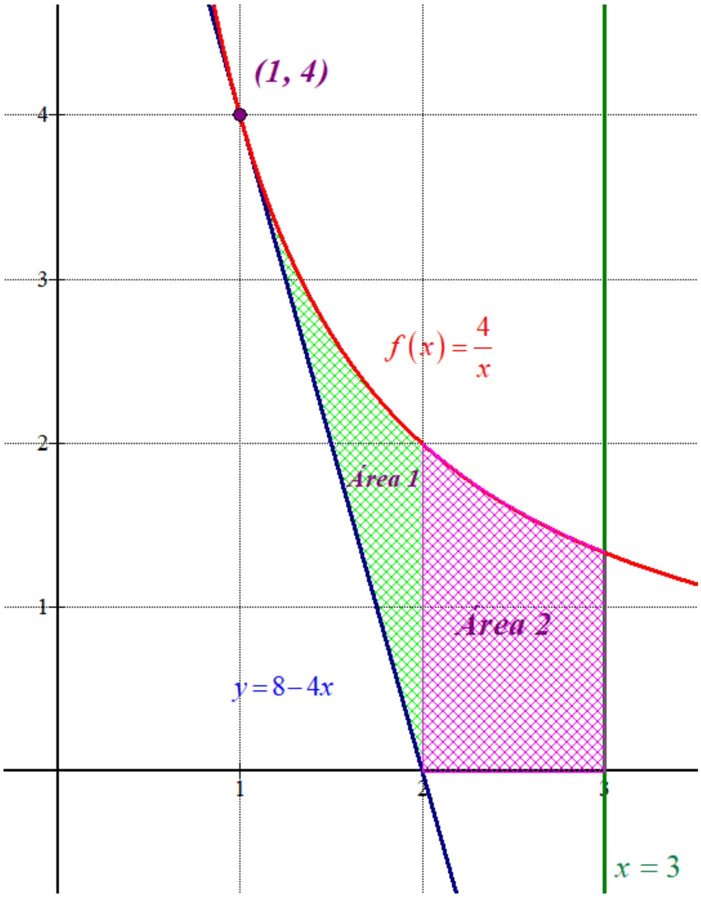
Curva y recta coinciden solo en el punto (1, 4)

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de curva $f(x)=\frac{4}{x}$, la recta *4x + y = 8*, así como la recta vertical *x = 3*.

x	$f(x)=\frac{4}{x}$
1	4
2	2
3	$4/3$

x	$y=8-4x$
1	4
2	0
3	-4

$x=3$	y
3	0
3	1
3	2



El área de la zona pedida la hemos dividido en dos recintos, la parte coloreada de rosa es de algo más de 1.5 cuadraditos y el área de la zona verde es algo menos de 1 cuadradito. En total los dos recintos suman algo menos de 3 cuadraditos.

Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\text{Área }1=\int_1^2 \frac{4}{x}-(8-4x)\,dx=\int_1^2 \frac{4}{x}-8+4x\,dx=\left[4\ln x-8x+2x^2\right]_1^2=$$
$$=[4\ln 2-16+8]-[4\ln 1-8+2]=4\ln 2-2$$

$$\text{Área }2=\int_2^3 \frac{4}{x}\,dx=[4\ln x]_2^3=4\ln 3-4\ln 2$$

$$\text{Área total}=\text{Área }1+\text{Área }2=4\ln 2-2+4\ln 3-4\ln 2=\boxed{4\ln 3-2\approx 2.394\,u^2}$$

3. En $\mathbb{R}^3$ se dan los puntos A = (3, 1, 1), B = (0, 0, 1), C = (4, 1, 2) y D = (1, 1, t), donde *t* es un valor real.
a) ¿Para qué valor de *t* los cuatro puntos son coplanarios? [1 punto]
b) Encuentre el valor de *t* para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de 5u^3. [1,5 puntos]
Nota: El volumen de un tetraedro definido por los vectores v_1 , v_2 y v_3 es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores,
$V=\frac{1}{6}\left|\det\left(v_1,v_2,v_3\right)\right|$

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C. Luego hacemos que el punto D pertenezca al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} A(3,\ 1,\ 1) \\ B(0,\ 0,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(0,\ 0,\ 1)-(3,\ 1,\ 1)=(-3,-1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} A(3,\ 1,\ 1) \\ C(4,\ 1,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=(4,\ 1,\ 2)-(3,\ 1,\ 1)=(1,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} B(0,0,1)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-3,-1,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -x+z-1+3y=0\Rightarrow \boxed{\pi: x-3y-z+1=0}$$

Para que los cuatro puntos sean coplanarios el punto *D(1,1, t)* debe pertenecer al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-3y-z+1=0 \\ D(1,1,\ t)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 1-3-t+1=0\Rightarrow \boxed{t=-1}$$

b) Consideramos los vectores $\overrightarrow{AB}=(-3,-1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(1,0,1)$ y $\overrightarrow{AD}$.
Hacemos que el volumen que obtenemos con la fórmula proporcionada por el ejercicio sea 5.

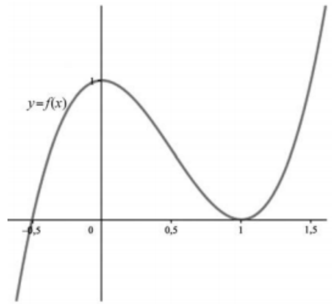
$$\left.\begin{array}{l} A(3,\ 1,\ 1) \\ D(1,\ 1,\ t) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=(1,\ 1,\ t)-(3,\ 1,\ 1)=(-2,0,t-1)$$

$$\left.\begin{array}{r} V=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|2+t-1\right|=\frac{|t+1|}{6} \\ Volumen=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|t+1|}{6}=5\Rightarrow$$

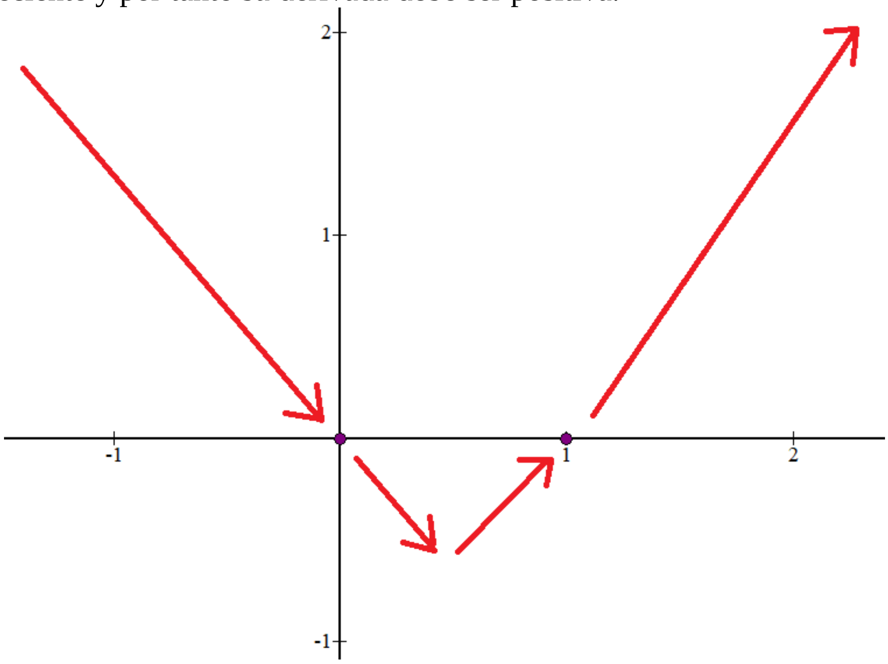
$$\Rightarrow |t+1|=30\Rightarrow \begin{cases} t+1=30\rightarrow \boxed{t=29} \\ t+1=-30\rightarrow \boxed{t=-31} \end{cases}$$

Hay dos soluciones posibles: $t = 29$ o $t = -31$.

4. a) En la figura se muestra la gráfica de la función *f(x)*. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de *f(x)*. Explique el razonamiento que ha seguido. [1,25 puntos]
b) Calcule los valores de *a* y *b* para que la función $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tenga un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$. [1,25 puntos]



a) La función derivada se anula en el máximo y el mínimo de la función, es decir, *f´(0) = 0* y *f´(1) = 0* .
Antes de *x = 0* la función crece, por lo que su derivada es positiva, pero acercándose al valor 0. Entre *x = 0* y *x = 1* la función decrece, por lo que su derivada es negativa. Después de *x = 1* la función es creciente y por tanto su derivada debe ser positiva.



b) Si la función $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tiene un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$ entonces su derivada segunda se anula para dicho valor, *g´´ (1/2) = 0.*

$$\left.\begin{array}{r} g(x)=ax^3+bx^2+1 \Rightarrow g'(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow g''(x)=6ax+2b \\ g''(1/2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6a\frac{1}{2}+2b=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a+2b=0 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{2}{3}b}$$

Como además la derivada en $x=\frac{1}{2}$ vale $-\frac{3}{2}$ tenemos que *g´(1/2) = –3/2.*

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=3ax^2+2bx \\ g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 3a\left(\frac{1}{2}\right)^2+2b\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3a}{4}+b=-\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{3a+4b=-6}$$

Unimos las dos condiciones en un sistema y determinamos el valor de *a* y *b*.

$$\left.\begin{array}{l} a=-\dfrac{2}{3}b \\ 3a+4b=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\left(-\dfrac{2}{3}b\right)+4b=-6 \Rightarrow -2b+4b=-6 \Rightarrow 2b=-6 \Rightarrow \boxed{b=-3} \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = -3$.

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en la que a es un parámetro real.

a) Encuentre para que valores de a la matriz A es invertible. [1 punto]

b) Compruebe que, para el caso $a = 3$, la matriz A es invertible y resuelva la ecuación matricial $AX = B-3I$, donde B es la matriz $B=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ [1,5 puntos]

a) La matriz es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}=a(a+1)(-a-3)+a(a-1)(2a+1)-2a(-a-3)=$$

$$=a\left[(a+1)(-a-3)+(a-1)(2a+1)-2(-a-3)\right]=$$

$$=a\left[-a^2-3a-\cancel{a}-3+2a^2+\cancel{a}-\cancel{2a}-1+\cancel{2a}+6\right]=$$

$$=a\left[a^2-3a+2\right]$$

$$|A|=0\Rightarrow a\left[a^2-3a+2\right]=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{a=0}\\ a^2-3a+2=0\rightarrow a=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+1}{2}=\boxed{2=a}\\ \dfrac{3-1}{2}=\boxed{1=a}\end{cases}\end{cases}$$

El determinante de A se anula para $a = 0$, $a = 1$ y $a = 2$.
La matriz A tiene inversa cuando el valor de a es distinto de 0, 1 y 2.

b) Por lo visto en el apartado a) para $a = 3$ la matriz A es invertible al ser un valor distinto de 0, 1 y 2.

Para $a = 3$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Su determinante vale $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix}=-72+42+36=6\neq0$

Determinamos su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3&2&7\\3&4&0\\0&2&-6\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4&0\\2&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&0\\0&-6\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&4\\0&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&7\\2&-6\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&7\\0&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&2\\0&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&7\\4&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&7\\3&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&2\\3&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-24&18&6\\26&-18&-6\\-28&21&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX=B-3I\Rightarrow X=A^{-1}\left(B-3I\right)$$

Sustituimos el valor de la inversa de A, la matriz B y la matriz identidad.

$$X=A^{-1}\left(B-3I\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}6&3&3\\2&5&2\\1&1&4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3&3\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-12+6+1&-12+6+1&-12+6+1\\13-6-1&13-6-1&13-6-1\\-14+7+1&-14+7+1&-14+7+1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-5&-5&-5\\6&6&6\\-6&-6&-6\end{pmatrix}}$$

6. Considere la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$.
a) Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de tenerlos, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. [1,5 puntos]
b) Compruebe que la ecuación *f(x) = 0* tiene una única solución en el intervalo (–2, 1). [1 punto]

a) Igualamos a cero su derivada.

$$f(x)=\frac{x^3}{x-2}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}=\frac{3x^3-6x^2-x^3}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$$

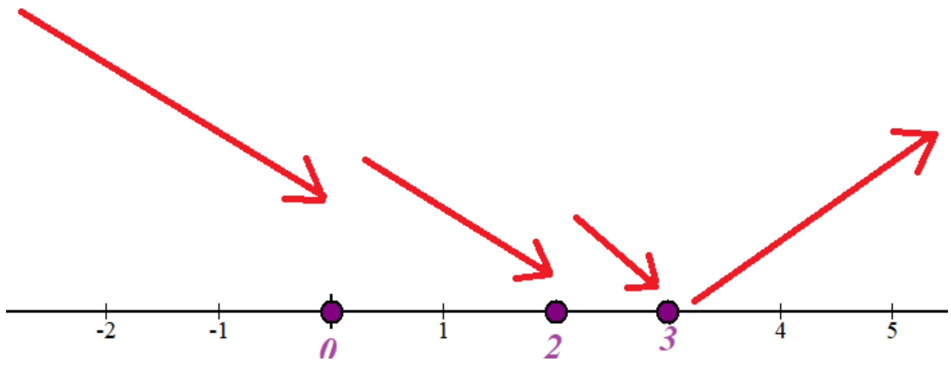
$$f\,'(x)=0\Rightarrow \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-3=0\Rightarrow \boxed{x=3}\end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos: *x = 0, x = 3*.

Estudiamos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Añadimos el valor *x = 2* en el que la función no existe y por tanto es discontinua.

- En $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{2(-1)^2(-1-3)}{(-1-2)^2}=\dfrac{-8}{9}<0$. La función es decreciente en $(-\infty,0)$.
- En $(0,2)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{2(1)^2(1-3)}{(1-2)^2}=\dfrac{-4}{1}<0$. La función es decreciente en $(0,2)$.
- En $(2,3)$ tomamos *x = 2.5* y la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{2(2.5)^2(2.5-3)}{(2.5-2)^2}=\dfrac{-12.5}{0.25}<0$. La función es decreciente en $(2,3)$.
- En $(3,+\infty)$ tomamos *x = 5* y la derivada vale $f\,'(x)=\dfrac{2(5)^2(5-3)}{(5-2)^2}=\dfrac{100}{9}>0$. La función es creciente en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$ y creciente en $(3, +\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 3$.

Como $x = 0$ es punto crítico (derivada vale 0) y la función decrece en un entorno del punto, la función no puede presentar ni un máximo ni un mínimo luego la función presenta un punto de inflexión en $x = 0$.

b) La función $f(x) = \dfrac{x^3}{x-2}$ es continua en el intervalo (–2, 1) ya que es cociente de polinomios y no se anula el denominador en dicho intervalo. Como $f(-2) = \dfrac{(-2)^3}{-2-2} = 2 > 0$ y $f(1) = \dfrac{1^3}{1-2} = -1 < 0$ la función toma valores de distinto signo a ambos extremos del intervalo, podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe un valor “c” del intervalo (–2, 1) donde se anula la función, es decir, $f(c) = 0$.

Como hemos visto en el apartado a) la función es decreciente en el intervalo (–2, 1), por lo que no puede haber otro valor en el intervalo donde se anule la función.