Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 2

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere la parábola $y = 4 - x^2$ y un valor $a > 0$.

a) Compruebe que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = a$ es y calcule los puntos de corte de esta recta tangente con los ejes de coordenadas. [1,25 puntos]

b) Calcule el valor de $a > 0$ para que el área del triángulo determinado por esta recta tangente y los ejes de coordenadas sea mínima. [1,25 puntos]

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real p:

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2 z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro p. [1,25 puntos]

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $p = 2$. [1,25 puntos]

3. Considere el punto $P = (-1, 3, 1)$, el plano π: $x = y$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

a) Encuentre las coordenadas del punto P' simétrico a P respecto del plano π. [1,25 puntos]

b) De todos los planos que contienen la recta r, encuentre la ecuación cartesiana del que es perpendicular al plano π. [1,25 puntos]

4. Sea la función $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el dominio $x > 0$, donde ln es el logaritmo neperiano.

a) Encuentre las coordenadas de un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a la curva sea horizontal y analice si la función tiene un extremo relativo en este punto. [1 punto]

b) Determine si la función $f(x)$ tiene alguna asíntota horizontal. [0,5 puntos]

c) Calcule el área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 1$ y $x = e$. Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función en el dominio $0 < x < 5$, donde quede representada el área que ha calculado. [1 punto]

5. ***a)*** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial $A^2X = A-3I$, donde ***I*** es la matriz identidad. [1,25 puntos]

b) Una matriz cuadrada ***M*** satisface que $M^3-3M^2+3M-I=0$, donde ***I*** es la matriz identidad. Justifique que ***M*** es invertible y exprese la inversa de ***M*** en función de las matrices ***M*** *e* ***I***.
[1,25 puntos]

6. Considere la función $f(x)=e^{x-1}-x-1$.

a) Estudie la continuidad, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
[1,25 puntos]

b) Demuestre que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones entre $x = -1$ y $x = 3$.
[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la parábola $y=4-x^2$ y un valor $a>0$.
a) Compruebe que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x=a$ es y calcule los puntos de corte de esta recta tangente con los ejes de coordenadas. [1,25 puntos]
b) Calcule el valor de $a>0$ para que el área del triángulo determinado por esta recta tangente y los ejes de coordenadas sea mínima. [1,25 puntos]

a) La recta tangente a la gráfica de la parábola en $x=a$ tiene ecuación $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

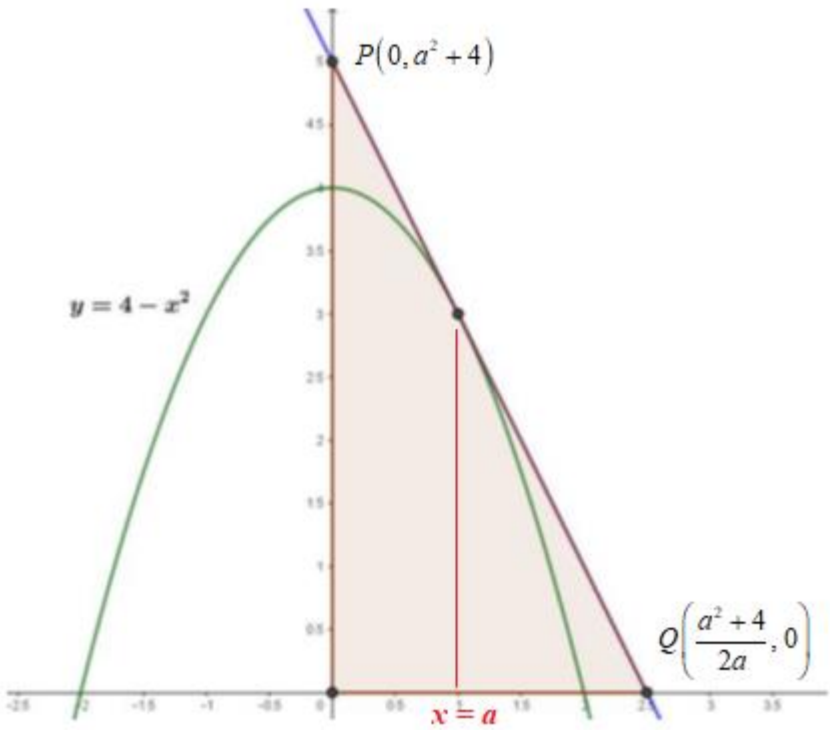
$$\left.\begin{array}{l} f(a)=4-a^2 \\ f(x)=4-x^2 \to f'(x)=-2x \to f'(a)=-2a \\ y-f(a)=f'(a)(x-a) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\left(4-a^2\right)=-2a(x-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-4+a^2=-2ax+2a^2 \Rightarrow y=-2ax+2a^2+4-a^2 \Rightarrow \boxed{y=-2ax+a^2+4}$$

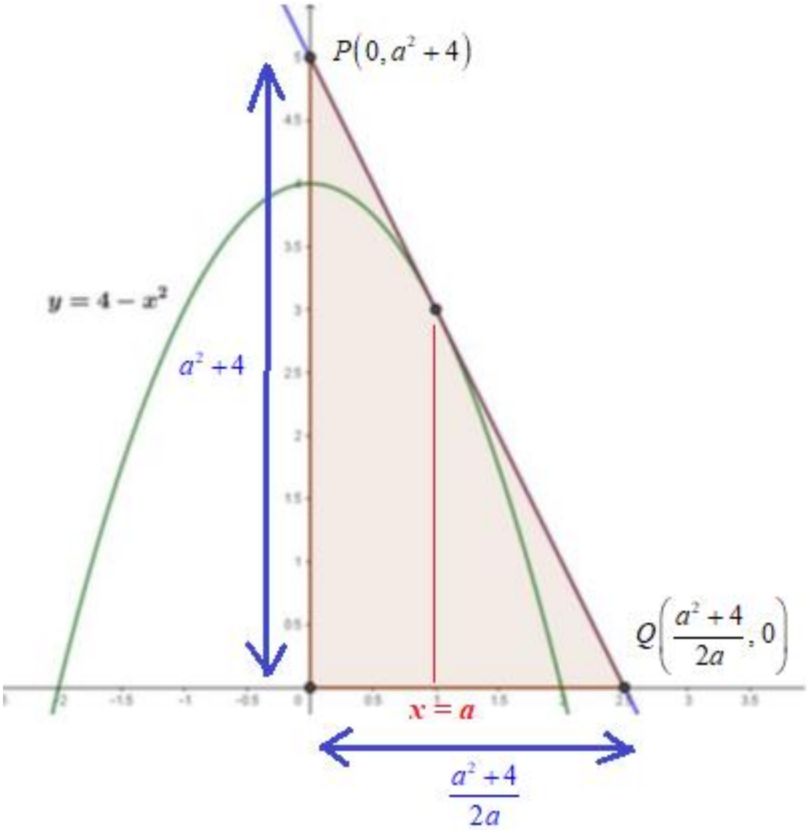
Hallamos los puntos de corte de la tangente con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l} y=-2ax+a^2+4 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-0+a^2+4=a^2+4 \Rightarrow \boxed{P\left(0,a^2+4\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=-2ax+a^2+4 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=-2ax+a^2+4 \Rightarrow 2ax=a^2+4 \Rightarrow x=\frac{a^2+4}{2a} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{a^2+4}{2a},0\right)}$$



b) Consideramos el triángulo determinado por los puntos de corte de la tangente con los ejes de coordenadas.



El área del triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

$$A(a)=\frac{\left(\frac{a^2+4}{2a}\right)(a^2+4)}{2}=\frac{(a^2+4)^2}{4a}$$

Derivamos esta función.

$$A(a)=\frac{(a^2+4)^2}{4a}\Rightarrow A'(a)=\frac{2(a^2+4)2a\cdot 4a-4(a^2+4)^2}{(4a)^2}=\frac{16a^2(a^2+4)-4(a^2+4)^2}{16a^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(a)=\frac{4a^2(a^2+4)-(a^2+4)^2}{4a^2}=\frac{(a^2+4)\left[4a^2-(a^2+4)\right]}{4a^2}=\frac{(a^2+4)\left[4a^2-a^2-4\right]}{4a^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(a)=\frac{(a^2+4)\left[3a^2-4\right]}{4a^2}$$

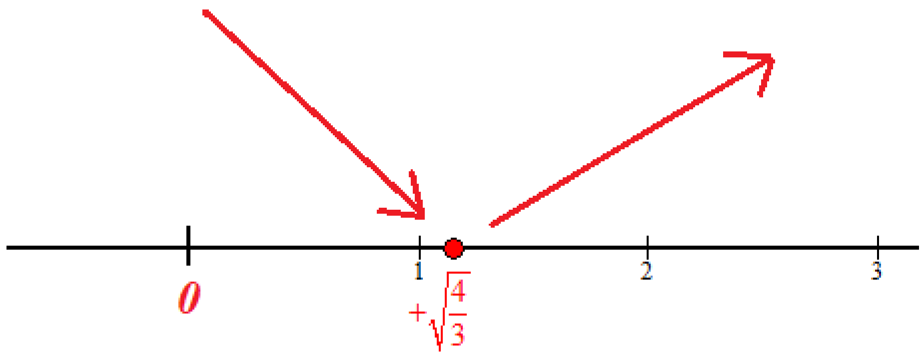
La igualamos a cero en busca de los extremos relativos

$$A'(a)=0 \Rightarrow \frac{(a^2+4)\left[3a^2-4\right]}{4a^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+4=0 \to a^2=-4 \to \text{¡No es posible!} \\ o \\ 3a^2-4=0 \to 3a^2=4 \to a^2=\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{a=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}} \end{cases}$$

Como la función se define para *a* > *0* estudiamos la variación del signo de la derivada entre $a=0$ y $a=+\sqrt{\frac{4}{3}}$ y después de este valor.

- En $\left(0,+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ tomamos *a* = *1* y la derivada vale $A'(1)=\frac{(1+4)[3-4]}{4}=-\frac{5}{4}<0$. La función decrece en $\left(0,+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.
- En $\left(\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$ tomamos *a* = *2* y la derivada vale $A'(2)=\frac{(4+4)[12-4]}{16}>0$. La función crece en $\left(\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



La función área tiene un mínimo para $a=+\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real p:

$$\begin{cases} px+y+z=2 \\ 2x+py+p^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro p. [1,25 puntos]
b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $p = 2$. [1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero, para estudiar su rango en función del parámetro p.

$$|A|=\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=p^2+2p^2+2-2p-2-p^3=-p^3+3p^2-2p$$

$$|A|=0 \Rightarrow -p^3+3p^2-2p=0 \Rightarrow -p\left(p^2-3p+2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ p^2-3p+2=0 \to p=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases} \dfrac{3+1}{2}=2=p \\ \dfrac{3-1}{2}=1=p \end{cases} \end{cases}$$

Nos planteamos cuatro situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $p\neq 0,\ p\neq 1\ y\ p\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $p=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.
Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} y+z=2 \\ 2x=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} y+z=2 \\ 2x=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=2 \\ \boxed{x=\dfrac{1}{2}=0.5} \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=2 \\ 1+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=2 \\ y+z=1 \end{cases} \rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (Sin solución)

CASO 3. $p=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.

Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ \boxed{\begin{matrix} 2x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{matrix}} \end{cases} \rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (Sin solución)

CASO 4. $p=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.

Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Ecuación } 1^a = \text{Ecuación } 3^a \\ \text{Eliminamos la ecuación } 3^a \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2-2x-z \\ 2x+2y+4z=1 \end{cases} \Rightarrow 2x+2(2-2x-z)+4z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+4-4x-2z+4z=1 \Rightarrow -2x+2z+4=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-z-2=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}+2+z \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}+z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 - 2\left(\frac{3}{2} + z\right) - z \Rightarrow y = 2 - 3 - 2z - z \Rightarrow \boxed{y = -1 - 3z}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

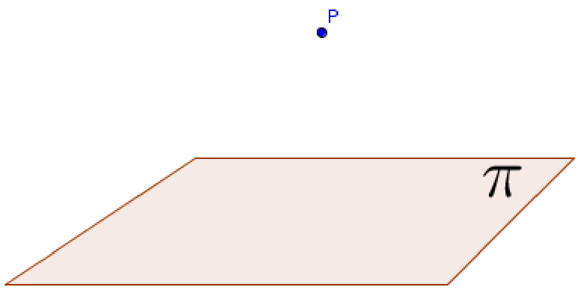
Las soluciones del sistema son $x = \frac{3}{2} + t;\ y = -1 - 3t;\ z = t;\quad t \in \mathbb{R}$

b) Las soluciones del sistema para $p = 2$ se han obtenido en el apartado anterior y son $x = \frac{3}{2} + t;\ y = -1 - 3t;\ z = t;\quad t \in \mathbb{R}$

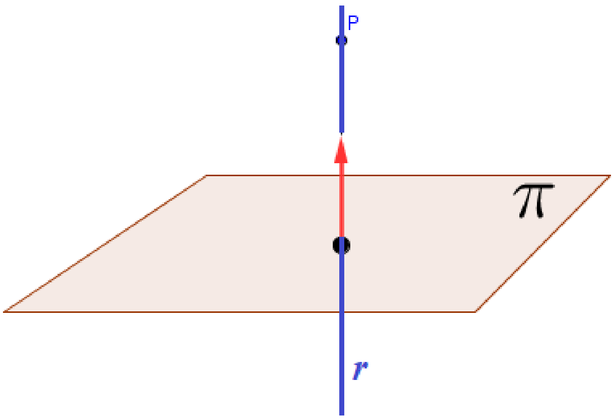
3. Considere el punto $P = (-1, 3, 1)$, el plano $\pi : x = y$ y la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

a) Encuentre las coordenadas del punto P' simétrico a P respecto del plano π. [1,25 puntos]

b) De todos los planos que contienen la recta r, encuentre la ecuación cartesiana del que es perpendicular al plano π. [1,25 puntos]



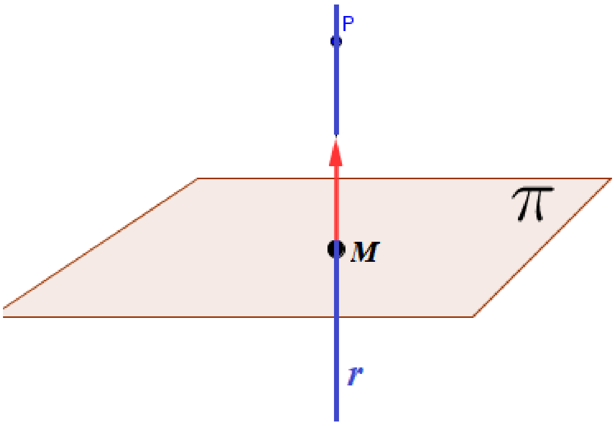
Para hallar el punto simétrico de *P* respecto del plano nos planteamos hallar primero la ecuación de la recta "*r*" perpendicular al plano π que pasa por *P*. Como la recta es perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.



$$\pi : x = y \Rightarrow \pi : x - y = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, 0)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u} = \vec{n} = (1, -1, 0) \\ P(-1, 3, 1) \in r \end{cases} \Rightarrow \boxed{r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}}$$

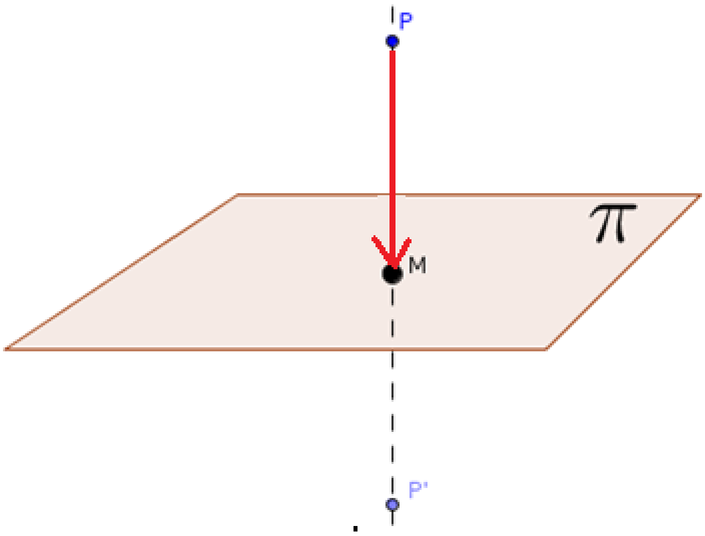
Hallamos el punto de corte *M* del plano y la recta.



$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1 \end{cases} \\ \pi: x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1+\lambda-(3-\lambda)=0 \Rightarrow -4+2\lambda=0 \Rightarrow 4=2\lambda \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1+2=1 \\ y=3-2=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(1,1,1)}$$

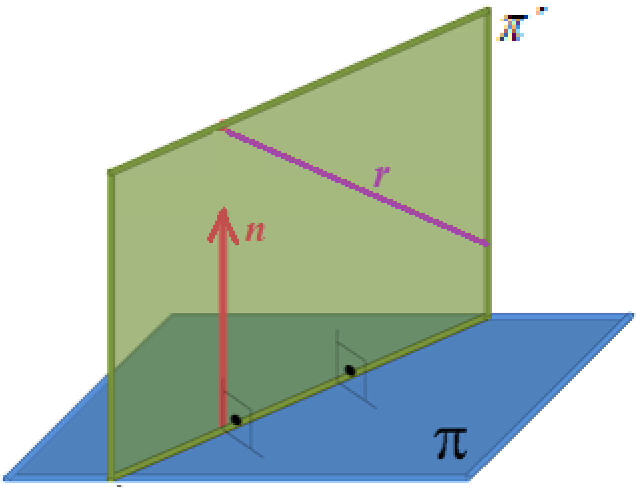
El punto P´ es el punto que surge de sumarle al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.



$$\overrightarrow{PM}=(1,1,1)-(-1,3,1)=(2,-2,0) \Rightarrow \boxed{P'=(1,1,1)+(2,-2,0)=(3,-1,1)}$$

El punto simétrico de P(–1,3,1) respecto del plano $\pi : x = y$ tiene coordenadas P´(3, –1,1)

b) Buscamos la ecuación de un plano π' que contiene a la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2$ y es perpendicular al plano π: $x = y$. Dicho plano π' tiene como vectores directores el director de la recta r y el normal del plano π. Y contiene el punto P_r de la recta.



$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)\\P_r(1,0,2)\end{cases}$$

$$\pi':\begin{cases}\vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)\\\vec{v}=\vec{n}=(1,-1,0)\\P_r(1,0,2)\in\pi'\end{cases}\Rightarrow\pi':\begin{vmatrix}x-1 & y & z-2\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow y-2z+4-3z+6+x-1=0\Rightarrow$$

$$\boxed{\pi':x+y-5z+9=0}$$

El plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π tiene ecuación $\pi':x+y-5z+9=0$

4. Sea la función $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el dominio $x > 0$, donde ln es el logaritmo neperiano.
a) Encuentre las coordenadas de un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a la curva sea horizontal y analice si la función tiene un extremo relativo en este punto. [1 punto]
b) Determine si la función $f(x)$ tiene alguna asíntota horizontal. [0,5 puntos]
c) Calcule el área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 1$ y $x = e$. Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función en el dominio $0 < x < 5$, donde quede representada el área que ha calculado. [1 punto]

a) La recta tangente a la gráfica de la parábola en $x=a$ tiene ecuación $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Para que la recta tangente sea horizontal debe tener pendiente 0, por lo que debe ser $f'(a)=0$.

Buscamos los puntos del dominio donde se anula la derivada.

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}\rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln(x)}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln(x)=0\Rightarrow\ln(x)=1\Rightarrow\boxed{x=e}$$

Como $f(e)=\dfrac{\ln(e)}{e}=\dfrac{1}{e}$ el punto pedido tiene coordenadas $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$.

Para estudiar qué tipo de extremo relativo es analizamos el signo de la derivada antes y después de $x=e$.

- En $(0,e)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{1-\ln(1)}{1^2}=1>0$. La función crece en $(0,e)$
- En $(e,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{1-\ln(3)}{3^2}<0$. La función decrece en $(e,+\infty)$.

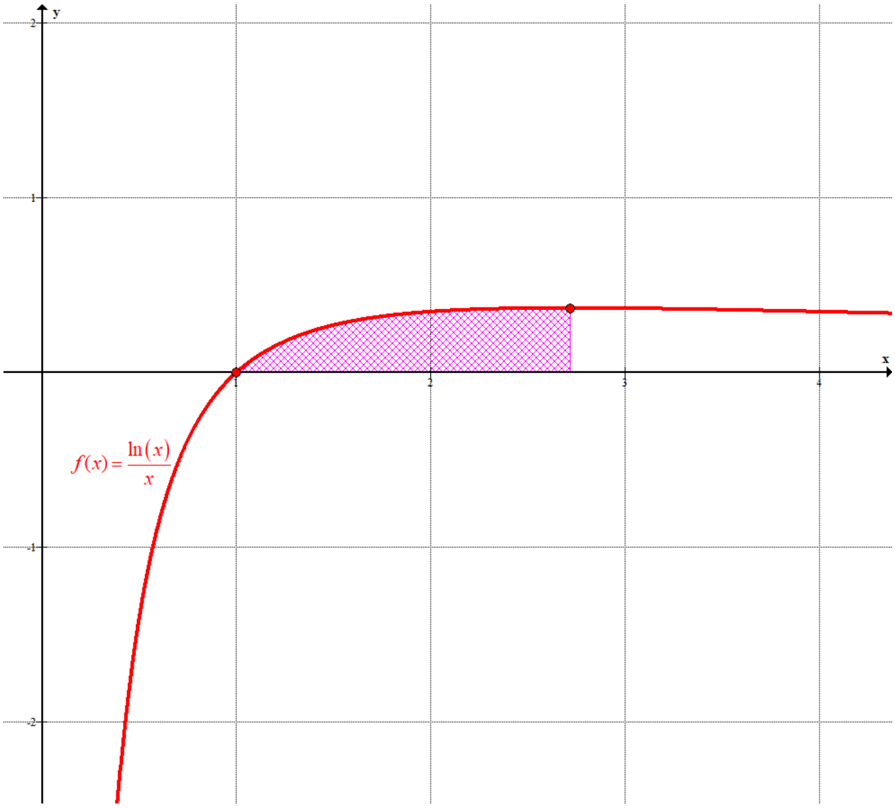
La función presenta un máximo relativo en $x = e$, pues en dicho valor cambia de crecer a decrecer.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}=Indeterminación\,(L'Hòpital)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

La asíntota horizontal tiene ecuación $y=0$.

c) Hacemos una tabla de valores en el intervalo *(1, e).*

x	$f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$
1	0
2	$\dfrac{\ln 2}{2}=0.35$
e	$\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}=0.37$



Como la función es positiva en el intervalo *(1, e)* el valor del área del recinto del dibujo se obtiene con la integral definida de la función $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ entre $x = 1$ y $x = e$.

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx=\dots$$

$$\boxed{\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \ln(x)=t\to\dfrac{1}{x}dx=dt\\ dx=xdt\end{array}\right\}=\int\frac{t}{x}xdt=\int tdt=\frac{t^2}{2}=\frac{(\ln(x))^2}{2}}$$

$$\dots=\left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^e=\left[\frac{(\ln(e))^2}{2}\right]-\left[\frac{(\ln(1))^2}{2}\right]=\boxed{\frac{1}{2}u^2}$$

El área del recinto es 0.5 u^2.

5. ***a)*** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial $A^2X=A-3I$, donde ***I*** es la matriz identidad. [1,25 puntos]

b) Una matriz cuadrada ***M*** satisface que $M^3-3M^2+3M-I=0$, donde ***I*** es la matriz identidad. Justifique que ***M*** es invertible y exprese la inversa de ***M*** en función de las matrices ***M*** *e* ***I***.
[1,25 puntos]

a) ¿La matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ tiene inversa?

$|A|=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$. Su determinante es no nulo y la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Usamos la inversa de la matriz A para despejar X en la ecuación matricial $A^2X=A-3I$.

$$A^2X=A-3I\Rightarrow A^{-1}A^2X=A^{-1}A-3A^{-1}I\Rightarrow A^{-1}AAX=I-3A^{-1}\Rightarrow AX=I-3A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}I-3A^{-1}A^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}-3A^{-1}A^{-1}\Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}}$$

b)

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0 \Rightarrow M^3 - 3M^2 + 3M = I \Rightarrow M\left(M^2 - 3M + 3I\right) = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M^{-1} = M^2 - 3M + 3I}$$

Para que la matriz M tenga inversa debe tener determinante no nulo y esto se cumple.

$$M\left(M^2 - 3M + 3I\right) = I \Rightarrow \left|M\left(M^2 - 3M + 3I\right)\right| = |I| \Rightarrow |M|\left|M^2 - 3M + 3I\right| = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |M| \neq 0$, pues el producto de los determinantes es no nulo (1).

Y la matriz inversa de M es $M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$.

6. Considere la función $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

a) Estudie la continuidad, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. [1,25 puntos]

b) Demuestre que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones entre $x = -1$ y $x = 3$. [1,25 puntos]

a) La función es continua por ser la suma de dos funciones continuas, la exponencial y una polinómica de primer grado.
Para analizar la monotonía estudiaremos el signo de la derivada.

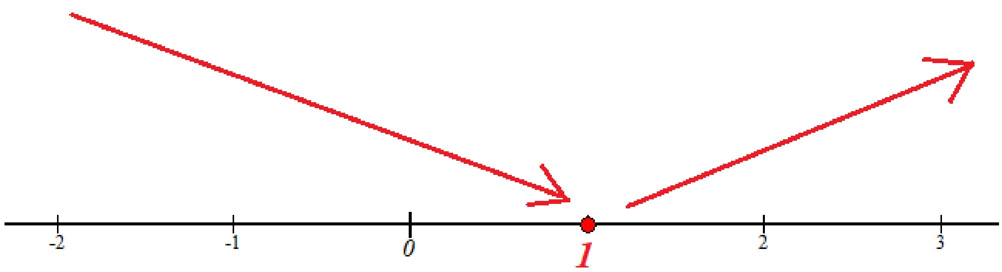
$$f(x) = e^{x-1} - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^{x-1} - 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x-1} = 1 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

En $x = 1$ existe un punto crítico de la función, analizamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = e^{0-1} - 1 \approx -0.6 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = e^{2-1} - 1 \approx 1.71 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = -1$ el mínimo relativo tiene coordenadas (1, –1).

b) Utilizaremos el teorema de Bolzano.

Como $f(-1) = e^{-1-1} - (-1) - 1 = e^{-2} > 0$; $f(3) = e^{3-1} - 3 - 1 = e^2 - 4 \approx 3.39 > 0$, ambos valores son positivos y no podemos aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo (–1, 3).
Dividimos el intervalo en dos partes: (–1,1) y (1, 3).

En (–1, 1) tenemos que la función es continua en el intervalo [–1, 1] y toma valores de signo distinto en cada uno de los extremos: $f(-1) = e^{-2} > 0$ y $f(1) = -1 < 0$ aplicando el teorema de Bolzano existe, al menos un valor $c \in (-1, 1)$ donde $f(c) = 0$.
Además como la función es decreciente en el intervalo (–1, 1) este valor "c" es único.

En (1, 3) tenemos que la función es continua en el intervalo [1, 3] y toma valores de signo distinto en cada uno de los extremos: $f(1) = -1 < 0$ y $f(3) = e^2 - 4 \approx 3.39 > 0$ aplicando el teorema de Bolzano existe, al menos un valor $d \in (1,3)$ donde $f(d) = 0$.
Además como la función es creciente en el intervalo (1, 3) este valor "d" es único.

Reuniendo lo obtenido entre $x = -1$ y $x = 3$ la función tiene dos valores en los cuales $f(x) = 0$. Además, solo existen esos dos valores que anulan la función, debido a la monotonía de la función.

No lo pide el ejercicio, pero dibujamos la gráfica de la función para comprobar lo obtenido.