SÈRIE 5

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.

2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat. Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.

3. En alguns casos, la solució final pot admetre expressions equivalents. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.

4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.

5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

   - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.

   - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.

   - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.

   - Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1.

[2,5 punts]

a)

La matriu *B* és invertible perquè els seus vectors columna (o fila) són independents (és a dir no proporcionals). Altrament perquè

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

I la seva inversa serà $B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

b)

És possible aïllar la matriu X de l'expressió donada:

$$\mathrm{X} = \mathrm{B}^{-1} \cdot (\mathrm{C} \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A})$$

Comencem calculant el producte

$$\mathrm{C} \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -21 & 28 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$\mathrm{C} \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -21 & 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 23 & -16 \end{pmatrix}}.$$

Pautes de correcció:

***a*)**

0,5 punts per l'argumentació que la matriu és invertible.

0,25 punts pel càlcul preliminar de la matriu inversa.

0,5 punts pel càlcul final.

***b*)**

0,5 punts per aïllar la matriu X.

0,25 punts pel producte matricial.

0,25 punts per la diferència de matrius.

0,25 punts pel producte final.

2.

[2,5 punts]

a)

Per trobar els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$, estudiarem la seva derivada: $f'(x) = 3x^2 - 9$

Calculem $f'(x) = 0$, en aquest cas obtenim $3x^2 - 9 = 0$ i per tant, $x = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.
Com que $f'(x)$ la podem escriure $3(x+\sqrt{3})\ (x - \sqrt{3})$, estudiarem el signe que assoleix la derivada segons els diferents intervals

	(-∞,-$\sqrt{3}$)	$-\sqrt{3}$	(-$\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$)	-$\sqrt{3}$	($\sqrt{3}$, +∞)
3(*x*+$\sqrt{3}$)	-	0	+	+	+
(*x* - $\sqrt{3}$)	-	-	-	0	+
f'(*x*)	+	0	-	0	+
f(*x*)	Creix	Màxim	Decreix	Mínim	Creix

Per tant, la funció creix en (-∞,-$\sqrt{3}$) ∪ ($\sqrt{3}$, +∞)

I la funció decreix en (-$\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$)

b)

Trobem els punts de tall entre $f(x)$ i $g(x)$ per $x \geq 0$.

Calculem: $x^3 - 9x = 7x$, $x^3 - 9x - 7x = 0$ i per tant, $x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = 0$, que s'anul·la en $x = \{0, -4, 4\}$. En el semiplà $x \geq 0$, la funció $f(x)$ i $g(x)$ es tallen en els punts d'abscisses *x* = 0 i *x* = 4.

Així doncs, hem de calcular la integral definida:

$$\int_0^4 \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_0^4 (-x^3 + 16x)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 16\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 64 - 128 = \boxed{64\,u^2}.$$

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts per la funció derivada.

0,5 punts pel càlcul de les abscisses dels punts singulars.

0,25 punts per l'anàlisi i conclusions dels signe de la derivada primera.

0,25 punts pels intervals de creixement i decreixement

b)

0,5 punts pel càlcul dels punts de tall

0,25 punts pel plantejament de la integral.

0,25 punts pel càlcul de la primitiva.

0,25 punts pel càlcul final de l'àrea.

3.

[2,5 punts]

a)

Per a què els punts siguin coplanaris el determinant dels vectors $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ ha de ser 0, per tant:

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+2a+a)-(1+2+a^2)=0$, o sigui $a^2-3a+2=0$,

i, per tant, *a* = 1 o bé *a* = 2.

Pel valor *a* = 1, els punts A i C són el mateix, en canvi per $\boxed{a = 2}$ tots els punts són diferents.

b)

Utilitzem la fórmula de l'àrea del triangle a l'espai: $S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-1,1)\times(0,-1,0)=(1,0,-1)$ i per tant l'àrea és $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\,u^2}$.

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts pel plantejament del determinant.

0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,5 punts per les solucions possibles.

0,25 punts per la justificació del valor *a* = 2.

b)

0,25 punts pel càlcul dels dos vectors.

0,5 punts per càlcul del producte vectorial.

0,25 punts per la norma.

0,25 punts per la superfície.

4.

[2,5 punts]

a)

aplicant el teorema de Pitàgores $x^2 + y^2 = d^2$, i per tant $y^2 = d^2 - x^2$.

En substituir a la resistència *R* obtenim $\boxed{R = kxy^2 = kx(d^2 - x^2)}$

b)

Per trobar la resistència màxima derivem i igualem a 0:

$$R' = k\big((d^2 - x^2) + x(-2x)\big) = k(d^2 - 3x^2) = 0,$$

Per tant $\boxed{x = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3}}$, i $\boxed{y = \sqrt{d^2 - x^2} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{6}}{3}}$, es tracta d'un màxim atès que $R'' = -6kx$

$$\mathrm{R}''\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right) = -6k\frac{d\sqrt{3}}{3} < 0.$$

Per trobar la resistència d'aquesta biga cal substituir els valors de x, y:

$$\boxed{R_{max} = k\frac{d\sqrt{3}}{3}\left(\frac{d\sqrt{6}}{3}\right)^2 = kd^3\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

Pautes de correcció:

a)

0,75 punts per l'aplicació del Teorema de Pitàgores.

0,5 punts pel l'expressió final de R.

b)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts pel càlcul de l'abscissa del punt singular.

0,25 punts per la justificació de la condició de màxim.

0,25 punts per la segona dimensió i la resistència màxima final.

5.

[2,5 punts]

a)

Estudi del sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre a.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 8 \\ 2 & 1 & -a & 1 \\ 3 & 0 & -3a & 1 \end{array}\right)$$

Càlcul del rang de la matriu del sistema i el de la matriu ampliada.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, per tant, $\text{Rang M} \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & 0 & -3a \end{vmatrix} = -3a - 6a - 3a + 12a = 0$$

El determinant de la matriu del sistema és nul (zero) per a qualsevol valor del paràmetre a. Per tant, $\text{Rang M} = 2$, per a qualsevol valor del paràmetre a.

Orlant el menor d'ordre 2 no nul, amb la finalitat de trobar el rang de la matriu ampliada, tenim:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$, per tant, $\text{Rang}\,\overline{\text{M}} = 3$, per a qualsevol valor del paràmetre a.

Com a conclusió tenim:

$\text{Rang M} \neq \text{Rang}\,\overline{\text{M}}$ per a qualsevol valor del paràmetre a .

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, es tracta, efectivament, d'un sistema incompatible, no té solució, per a qualsevol valor del paràmetre a.

b)

Interpreteu geomètricament el sistema d'equacions lineals. Feu un dibuix esquemàtic que representi la posició relativa dels tres plans.

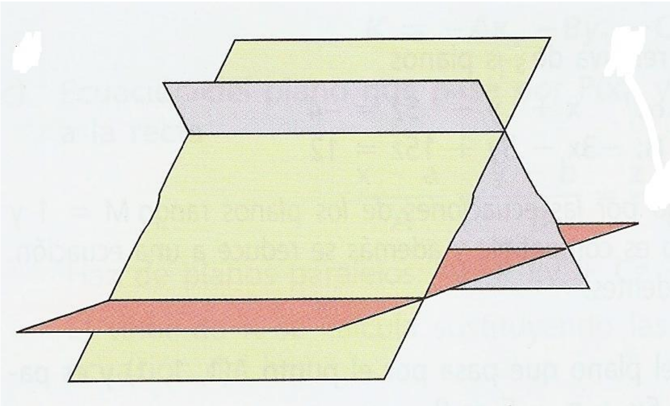
Cadascuna de les tres equacions es correspon amb un pla de l'espai tridimensional.

Sistema d'equacions incompatible, per tant, no hi ha cap punt de tall entre els tres plans.

No hi ha cap parell de plans paral·lels, atès que dels tres vectors normals (un vector normal a cada pla) no n'hi ha cap parell de proporcionals.

Els tres plans es tallen dos a dos en rectes paral·leles.

Dibuix esquemàtic:



Pautes de correcció:

a)

0,25 punts per les matrius del sistema.

0,25 punts pel rang de la matriu associada del sistema.

0,25 punts pel rang de la matriu ampliada del sistema.

0,5 punts aplicar el Teorema Rouché-Frobënius i la conclusió final.

Observació: En cas que l'estudiant no discuteixi el sistema de forma matricial es repartirà el punt entre les diferents parts que condueixen a la resolució.

b)

0,25 punts per raonar que no hi ha cap punt de tall comú.

0,25 punts per raonar que no hi ha cap parell de plans paral·lels

0,5 punts per raonar que es tallen dos a dos.

0,25 punts pel dibuix esquemàtic.

6.

[2,5 punts]

a)

Com que té un extrem relatiu en $x = -3$ i en $x = 1$, sabem que $f\,'(-3) = f\,'(1) = 0$.

$f\,'(x) = 6x^2 + 2mx + n$. Aleshores tenim que:

$f\,'(-3) = 54 - 6m + n = 0$

$f\,'(1) = 6 + 2m + n = 0$.

Resolent el sistema, obtenim que $\boxed{m = 6}$ i que $\boxed{n = -18}$.

D'aquesta manera sabem que $f(x) = 2x3 + 6x2 - 18x + p$.

Per a trobar la *p*, utilitzarem que $f(3) = 4$.

Per tant, $f(3) = 54 + 54 - 54 + p = 4$.

Aleshores, $\boxed{p = -50}$.

b)

Calculem $f\,'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$ i obtenim que per $x = -3$, $f\,'(-3) = -2/4 = -1/2$ que serà el pendent de la recta tangent.

Ara busquem el punt per on passarà que serà $(-3, f\,(-3)) = (-3, -2)$.

La recta tangent serà $y + 2 = -1/2\,(x + 3)$. L'equació serà $\boxed{y = -x/2 - 7/2}$

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts pel plantejament del sistema.

0,25 punts pel càlcul de m.

0,25 punts pel càlcul de n.

0,25 punts pel càlcul de p.

b)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts pel pendent de la recta tangent.

0,5 punts per les coordenades del punt de tangència (abscissa i ordenada)

0,25 punts per l'equació de la recta tangent.