Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 2

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

***a*)** Si se sabe que $f(x)$ corta el eje de les abscisas en $x = 1$, calcule la expresión de la función $f(x)$. [0,75 puntos]

***b*)** Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función. [0,75 puntos]

***c*)** Se sabe que el área del recinto limitado por la curva $y = f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$, es $15u^2$. Calcule el valor de a. [1 punto]

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

***a*)** Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a. [1,5 puntos]

b) Resuelva, si es posible, el sistema para al caso $a = 2$. [1 punto]

3. Sea la recta r definida per la expresión siguiente:

$$r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}.$$

***a*)** Determine la posición relativa de la recta r respecto del plano $\pi : x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si es paralela, calcule la distancia de r a π, y si es secante, calcule el punto de corte. [1,25 puntos]

***b*)** Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π *y* que corta la recta r en un punto P, la primera coordenada del cual es 5 veces más grande que la segunda. [1,25 puntos]

4. ***a*)** Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte el eje de ordenadas en el punto (0, 5), que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x+1$. [1 punto]

   ***b*)** Compruebe que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo (0, 4). Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$. [1,5 puntos]

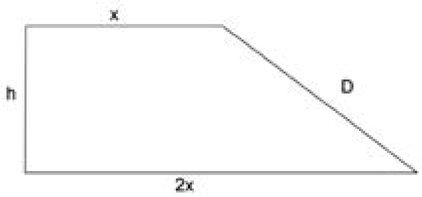
5. Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros a, b y c.

   a*)** Calcule las matrices ***X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [1,5 puntos]

   b*)** Determine los valores de a, b y c para que la matriz inversa de ***X sea $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   [1 punto]

6. En el patio de una escuela se quiere crear una área de juego de 30 m^2 para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, de manera que la base mayor mida el doble que la base menor, como se indica en la figura, y que el lado oblicuo respecto a las bases (D) sea tan corto como sea posible.



   a) Justifique que se verifican las relaciones siguientes: $h = \dfrac{20}{x}$ y $D(x) = \sqrt{\dfrac{400}{x^2} + x^2}$ [1 punto]

   b) Encuentre las dimensiones del trapecio para las que la longitud del lado D es mínima. [1,5 puntos]

SOLUCIONES

1. Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.
a) Si se sabe que $f(x)$ corta el eje de les abscisas en $x = 1$, calcule la expresión de la función $f(x)$. [0,75 puntos]
b) Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función. [0,75 puntos]
c) Se sabe que el área del recinto limitado por la curva $y = f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$, es $15u^2$. Calcule el valor de a. [1 punto]

a) Obtenemos la función integrando la función derivada.

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int 3x^2 - 12xdx = x^3 - 6x^2 + K$$

Al cortar la función el eje de abscisas en $x = 1$ tenemos que $f(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{r} f(x) = x^3 - 6x^2 + K \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + K \Rightarrow K = 5 \Rightarrow \boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 5}$$

La expresión de la función es $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.

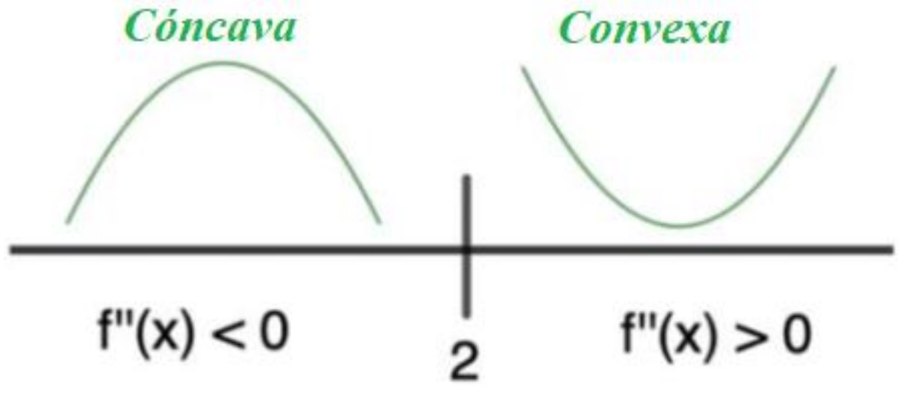
b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

El posible punto de inflexión está en $x = 2$. Comprobamos que existe un cambio de curvatura en dicho valor.

En el intervalo $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = 0 - 12 = -12 < 0$.
La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 2)$.
En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada segunda vale $f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$.
La función es convexa (∪) en $(2, +\infty)$.



Resumiendo: La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 2)$ y convexa (∪) en $(2, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en *x = 2*.

c) La curva tiene ecuación $f''(x) = 6x - 12$. Comprobamos donde corta el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{r} f''(x) = 6x - 12 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

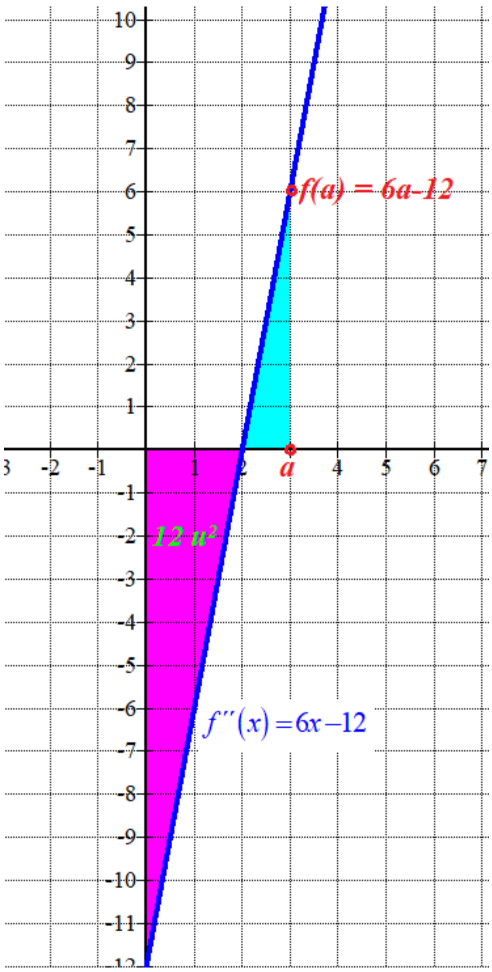
Como *a > 2* entonces el área pedida se divide en dos partes que se calculan con dos integrales definidas entre *0* y *a*, y entre *a* y *2*. O bien de forma gráfica pues al ser la función una recta las regiones son triángulos rectángulos.

La primera región es un triángulo de base = 2 y altura = 12.

Su área es $\frac{2 \cdot 12}{2} = 12u^2$.

Como debemos de conseguir una región de área 15 u^2 entonces nos falta un triángulo de área 3.

El triángulo que nos falta tiene de base "*a – 2*" y de altura "*6a – 12*", como el área debe ser 3 nos queda:



$$3 = \frac{(a-2)(6a-12)}{2} \Rightarrow 6 = 6a^2 - 12a - 12a + 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a^2 - 24a + 18 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \boxed{3 = a} \\ o \\ 1 = a \end{cases}$$

El valor buscado es *a = 3*.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Haciendo uso del cálculo integral.

$$15 = \left| \int_0^2 6x - 12dx \right| + \int_2^a 6x - 12dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 = \left| \left[3x^2 - 12x \right]_0^2 \right| + \left[3x^2 - 12x \right]_2^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 = \left| 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - 0 \right| + \left[3a^2 - 12a - \left[3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 \right] \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 = 12 + 3a^2 - 12a + 12 \Rightarrow 3a^2 - 12a + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \boxed{3 = a} \\ o \\ 1 = a \end{cases}$$

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real *a*:

$$\begin{cases} ax+2y+3z=2 \\ 2x+ay+z=a \\ x+y+4z=1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *a*. [1,5 puntos]
b) Resuelva, si es posible, el sistema para al caso *a* = 2. [1 punto]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=4a^2+2+6-3a-16-a=4a^2-4a-8$$

$$|A|=0 \Rightarrow 4a^2-4a-8=0 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} \frac{1+3}{2}=2=a \\ \frac{1-3}{2}=-1=a \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a\neq -1$ y $a\neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si *a* = *–1*.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Convertimos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{Fila\,2^a+2\cdot Fila\,1^a} \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 6 & 4 \\ \hline 0 & 3 & 7 & 3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{Fila\,3^a+Fila\,1^a} \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 3 & 7 & 3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,3^{a}-Fila\,2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & -7 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[A]{} \qquad \xleftrightarrow[A/B]{}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $a=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Convertimos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^{a}-Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,1^{a}-2\cdot Fila\,3^{a} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -8 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cdot Fila\,3^{a}-5\cdot Fila\,2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[A]{} \qquad \xleftrightarrow[A/B]{}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema para *a = 2* utilizando el sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y+3z=2 \\ -2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+2y+3z=2 \\ \boxed{z=0} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+2y+0=2 \Rightarrow x+y=1 \Rightarrow \boxed{y=1-x}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión: $x=t;\ y=1-t;\ z=0;\quad t\in\mathbb{R}$

3 Sea la recta *r* definida per la expresión siguiente:

$$r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}.$$

a) Determine la posición relativa de la recta *r* respecto del plano $\pi: x-2y+4z-4=0$. Si es paralela, calcule la distancia de *r* a *π*, y si es secante, calcule el punto de corte. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta *s* perpendicular al plano *π y* que corta la recta *r* en un punto *P*, la primera coordenada del cual es 5 veces más grande que la segunda. [1,25 puntos]

a) Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano. De obtener una solución recta y plano son secantes y de no obtener solución serán paralelos.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \\ \pi: x-2y+4z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2+\lambda-2(-1+3\lambda)+4(3+\lambda)-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+\lambda+2-6\lambda+12+4\lambda-4=0 \Rightarrow -\lambda+12=0 \Rightarrow \lambda=12 \Rightarrow \begin{cases} x=2+12=14 \\ y=-1+36=35 \Rightarrow \boxed{P(14,35,15)} \\ z=3+12=15 \end{cases}$$

Recta y plano son secantes y coinciden en el punto $P(14,35,15)$.

b) La recta *s* perpendicular al plano *π* tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x-2y+4z-4=0 \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=(1,-2,4)$$

El punto *P(x, y, z)* de corte de las rectas *r* y *s* tiene la primera coordenada (x) igual a cinco veces la segunda coordenada (y).

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y,z)\in r \\ r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \\ x=5y \end{array}\right\} \Rightarrow 2+\lambda=5(-1+3\lambda) \Rightarrow 2+\lambda=-5+15\lambda \Rightarrow 14\lambda=7 \Rightarrow \lambda=\frac{7}{14}=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2+0.5=2.5 \\ y=-1+1.5=0.5 \Rightarrow \boxed{P(2.5,0.5,3.5)} \\ z=3+0.5=3.5 \end{cases}$$

Una vez hallado un vector director y un punto de la recta *s*, hallamos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} P(2.5,0.5,3.5)\in s \\ \overrightarrow{v_s}=(1,-2,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s\equiv\begin{cases} x=2.5+\lambda \\ y=0.5-2\lambda \\ z=3.5+4\lambda \end{cases}}$$

4. ***a)*** Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte el eje de ordenadas en el punto (0, 5), que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x)=2x+1$. [1 punto]
b) Compruebe que la función $f(x)=-x^3+6x^2-16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo (0, 4). Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$. [1,5 puntos]

a) La función tiene una expresión $y=g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Debemos determinar los valores de *a, b, c* y *d* con los datos proporcionados en el ejercicio.

La función pasa por (0, 5) → $5=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d \Rightarrow \boxed{d=5}$

La función queda $y=g(x)=ax^3+bx^2+cx+5$.
La recta tangente a la función en $x = 1$ es horizontal significa que su pendiente es 0 y que por tanto la derivada se anula en $x = 1$ → $g'(1) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} g(x)=ax^3+bx^2+cx+5 \Rightarrow g'(x)=3ax^2+2bx+c \\ g'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0=3a+2b+c}$$

Se cumple que $g''(x) = 2x + 1$.

$$\left.\begin{array}{r} g'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow g''(x)=6ax+2b \\ g''(x)=2x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 6ax+2b=2x+1 \Rightarrow \begin{cases} 6a=2 \rightarrow \boxed{a=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}} \\ 2b=1 \rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la ecuación $0=3a+2b+c$ y obtenemos el valor de *c*.

$$\left.\begin{array}{l} 0=3a+2b+c \\ a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 0=1+1+c \Rightarrow \boxed{c=-2}$$

La función que buscamos es $y=g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+5$

b) Comprobamos que $f(2) = 0$.

$$f(2)=-2^3+6\cdot 2^2-16=0$$

Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x)=-x^3+6x^2-16 \Rightarrow f'(x)=-3x^2+12x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -3x^2+12x=0 \Rightarrow -3x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=4} \end{cases}$$

Como los posibles cambios de signo de la derivada están situados en los extremos del intervalo (0, 4) la función derivada no cambia de signo en dicho intervalo. Averiguamos el signo dentro del intervalo. Tomamos $x=2\in(0,4)$ y la derivada vale

$f'(2)=-3\cdot 2^2+12\cdot 2=12>0$.

La función derivada es siempre positiva en el intervalo (0, 4) y por tanto la función es estrictamente creciente en (0, 4).

Para calcular el área previamente averiguamos si la función corta el eje X.

Como $f(0)=-0^3+6\cdot 0^2-16=-16$ y $f(4)=-4^3+6\cdot 4^2-16=16$, la función es estrictamente creciente y corta el eje de abscisas en *x = 2* entonces no corta dicho eje en más puntos del intervalo (0, 4).

El área pedida se calcula como la suma de la integral definida entre 0 y 2 de la función y de la integral definida de la función entre 2 y 4.

$$\int_0^2 -x^3+6x^2-16dx=\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-16x\right]_0^2=\left[-\frac{2^4}{4}+2\cdot 2^3-16\cdot 2\right]-\left[-\frac{0^4}{4}+2\cdot 0^3-16\cdot 0\right]=$$
$$=-4+16-32=-20$$

$$\int_2^4 -x^3+6x^2-16dx=\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-16x\right]_2^4=\left[-\frac{4^4}{4}+2\cdot 4^3-16\cdot 4\right]-\left[-\frac{2^4}{4}+2\cdot 2^3-16\cdot 2\right]=$$
$$=-64+128-64+4-16+32=20$$

El área pedida es: $Área=|-20|+20=40u^2$

5. Sea la matriz $X=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros a, b y c.

a) Calcule las matrices ***X*** tales que $X^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [1,5 puntos]

b) Determine los valores de a, b y c para que la matriz inversa de ***X*** sea $X^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

a)

$$X^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ a+b=0 \\ b^2=1 \\ b+c=0 \\ c^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{1}=\pm 1 \\ b=-a \\ b=\sqrt{1}=\pm 1 \\ c=-b \\ c=\sqrt{1}=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Si\, a=1 \rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=1 \end{cases} \rightarrow \boxed{a=c=1; b=-1} \\ o \\ Si\, a=-1 \rightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=-1 \end{cases} \rightarrow \boxed{a=c=-1;\ b=1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ o\ X=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

b)

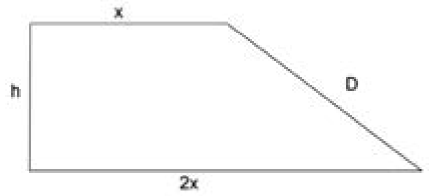
$$X^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X\cdot X^{-1}=X\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a}{2}+1 & -\frac{a}{2}+1 \\ 0 & b & b-1 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=\dfrac{a}{2} \to \boxed{a=2} \\ -\dfrac{a}{2}+1=0 \to a=2 \\ \boxed{b=1} \\ b-1=0 \to b=1 \\ 1=-c \to \boxed{c=-1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Los valores buscados son $a = 2$; $b = 1$ y $c = -1$.

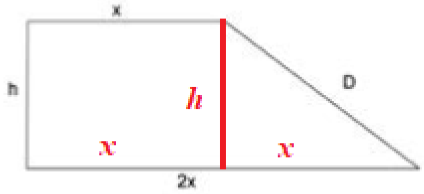
6. En el patio de una escuela se quiere crear una área de juego de 30 m^2 para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, de manera que la base mayor mida el doble que la base menor, como se indica en la figura, y que el lado oblicuo respecto a las bases (D) sea tan corto como sea posible.



a) Justifique que se verifican las relaciones siguientes: $h=\frac{20}{x}$ y $D(x)=\sqrt{\frac{400}{x^2}+x^2}$ [1 punto]

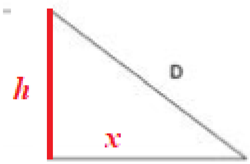
b) Encuentre las dimensiones del trapecio para las que la longitud del lado D es mínima. [1,5 puntos]

a) Dividimos el trapecio rectangular en un rectángulo y un triángulo rectángulo.



El área del trapecio rectangular es 30 y a su vez es la suma del área de un rectángulo y un triángulo rectángulo.

$$\left.\begin{array}{r} Área = x\cdot h + \frac{x\cdot h}{2} = \frac{3x\cdot h}{2} \\ Área = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3x\cdot h}{2} = 30 \Rightarrow 3x\cdot h = 60 \Rightarrow x\cdot h = \frac{60}{3} = 20 \Rightarrow \boxed{h=\frac{20}{x}}$$

En el triángulo rectángulo  aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$\left.\begin{array}{r} D^2 = x^2+h^2 \\ h=\frac{20}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow D^2 = x^2 + \left(\frac{20}{x}\right)^2 \Rightarrow D^2 = x^2+\frac{400}{x^2} \Rightarrow \boxed{D(x)=\sqrt{x^2+\frac{400}{x^2}}}$$

b) Derivamos la función D(x), la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$D(x)=\sqrt{\frac{400}{x^2}+x^2} = \sqrt{400x^{-2}+x^2} \Rightarrow D´(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{400}{x^2}+x^2}}\left(-800x^{-3}+2x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D´(x)=\frac{2x-\frac{800}{x^3}}{2\sqrt{\frac{400}{x^2}+x^2}} = \frac{\frac{2x^4-800}{x^3}}{2\sqrt{\frac{400+x^4}{x^2}}} = \frac{\frac{2x^4-800}{x^3}}{2\frac{\sqrt{400+x^4}}{x}} = \frac{x\left(2x^4-800\right)}{2x^3\sqrt{400+x^4}} = \frac{x^4-400}{x^2\sqrt{400+x^4}}$$

$$D´(x)=0 \Rightarrow \frac{x^4-400}{x^2\sqrt{400+x^4}} = 0 \Rightarrow x^4-400=0 \Rightarrow x^4=400 \Rightarrow x=\sqrt[4]{400}=\sqrt[4]{20^2}=\sqrt{20}\simeq \pm 4.47$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=+\sqrt{20}\simeq 4.47$.

En el intervalo $\left(0,\sqrt{20}\right)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $D´(1)=\frac{1^4-400}{1^2\sqrt{400+1^4}}=\frac{-399}{\sqrt{401}}<0$.

La función decrece en $\left(0,\sqrt{20}\right)$.

En el intervalo $\left(\sqrt{20},+\infty\right)$ tomamos *x* = *5* y la derivada vale

$D´(5)=\frac{5^4-400}{5^2\sqrt{400+5^4}}=\frac{225}{25\sqrt{1025}}>0$. La función crece en $\left(\sqrt{20},+\infty\right)$.

Por lo que la función *D(x)* presenta un mínimo en $x=+\sqrt{20}\simeq 4.47$.

Para $x=+\sqrt{20}$ tenemos que $D\left(\sqrt{20}\right)=\sqrt{\frac{400}{\left(\sqrt{20}\right)^2}+\left(\sqrt{20}\right)^2}=2\sqrt{10}\simeq 6.325$ y

$h=\frac{20}{\sqrt{20}}=\sqrt{20}\simeq 4.47$

Las dimensiones del trapecio con longitud D mínima son: $x=+\sqrt{20}\simeq 4.47$ metros; $h=\sqrt{20}\simeq 4.47$ metros y $D=2\sqrt{10}\simeq 6.325$ metros.